

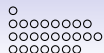
# Programmation linéaire – suite

## Cas limites du simplexe

Hugues Talbot

Laboratoire A2SI

6 avril 2007



# Plan

## Cas limites de la programmation linéaire

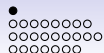
- Limites de l'algorithme du simplexe

- Solution unique

- Solution multiple

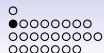
- Solutions non bornées

## PL dégénérée et convergence



## Application de l'algorithme du simplexe

- L'algorithme décrit ne fonctionne que pour une *minimisation* de  $z$ , pour maximiser  $z$  on doit minimiser  $-z$ .
- On doit trouver une base initiale réalisable. Ce n'est pas toujours évident.
- L'algorithme fournit une base réalisable et une valeur extrême d'une des variables. On doit trouver les autres en résolvant le système.
- On doit tenir compte des cas limites.



## Solution optimale unique

- Une ébénisterie produit des bureaux, des tables et des chaises
- Chaque type de produit réclame du bois et deux types de travaux : mise en forme et finition, suivant le tableau :

Ressource	bureau	table	chaise
planches	8m	6m	1m
mise en forme	4h	2h	1.5h
finition	2h	1.5h	0.5h

- On dispose de 48m de planches, 20h de mise en forme et 8h de finition.
- On vend un bureau pour 60 Euros, une table pour 30 Euros et une chaise pour 20 Euros.
- La demande pour les chaises et les bureaux est illimitée, mais on ne pense vendre que 5 tables au plus.
- On veut maximiser le profit.



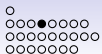
## Formulation

- Variables :  $x_1$  = nb. bureaux,  $x_2$  = tables,  $x_3$  = chaises
- Objectif :  $\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$
- Contraintes :

$$\begin{array}{rcccccl}
 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 48 \\
 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & \leq & 20 \\
 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & \leq & 8 \\
 & & x_2 & & & \leq & 5
 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$





## Première itération

- Au départ :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C^T = [ -60 \quad -30 \quad -20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]$$

- Comme base initiale on choisit  $VB = \{x_4, x_5, x_6, x_7\}$  On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 8 & 6.0 & 1.0 \\ 4 & 2.0 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$



## Première itération – échanges de variables

- Coûts réduits  $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$C_e^T = \begin{array}{ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ [-60 & -30 & -20] \end{array}$$

Donc  $x_1$  (le min) entre dans la base.

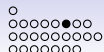
- $P = B^{-1} A_1 = [ 8 \quad 4 \quad 2 \quad 0 ]^T$

- ratios :

$$\frac{\bar{b}}{P} = \begin{array}{cccc} x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 6 & 5 & 4 & \infty \end{array}$$

donc  $x_6$  (le min) sort de la base.





## Deuxième itération

- On a maintenant  $VB = \{x_4, x_5, x_1, x_7\}$  On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0 \\ 1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits  $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

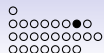
$$C_e^T = \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_6 \\ [15 & -5 & 30] \end{matrix}$$

Donc  $x_3$  (le min) entre dans la base.

- $P = B^{-1} A_3 = [-1 \quad 0.5 \quad 0.25 \quad 0]^T$
- ratios :

$$\frac{\bar{b}}{P} = \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_1 & x_7 \\ -16 & 8 & 16 & \infty \end{matrix}$$

donc  $x_5$  (le min dont  $P$  est positif) sort de la base.



## Troisième itération

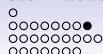
- On a maintenant  $VB = \{x_4, x_3, x_1, x_7\}$  On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 8 & 0 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits  $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$C_e^T = \begin{matrix} x_2 & x_5 & x_6 \\ [ 5 & 10 & 10 ] \end{matrix}$$

On a trouvé l'optimum !



## Solution

- La solution est constituée des variable de base réalisable.  
Ici

$$VB = \{x_4, x_3, x_1, x_7\}$$

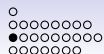
- Les valeurs de ces variables sont données par

$$\bar{b} = \{24, 8, 2, 5\}$$

respectivement. Toutes les autres valeurs sont à 0.

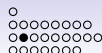
- La fonction de coût vaut donc :

$$z = -60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = -280$$



## Solution optimale multiple

- On prend le même problème, mais cette fois-ci on suppose qu'une table rapporte 35 Euros au lieu de 30.
- Le reste est inchangé



## Première itération (table=35 Euros)

- On a initialement  $VB = \{x_4, x_5, x_6, x_7\}$  On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits  $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$C_e^T = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ [-60 & -35 & -20] \end{matrix}$$

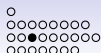
Donc  $x_1$  (le min) entre dans la base.

- $P = B^{-1} A_1 = [8 \ 4 \ 4 \ 0]^T$

- ratios :

$$\frac{\bar{b}}{P} = \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 6 & 5 & 4 & \infty \end{matrix}$$

donc  $x_5$  (le min dont  $P$  est positif) sort de la base.



## Deuxième itération (table à 35 Euros)

- On a maintenant  $VB = \{x_4, x_5, x_1, x_7\}$  On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0 \\ 1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits  $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$C_e^T = \begin{matrix} & x_2 & x_3 & x_6 \\ [ & 10 & -5 & 30 ] \end{matrix}$$

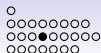
Donc  $x_3$  (le min) entre dans la base.

- $P = B^{-1} A_3 = [ -1 \quad 0.5 \quad 0.25 \quad 0 ]^T$

- ratios :

$$\frac{\bar{b}}{P} = \begin{matrix} & x_4 & x_5 & x_1 & x_7 \\ -16 & 8 & 16 & \infty \end{matrix}$$

donc  $x_5$  (le min dont  $P$  est positif) sort de la base.



## Troisième itération (tables à 35 Euros)

- On a maintenant  $VB = \{x_4, x_3, x_1, x_7\}$  On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 8 & 0 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits  $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$C_e^T = \begin{matrix} x_2 & x_5 & x_6 \\ [0 & 10 & 10] \end{matrix}$$

On a trouvé *un* optimum, mais  $x_2$  est à zéro. Ceci indique une solution non unique, car on peut faire entrer  $x_2$  dans la base à coût constant.

Donc  $x_2$  (le min) entre dans la base.



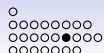
## Troisième itération, suite

- On poursuit le calcul normalement :
- $P = B^{-1}A_3 = [ -2 \quad -2 \quad 1.25 \quad 1 ]^T$
- ratios :

$$\frac{\bar{b}}{P} = \begin{array}{cccc} & x_4 & x_3 & x_1 & x_7 \\ & -12 & -4 & 1.6 & 5 \end{array}$$

donc  $x_1$  (le min dont  $P$  est positif) sort de la base.





## Quatrième itération (tables à 35 Euros)

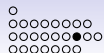
- On a maintenant  $VB = \{x_4, x_3, x_2, x_7\}$  On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 6 & 0 \\ 0 & 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 27.2 \\ 11.2 \\ 1.6 \\ 3.4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits  $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$C_e^T = \begin{matrix} x_1 & x_5 & x_6 \\ [0 & 10 & 10] \end{matrix}$$

On a trouvé *un* optimum, mais  $x_1$  est à zéro. Ceci indique une solution non unique, car on peut faire entrer  $x_1$  dans la base à coût constant.



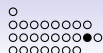
## Quatrième itération – suite et fin

Donc si on fait de nouveau entrer  $x_1$  (le min) entre dans la base.

- $P = B^{-1}A_3 = [ -2 \quad -2 \quad 1.25 \quad 1 ]^T$
- ratios :

$$\frac{\bar{b}}{P} = \begin{array}{cccc} & x_4 & x_3 & x_2 & x_7 \\ & 17 & 7 & 2 & -4.25 \end{array}$$

donc  $x_2$  (le min dont  $P$  est positif) sort de la base. On a découvert un cycle.



## Solution

- La solution est constituée des variables de base réalisables possibles. Ici

$$VB_1 = \{x_4, x_3, x_1, x_7\} VB_2 = \{x_4, x_3, x_2, x_7\}$$

et de toutes leurs combinaisons linéaires intermédiaires.

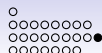
- Les valeurs de ces variables sont données par

$$\bar{b}_1 = \{24, 8, 2, 5\} \bar{b}_2 = \{27.2, 11.2, 1.6, 3.4\}$$

respectivement. Toutes les autres valeurs sont à 0.

- En ne comptant que les variables entrant dans le coût, les deux points optimaux extrêmes sont :

$$e_1 = \begin{bmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 8 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1.6 \\ x_3 = 11.2 \end{bmatrix}$$



## Solutions

- Toutes les solutions intermédiaires sont données par :

$$\begin{bmatrix} x_1 = 2c \\ x_2 = 1.6 - 1.6c \\ x_3 = 11.2 - 3.2c \end{bmatrix}$$

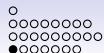
avec  $0 \leq c \leq 1$ .

- La fonction de coût vaut donc :

$$z = -60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = -280$$

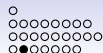
et elle est constante pour toutes ces solutions.

- Pour des problèmes plus complexes, on peut avoir plusieurs variables à zéro dans  $P$ , et non plus une seule. L'ensemble des solutions est alors l'espace vectoriel convexe induit par les solutions extrêmes. Pour les trouver il faut réaliser toutes les substitutions possibles autorisées.



## Solutions non bornées

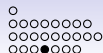
- Soit une boulangerie qui fabrique des petits pains ordinaires et des pains campagnards ;
- Les pains ordinaires se vendent pour 36 centimes et les pains campagnards 30 centimes ;
- Un pain ordinaire nécessite une dose de levure et 60g de farine, un pain campagnard une dose de levure et 50g de farine.
- La boulangerie possède pour le moment 5 doses de levure et 100g de farine.
- La levure coûte 3 centime la dose, et la farine 4 centimes les 10g.
- Maximisez le profit de la boulangerie.



## Formulation

- $x_1$  = nombre de pains ordinaires produits
- $x_2$  = nombre de pains campagnards produits
- $x_3$  = nombre de doses de levure
- $x_4$  = farine consommée par quantité de 10g.
- Revenus =  $36x_1 + 30x_2$ , coûts =  $3x_3 + 4x_4$ .
- Objectif =  $\max z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4$
- Contraintes 1 :  $x_1 + x_2 \leq 5 + x_3$
- Contraintes 2 :  $6x_1 + 5x_2 \leq 10 + x_4$





## Première itération

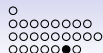
- $VB = \{x_5, x_6\}$  ;  $VHB = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- $\bar{b} = [ 5 \quad 10 ]$
- Coûts réduits =  $[ -36 \quad -30 \quad 3 \quad 4 ]$  on va donc faire rentrer  $x_1$ .
- $P = [ 1 \quad 6 ]$
- Ratios =  $[ 5 \quad 1.66667 ]$  on va donc faire sortir  $x_6$ .





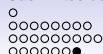
## Deuxième itération

- $VB = \{x_5, x_1\}$ ;  $VHB = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$
- $\bar{b} = [ 3.333 \quad 1.667 ]$
- Coûts réduits =  $[ 0 \quad 3 \quad -2 \quad 6 ]$  on va donc faire rentrer  $x_4$ .
- $P = [ 0.167 \quad -0.167 ]$
- Ratios =  $[ 20 \quad -10 ]$  on va donc faire sortir  $x_5$ .



## Troisième itération

- $VB = \{x_4, x_1\}$ ;  $VHB = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$
- $\bar{b} = [ 20 \quad 5 ]$
- Coûts réduits =  $[ 2 \quad -9 \quad 12 \quad 4 ]$  on va donc faire rentrer  $x_3$ .
- $P = [ 0.167 \quad -0.167 ]$
- Ratios =  $[ -6 \quad -1 ]$  La solution n'est pas bornée.



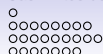
## Solution pour la boulangerie

- Avec la dernière solution de base réalisable, le système s'écrit :

$$x_4 - 6x_3 = 20$$

$$x_1 - x_3 = 5$$

Donc en augmentant  $x_3$  de façon arbitraire, on fait aussi croître  $x_4$  et  $x_1$  arbitrairement, et donc on peut réduire  $z$  sans fin, tout en obéissant à toutes les contraintes.



## Exemple d'un problème dégénéré

- Soit le problème suivant

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 \min & z = & -5x_1 & - & 2x_2 & & & & & & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & = 6 \\
 & & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & = 0
 \end{array}$$

- Le simplexe ne trouve pas l'optimum !
- Il faut détecter les cycles, ce qui n'est pas toujours facile
- Heureusement ce type de problème est rare en pratique.