Programmation linéaire – suite

Cas limites du simplexe

Hugues Talbot

Laboratoire A2SI

6 avril 2007

Plan

Application de l’algorithme du simplexe

- L’algorithme décrit ne fonctionne que pour une *minimisation* de z, pour maximiser z on doit minimiser $-z$.
- On doit trouver une base initiale réalisable. Ce n’est pas toujours évident.
- L’algorithme fournit une base réalisable et une valeur extrême d’une des variables. On doit trouver les autres en résolvant le système.
- On doit tenir compte des cas limites.

Solution optimale unique

- Une ébénisterie produit des bureaux, des tables et des chaises
- Chaque type de produit réclame du bois et deux types de travaux : mise en forme et finition, suivant le tableau :

Ressource	bureau	table	chaise
planches	8m	6m	1m
mise en forme	4h	2h	1.5h
finition	2h	1.5h	0.5h

- On dispose de 48m de planches, 20h de mise en forme et 8h de finition.
- On vend un bureau pour 60 Euros, une table pour 30 Euros et une chaise pour 20 Euros.
- La demande pour les chaises et les bureaux est illimitée, mais on ne pense vendre que 5 tables au plus.
- On veut maximiser le profit.

Formulation

- Variables : x_1 = nb. bureaux, x_2 = tables, x_3= chaises
- Objectif : $\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$
- Contraintes :

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 48 \\
4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & \leq & 20 \\
2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & \leq & 8 \\
 & & x_2 & & & \leq & 5
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forme standard

Toutes les inégalités sont des $\leq$, donc les variables d'écart sont positives.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcrr}
\min & z = & -60x_1 & - & 30x_2 & - & 20x_3 & & & & & & & & & \\
 & & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & & & = 48 \\
 & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & & & + & x_5 & & & & & = 20 \\
 & & 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & & & & & + & x_6 & & & = 8 \\
 & & & & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & = 5
\end{array}$$

Première itération

- Au départ :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -60 & -30 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Comme base initiale on choisit VB=$\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$ On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 8 & 6.0 & 1.0 \\ 4 & 2.0 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Première itération – échanges de variables

- Coûts réduits $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ C_e^T = & [\,\begin{array}{ccc} -60 & -30 & -20 \end{array}\,] \end{array}$$

  Donc x_1 (le min) entre dans la base.

- $P = B^{-1} A_1 = [\ 8 \quad 4 \quad 2 \quad 0\ ]^T$

- ratios :

$$\begin{array}{ccccc} & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \frac{\bar{b}}{P} = & 6 & 5 & 4 & \infty \end{array}$$

  donc x_6 (le min) sort de la base.

Deuxième itération

- On a maintenant VB=$\{x_4, x_5, x_1, x_7\}$ On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0 \\ 1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ C_e^T = & [\ 15 \quad -5 \quad 30\ ] \end{array}$$

  Donc x_3 (le min) entre dans la base.
- $P = B^{-1}A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}^T$
- ratios :

$$\begin{array}{ccccc} & x_4 & x_5 & x_1 & x_7 \\ \frac{\bar{b}}{P} = & -16 & 8 & 16 & \infty \end{array}$$

  donc x_5 (le min dont P est positif) sort de la base.

Troisième itération

- On a maintenant VB=$\{x_4, x_3, x_1, x_7\}$ On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 8 & 0 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$\begin{array}{ccc} x_2 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$C_e^T = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

On a trouvé l'optimum !

Solution

- La solution est constituée des variable de base réalisable. Ici
$$\text{VB}=\{x_4, x_3, x_1, x_7\}$$
- Les valeurs de ces variables sont données par
$$\bar{b} = \{24, 8, 2, 5\}$$
respectivement. Toutes les autres valeurs sont à 0.
- La fonction de coût vaut donc :
$$z = -60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = -280$$

Solution optimale multiple

- On prend le même problème, mais cette fois-ci on suppose qu’une table rapporte 35 Euros au lieu de 30.
- Le reste est inchangé

Première itération (table=35 Euros)

- On a initialement VB=$\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$ On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ C_e^T = & [\begin{array}{ccc} -60 & -35 & -20 \end{array}] \end{array}$$

  Donc x_1 (le min) entre dans la base.
- $P = B^{-1}A_1 = [\begin{array}{cccc} 8 & 4 & 4 & 0 \end{array}]^T$
- ratios :

$$\begin{array}{ccccc} & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \frac{\bar{b}}{P} = & 6 & 5 & 4 & \infty \end{array}$$

  donc x_5 (le min dont P est positif) sort de la base.

Deuxième itération (table à 35 Euros)

- On a maintenant VB=$\{x_4, x_5, x_1, x_7\}$ On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0 \\ 1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ C_e^T = & [\begin{array}{ccc} 10 & -5 & 30 \end{array}] \end{array}$$

Donc x_3 (le min) entre dans la base.

- $P = B^{-1} A_3 = [\ -1 \quad 0.5 \quad 0.25 \quad 0\ ]^T$
- ratios :

$$\begin{array}{ccccc} & x_4 & x_5 & x_1 & x_7 \\ \frac{\bar{b}}{P} = & -16 & 8 & 16 & \infty \end{array}$$

donc x_5 (le min dont P est positif) sort de la base.

Troisième itération (tables à 35 Euros)

- On a maintenant VB=$\{x_4, x_3, x_1, x_7\}$ On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 8 & 0 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_2 & x_5 & x_6 \end{array} \\ C_e^T = & \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

On a trouvé *un* optimum, mais x_2 est a zéro. Ceci indique une solution non unique, car on peut faire entrer x_2 dans la base à coût constant.

Donc x_2 (le min) entre dans la base.

Troisième itération, suite

- On poursuit le calcul normalement :
- $P = B^{-1}A_3 = [\ -2 \quad -2 \quad 1.25 \quad 1\ ]^T$
- ratios :

$$\begin{array}{ccccc} & x_4 & x_3 & x_1 & x_7 \\ \frac{\bar{b}}{P} = & \text{-12} & \text{-4} & 1.6 & 5 \end{array}$$

donc x_1 (le min dont P est positif) sort de la base.

Quatrième itération (tables à 35 Euros)

- On a maintenant VB=$\{x_4, x_3, x_2, x_7\}$ On a donc

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 6 & 0 \\ 0 & 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 27.2 \\ 11.2 \\ 1.6 \\ 3.4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coûts réduits $\bar{C}_e^T = C_e^T - C_b^T B^{-1} E$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_5 & x_6 \end{array} \\ C_e^T = & [\begin{array}{ccc} 0 & 10 & 10 \end{array}] \end{array}$$

On a trouvé *un* optimum, mais x_1 est a zéro. Ceci indique une solution non unique, car on peut faire entrer x_1 dans la base à coût constant.

Quatrième itération – suite et fin

Donc si on fait de nouveau entrer x_1 (le min) entre dans la base.

- $P = B^{-1}A_3 = [\ -2 \quad -2 \quad 1.25 \quad 1\ ]^T$
- ratios :

$$\begin{array}{ccccc} & x_4 & x_3 & x_2 & x_7 \\ \frac{\bar{b}}{P} = & 17 & 7 & 2 & \text{-}4.25 \end{array}$$

donc x_2 (le min dont P est positif) sort de la base. On a découvert un cycle.

Solution

- La solution est constituée des variables de base réalisables possibles. Ici

$$VB_1 = \{x_4, x_3, x_1, x_7\} VB_2 = \{x_4, x_3, x_2, x_7\}$$

  et de toutes leurs combinaisons linéaires intermédiaires.
- Les valeurs de ces variables sont données par

$$\bar{b}_1 = \{24, 8, 2, 5\} \bar{b}_2 = \{27.2, 11.2, 1.6, 3.4\}$$

  respectivement. Toutes les autres valeurs sont à 0.
- En ne comptant que les variables entrant dans le coût, les deux points optimaux extrêmes sont :

$$e_1 = \begin{bmatrix} x_1 = & 2 \\ x_2 = & 0 \\ x_3 = & 8 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 1.6 \\ x_3 = & 11.2 \end{bmatrix}$$

Solutions

- Toutes les solutions intermédiaires sont données par :

$$\begin{bmatrix} x_1 = & 2c \\ x_2 = & 1.6 - 1.6c \\ x_3 = & 11.2 - 3.2c \end{bmatrix}$$

  avec $0 \leq c \leq 1$.
- La fonction de coût vaut donc :

$$z = -60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = -280$$

  et elle est constante pour toutes ces solutions.
- Pour des problèmes plus complexes, on peut avoir plusieurs variables à zéro dans P, et non plus une seule. L'ensemble des solution est alors l'espace vectoriel convexe induit par les solutions extrêmes. Pour les trouver il faut réaliser toute les substitutions possibles autorisées.

Solutions non bornées

- Soit une boulangerie qui fabrique des petits pains ordinaires et des pains campagnards ;
- Les pains ordinaires se vendent pour 36 centimes et les pains campagnards 30 centimes ;
- Un pain ordinaire nécessite une dose de levure et 60g de farine, un pain campagnard une dose de levure et 50g de farine.
- La boulangerie possède pour le moment 5 doses de levure et 100g de farine.
- La levure coûte 3 centime la dose, et la farine 4 centimes les 10g.
- Maximisez le profit de la boulangerie.

Formulation

- x_1 = nombre de pains ordinaires produits
- x_2 = nombre de pains campagnards produits
- x_3 = nombre de doses de levure
- x_4 = farine consommée par quantité de 10g.
- Revenus = $36x_1 + 30x_2$, coûts = $3x_3 + 4x_4$.
- Objectif = $\max z = 36x_1 + 30x_2 - 3x3 - 4x_4$
- Contraintes 1 : $x_1 + x_2 \leq 5 + x_3$
- Contraintes 2 : $6x_1 + 5x_2 \leq 10 + x_4$

Forme standard

- On introduit 2 variables d'écart pour les contraintes, x_5, x_6 qui sont toutes deux positives.
- La forme standard est la suivante :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min \quad z = & -36x_1 & - & 30x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & & & & & & \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = 5 \\
 & 6x_1 & + & 5x_2 & & & - & x_4 & & & + & x_6 & = 10
\end{array}
$$

Première itération

- VB=$\{x_5, x_6\}$; VHB=$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- $\bar{b} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}$
- Coûts réduits = $\begin{bmatrix} -36 & -30 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ on va donc faire rentrer x_1.
- $P = \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$
- Ratios = $\begin{bmatrix} 5 & 1.66667 \end{bmatrix}$ on va donc faire sortir x_6.

Deuxième itération

- VB=$\{x_5, x_1\}$; VHB=$\{x_2, x_3, x_4, x_6\}$
- $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3.333 & 1.667 \end{bmatrix}$
- Coûts réduits = $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ on va donc faire rentrer x_4.
- $P = \begin{bmatrix} 0.167 & -0.167 \end{bmatrix}$
- Ratios = $\begin{bmatrix} 20 & -10 \end{bmatrix}$ on va donc faire sortir x_5.

Troisième itération

- VB=$\{x_4, x_1\}$; VHB=$\{x_2, x_3, x_5, x_6\}$
- $\bar{b} = \begin{bmatrix} 20 & 5 \end{bmatrix}$
- Coûts réduits = $\begin{bmatrix} 2 & -9 & 12 & 4 \end{bmatrix}$ on va donc faire rentrer x_3.
- $P = \begin{bmatrix} 0.167 & -0.167 \end{bmatrix}$
- Ratios = $\begin{bmatrix} -6 & -1 \end{bmatrix}$ La solution n'est pas bornée.

Solution pour la boulangerie

- Avec la dernière solution de base réalisable, le système s'écrit :

$$\begin{aligned} x_4 \quad -6x_3 &= 20 \\ x_1 \quad\;\; -x_3 &= 5 \end{aligned}$$

  Donc en augmentant x_3 de façon arbitraire, on fait aussi croître x_4 et x_1 arbitrairement, et donc on peut réduire z sans fin, tout en obéissant à toutes les contraintes.

Exemple d'un problème dégénéré

- Soit le problème suivant

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\min & z = & -5x_1 & - & 2x_2 & & & & & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 6 \\
 & & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = 0
\end{array}
$$

- Le simplexe ne trouve pas l'optimum !
- Il faut détecter les cycles, ce qui n'est pas toujours facile
- Heureusement ce type de problème est rare en pratique.