

*Cours de Morphologie Mathématique*  
*Dilatations, érosions*

Hugues Talbot

talboth@esiee.fr

ISBS / ESIEE

1<sup>er</sup> semestre 2004-2005

## Rappel des ressources

- Le cours sera mis en ligne au fur et à mesure:

<http://www.esiee.fr/~talboth/ISBS/Morpho/>

- Également copie des TDs + TPs (en avance).

# Rappel du cours précédent

---

- Représentation d'images, résolution spatiale et spectrale.
- Notion d'ordre, ordre partiel
- Notions de majorant, minorant, sup, et inf
- Treillis complets.

# Questions

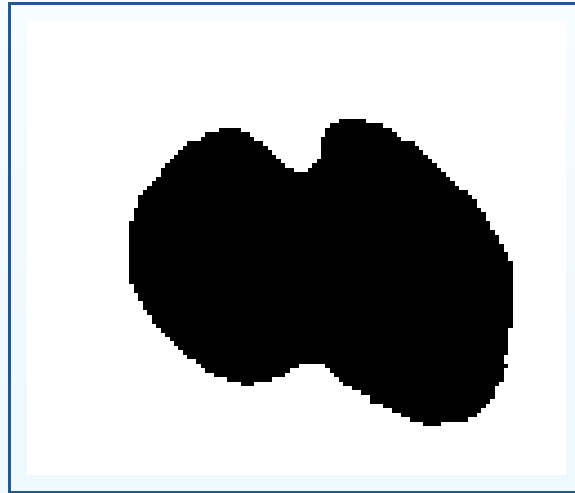
1. Questions sur le cours précédent ?
2. Remarques ?
3. Questions sur la suite du cours?

## *Concepts de base, suite*

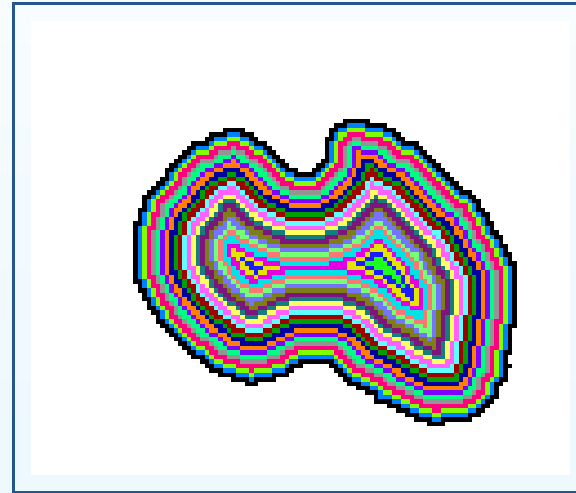
# Concept de base: la distance

---

- La fonction distance



Noyaux de cellules



Fonction distance

- Dépendente du graphe sous-jacent.

# Concept de base: la mesure

---

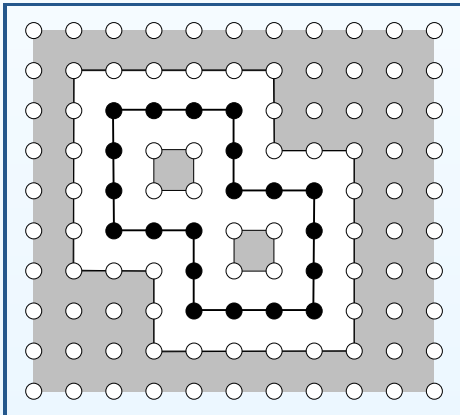
C'est ce qui nous intéresse *in fine*.

- Nombre d'objets.
- Longueur, aire, volume.
- Orientation, élongation.
- La MM est surtout basé sur la mesure, non la forme.

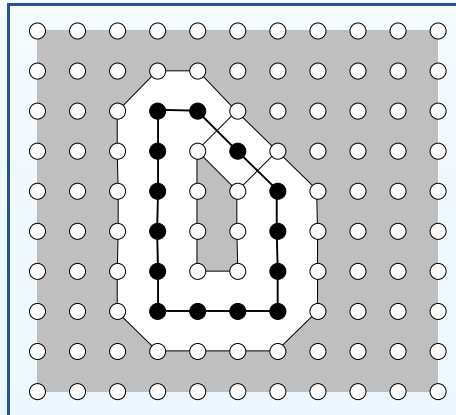
# Concept de base: la grille/le graphe

La grille digitale pose des problèmes:

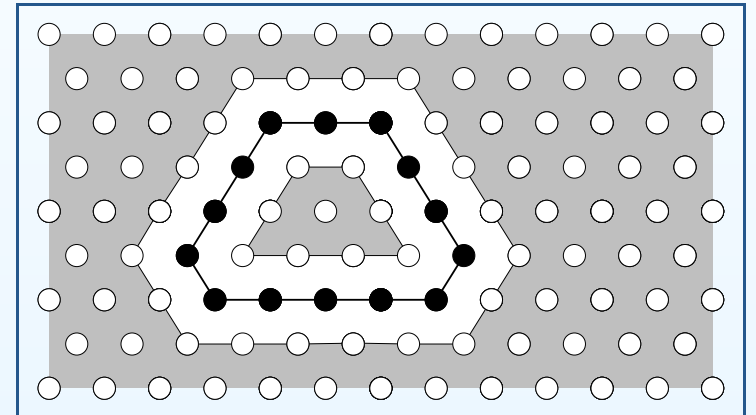
- Connectivité:



4-connecte



8-connecte

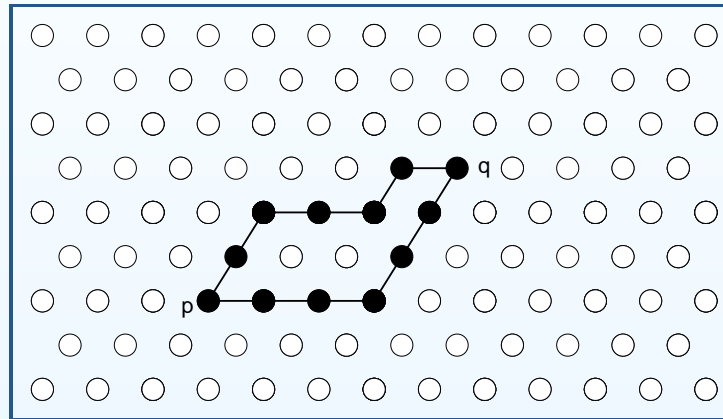


6-connecte

Pour résoudre le problème de la distance 4 ou 8-connecte, on doit considérer le fond 4-connecte et les objets 8-connecte ou vice-versa.

# Grille/graphes et distance

- distance



Il existe plus d'un plus court chemin

Il est possible d'invoquer la distance Euclidienne pour résoudre ce problème mais des problèmes d'implémentation et de rapidité surgissent alors.

## Dualité – complémentarité

---

- Sup et Inf dans un treillis complet jouent des rôles symétriques.
- Deux opérateurs  $\psi$  et  $\psi^*$  sont duaux si pour tout  $X$ :

$$\psi(X^c) = [\psi^*(X)]^c$$

- Pour le treillis des parties d'un ensemble: complémentation
- Pour le treillis des fonctions dans  $R$ : symétrie par rapport à 0.

## Autres points importants

---

- Le lien entre la théorie des ensembles et la théorie des treillis:
  - Décomposition par seuillage
  - Ombre
  - Fonctions bi-valuées
- Importance des propriétés mathématiques quand on définit les opérateurs.

# Liens avec d'autres théories

---

MM complémentaire :

- La géométrie discrète (distance, squelettes, etc).
- La théorie des graphes (plus court chemins, LPE, computational geometry, etc).
- les statistiques: modèles aléatoires, théorie de la mesure, stéréologie.
- Théories linéaires: replace  $+$  with  $\wedge$ .
- Scale-space: remplacer le filtrage Gaussien avec des filtres morphologiques.
- Isophotes (level sets): dilatation avec des EDPs, FMM est une fonction distance.
- Informatique, algorithmes.

# *Erosions et dilatations*

# Erosion

Dans le contexte le plus général, une érosion  $\epsilon$  est un opérateur qui commute avec l'inf.

$$\bigwedge \epsilon(.) = \epsilon \bigwedge (.)$$

Ce qui n'est pas très intuitif. On commence par définir l'érosion par élément structurant (ES):

$$\epsilon_B(X) = \{x | B_x \subseteq X\}$$

C-à-d: est-ce que l'ensemble contient l'ES?

Définition équivalente:

$$\epsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$$

# Erosion sur le treillis des fonctions:

---

Dans ce cas:

$$\epsilon_B(f) = \bigwedge_{b \in B} f_{-b}$$

Ce qui est équivalent à:

$$[\epsilon_B(f)](x) = \min_{b \in B} f(x + b)$$

Érosion par un ES non plat (rarement utilisé dans la pratique, sauf avec une parabole)

$$[\epsilon_{B_v}(f)](x) = \min_{b \in B_v} \{f(x + b) - B_v(b)\}$$

# Dilatation

La dilatation est le dual de l'érosion: une dilatation  $\delta$  sur un treillis complet commute avec le sup:

$$\bigvee \delta(\cdot) = \delta \bigvee (\cdot)$$

Ce qui est toujours aussi peu intuitif. On commence par la dilatation par un élément structurant (ES):

$$\delta_B(X) = \{x | B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

c-à-d: est-ce que l'ES intersecte l'ensemble.

Q: Quel est le dilaté d'un point ?

Définition équivalente:

$$\delta_B(X) = \bigcup_{b \in B} X_{-b}$$

## Le cas des fonctions:

---

Dans le cas du treillis des fonctions:

$$\delta_B(f) = \bigvee_{b \in B} f_{-b}$$

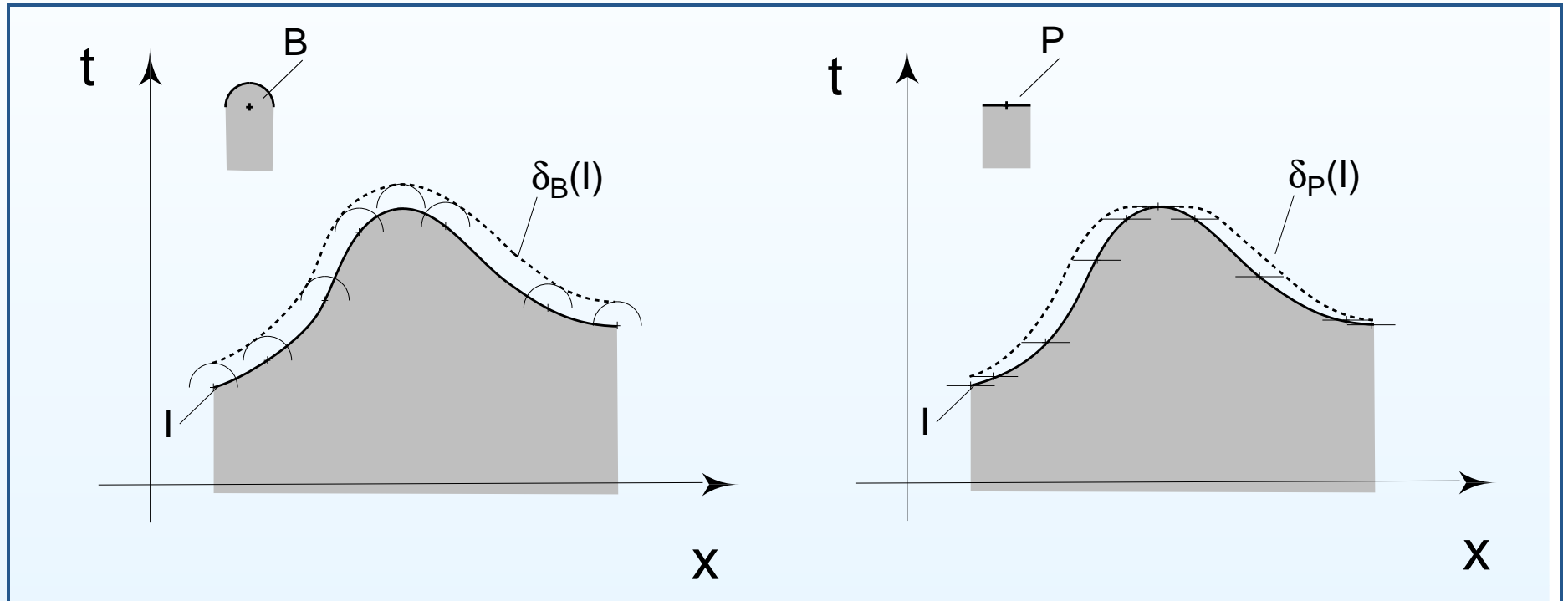
Ce qui est équivalent à:

$$[\delta_B(f)](x) = \max_{b \in B} f(x + b)$$

Dilatation par un ES non-plat:

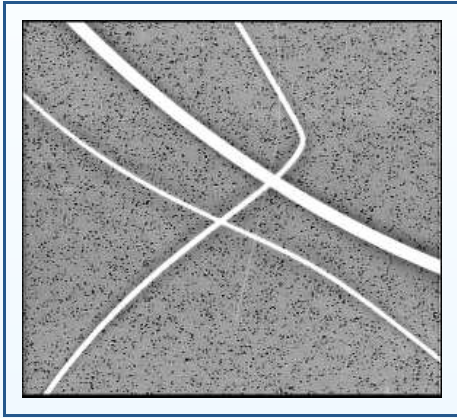
$$[\delta_{B_v}(f)](x) = \max_{b \in B_v} \{f(x + b) + B_v(b)\}$$

# Illustrations - érosion/dilatation

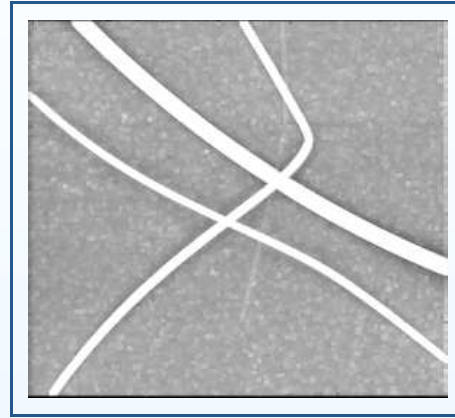


Dilatation d'une image 1-D.

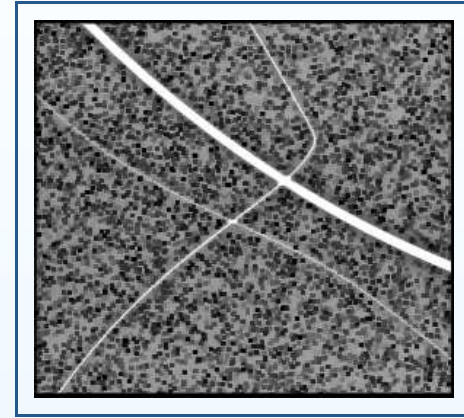
# Illustration (cont.)



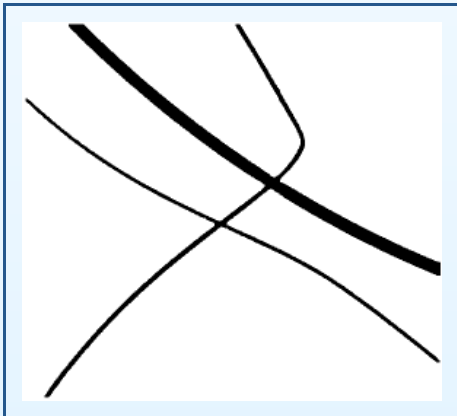
orig.



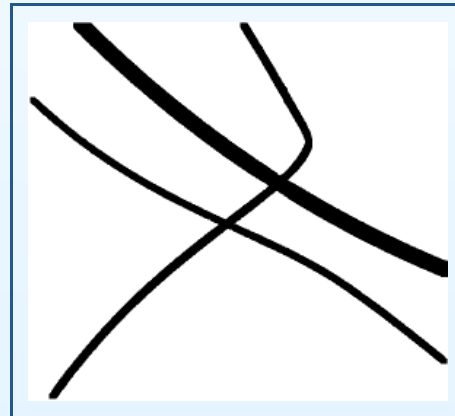
dilaté



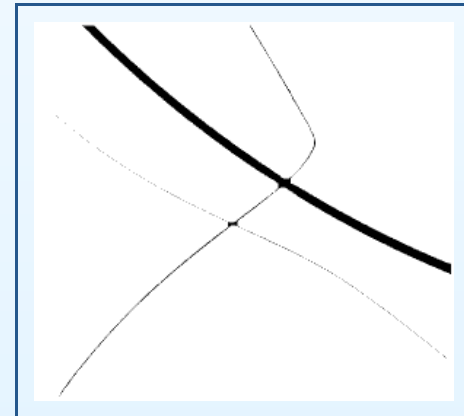
erodé



orig.



dilaté



erodé

# Propriétés

- dualité:  $\delta_B(f) = -\epsilon_B(-f)$
- croissance:  $f \leq g \Rightarrow \delta_B(f) \leq \delta_B(g), \epsilon_B(f) \leq \epsilon_B(g)$
- distributivité:  $\delta(\bigvee_i f_i) = \bigvee_i \delta(f_i) ; \epsilon(\bigwedge_i f_i) = \bigwedge_i \epsilon(f_i)$
- composition:  $\delta_{B_2} \delta_{B_1} = \delta_{(\delta_{\check{B}_2} B_1)} ; \epsilon_{B_2} \epsilon_{B_1} = \epsilon_{(\delta_{\check{B}_2} B_1)}$
- relation d'ordre:  $\epsilon_B \leq I \leq \delta_B$  ssi  $B$  contient son origine.
- invariance par translation.

# Algorithme: dilatation en temps constant

---

- Dilatation en temps constant par un segment (fenêtre glissante ou récursive (van Herk))
- composition de dilatations horiz. et vert.: dilatation par un carré.
- dilatation par des polygônes: approximations de disques.

# Van Herk algorithm

---

- Image d'entrée 1D de longueur  $nx$  est divisée en block de taille  $\lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur de l'élément structurant en pixels.
- Les pixels sont étiquetés de 0 à  $nx - 1$ , en supposant que  $nx$  est un multiple de  $\lambda$  (sinon on rajoute des pixels jusqu'à ce que ce soit le cas).
- On a besoin de deux buffers (tampons)  $g$  et  $h$ .
- Dans le cas de la dilatation, on prend le maximum *récurivement* à l'intérieur des blocks, à droite pour  $g$ , à gauche pour  $h$ .
- Lorsque  $g$  et  $h$  sont contruits, le résultat pour la dilatation en chaque point  $x$  est donné en considérant le maximum des valeurs pour  $g$  à la position  $x + \lambda - o - 1$  et  $h$  à la position  $x - o$ , avec  $o$  l'origine de l'ES.

La dilatation se calcule en temps constant quelle que soit la longueur de l'ES.

# Choix de l'élément structurant

---

- Contrairement à ce qu'on pourrait penser la *forme* de l'ES n'est pas tellement critique (il y a des exceptions).
- En particulier l'érosion ou la dilatation ne sont pas très utiles pour définir les formes.
- ES courants: carrés, diamant, polygones, disques Euclidiens, lignes, paires de points.
- Application des ES arbitraires sont rares.
- Changer l'origine de l'ES translate le résultat.