

Ordre de la construction et segmentations hiérarchiques

Jean Serra

Participation au colloque de l'ESIEE pour mes 70 ans

20 mars 2010

Summary 1 *Beaucoup de méthodes actuelles de segmentation d'image s'appuient sur des hiérarchies de transformées et visent à construire une partition optimale, au sens d'énergie minimale, qui emprunte ses classes aux divers niveaux. Pour pouvoir être efficaces, ces méthodes requièrent que l'énergie vérifie une certaine condition de croissance hiérarchique. Lorsque tel est le cas, les partitions optimales se calculent aisément, et forment un treillis complet, ce qui permet des choix pertinents entre les optimums. Quelques exemples sont développés*

Mais il apparaît aussi que ces méthodes génèrent de manière à peu près inévitable des petites classes qui perdurent même aux niveaux élevés des hiérarchies. L'ordre usuel sur les partitions, du raffinement, est probablement trop sévère. Lorsqu'on le remplace par celui dit de la construction, il devient possible de partager les petites classes parasites entre leurs voisines, de créer des semi-groupes hiérarchiques, et de combiner les partitions pour en trouver des valeurs médianes.

Summary 2 *Given a set E , the partitions of E are usually ordered by merging of classes. In segmentation procedures, this ordering often generates small parasite classes. A new ordering, called "grain building ordering", is proposed. It requires a connection over E and states that $A \preceq B$, with $A, B \subseteq E$, when each connected component of B contains a connected component of A . The grain building ordering extends to partitions, to tessellations, and to numerical functions.*

Thickenings ψ with respect to the grain building ordering are introduced as extensive idempotent operators that do not create connected components. The composition product $\psi\gamma$ of a connected opening by a thickening is still a thickening. Moreover, when $\{\gamma_i, i \in I\}$ is a granulometric family, then the two sequences $\{\psi\gamma_i, i \in I\}$ and $\{\gamma_i\psi, i \in I\}$ generate hierarchies, from which semi-groups can be derived. In addition, the approach allows us to combine any set of partitions or of tessellations into a synthetic one. A petrographic example is developed in detail.

The last part is devoted to hierarchies of partitions, on which all criteria are proved to be connective. Optimisations are addressed by minimizing energies that satisfy the condition of hierarchical increasingness. The optimal cuts through the hierarchies are found. It is shown that number of the classical techniques are variants of what is proposed.

1 Introduction

Quelques travaux comportant une part expérimentale substantielle gravitent autour de la théorie de la segmentation connective. Certains s'inscrivent explicitement dans sa filiation, certains autres la rejoignent, d'autres enfin l'anticipent. Voici six exemples récents, parmi d'autres, de ces études.

Dans [34], Ph. Salembier et L. Garrido cherchent à réduire des images en imagettes plus simples à consulter pour une base de données. Ils les segmentent selon des hiérarchies de zones plates, et recherchent un minimum de distorsion (mesuré en norme L_2) sous la contrainte d'un coût de codage des frontières. Une technique lagrangienne les conduit à des coupes optimales à travers les hiérarchies.

Dans [36] et [39], J. Serra et M. Mlynarczuk segmentent des lames minces de silicates dont une lumière polarisée d'orientation variable produit une séquences de 15 images spectrales par champ d'analyse. Chaque image du spectre est segmentée en zones plates. Les partitions qui en résultent sont ensuite érodées, et l'on somme les classes de ces partitions érodées pour toute la séquence spectrale. La segmentation finale est construite dans un deuxième temps par LPE de cette somme.

De [41] à [43], P. Soille et J. Grazzini se donnent une suite croissante de critères connectifs par zones α -plates, $1 \leq \alpha \leq n$, qui induit en chaque point x de l'espace la suite croissante $H_x(\alpha)$ des classes de segmentation contenant x . Il retiennent ensuite en chaque point la plus grande classe vérifiant une contrainte ω donnée¹.

Dans [27] et [28], G. Noyel, J. Angulo et D. Jeulin procèdent en sens inverse, c'est à dire du haut vers le bas, à propos d'images multi-spectrales. Ils partent d'un premier critère connectif (les zones λ -plates), utilisé pour obtenir une pré-segmentation en régions grossières, qui sont ensuite réduites par intersection d'un second critère, connectif lui aussi (la connexion par sauts, puis dans une deuxième expérience, des voisinages géodésiques lipschitziens). Le paramètre numérique dont dépend le second critère développe une hiérarchie dans chaque classe engendrée par le premier critère.

Dans [1] et [2], J. Angulo et J. Serra étudient des images colorées en représentation par luminance, saturation, teinte, qu'ils traitent séparément. Luminance et teinte donnent lieu à deux hiérarchies de segmentations par sauts, et la saturation à une simplification par zones plates. Pour obtenir le résultat final, ils retiennent dans un deuxième temps la segmentation de la teinte quand la saturation est élevée, et celle de la luminance quand la saturation est basse.

Dans [23], F. Meyer et L. Najman étudient spécifiquement les segmentations par lignes de partage des eaux, qu'ils combinent avec des inondations, c'est à dire avec des extensions de marqueurs qui en préservent la connexité [12]. Cela les conduit à des hiérarchies de

¹Une discussion sur les zones α -plates de [41], aussi appelées zones quasi-plates, ou encore zones λ -plates dans [27] est reportée en annexe II.

segmentations caractérisées par leurs cartes de saillance, et qui servent principalement à raffiner des segmentations en fonction du degré d'intérêt de leurs régions.

Il convient d'ajouter une septième à ces six études (sept, comme il se doit, aurait dit Matheron), un peu à part parce qu'elle ne s'inscrit pas du tout dans l'optique morphologique. Mais elle pose, et résoud, le problème de l'optimisation des coupes d'une hiérarchie, en se plaçant dans un cadre plus général que celui de [34], et sensiblement différent de celui de [2], [27], [41] et [23]. Il s'agit de la thèse de L. Guigues, [18], ainsi que de sa publication avec J.P. Cocquerez et H. Le Men [17]. Nous ferons appel aux idées de Guigues au moment d'établir une synthèse entre toutes ces démarches.

1.1 Optimum optimorum

Ces six travaux utilisent la segmentation connective pour des fonctions le plus souvent vectorielles. Tous ont par ailleurs recours à des démarches qui *étagent* les segmentations, c'est à dire où les partitions obtenues par une première vague de traitements servent de socle à une seconde étape, suivie parfois d'une troisième. Il y a plusieurs raisons à cela. Tout d'abord, les connexions qu'ils utilisent, comme les zones λ -plates, ou les sauts d'amplitude λ , dépendent d'un paramètre positif qui lorsqu'il augmente, risque de faire brutalement passer d'une sur-segmentation à une sous-segmentation de l'image, l'une et l'autre trop importantes. La variation de cet unique paramètre ne suffit pas toujours à situer la segmentation au bon niveau, et c'est pourquoi ces auteurs recherchent un second critère de variation. Ils partent alors soit d'une sur-segmentation qu'ils recomposent [3], [41], soit au contraire d'une première segmentation en classes très larges, qu'ils affinent ensuite [27]. Dans d'autres études, la démarche étagée apparaît comme une conséquence de la structure multi-dimensionnelle des données [36], [2]. Chaque composante vectorielle, chaque canal, a été segmenté pour son propre compte, et l'on cherche dans un second temps à combiner les partitions obtenues en une seule, syntétique.

Il reste à savoir ce que signifie cet optimum optimorum. La démarche de P. Soille conduit bien à une partition unique, mais en quel sens peut-on la qualifier d'optimale? Il reste à savoir aussi quel optimum affecter à une hiérarchie parcourue à la fois dans les deux sens opposés, comme dans [2], etc... Cette question fait l'objet de la section 3. Mais il est un autre aspect commun aux six travaux cités, et que nous souhaitons aborder au préalable. Il s'agit des petites classes parasites (section 2).

1.2 Les petites classes parasites

Quels que soient en effet leurs traits spécifiques, ces démarches donnent régulièrement naissance à des classes parasites. Elles créent quelques classes assez larges et représentatives, entourées d'une multitude de petites autres, comme des perles de rosée aux bords d'une feuille (cf. la figure 1 ci-après, ou 11b, plus loin par exemple). Le problème est certes récurrent en traitement d'images et des auteurs comme Ph. Salembier et Al. [33] ou J. Crespo et Al. [15], pour ne citer qu'eux, ont déjà proposé des solutions par fusion de zones plates adjacentes vérifiant certains critères, et aussi certaines contraintes, comme par exemple ne



Figure 1: Segmentations par zones quasi-plates de pentes λ croissantes; quand λ augmente, les détails du visage disparaissent, mais les grains parasites restent (extrait de Noyel et Al. [27]).

pas sous-diviser les zones petites. Dans [43], on réduit cette même difficulté en imposant la présence d'au moins un extremum de la fonction dans la zone segmentée. Dans [2] et [39], le filtrage des petites régions est réalisé par érosions de partitions.

Si je devais critiquer la théorie de la segmentation connective (Dieu m'en garde!), je dirais que les petites classes parasites lui sont inhérentes. Au même titre que les plus grandes, elles vérifient le critère que l'on s'est donné, et si, par intersection de contraintes, on les détruit, elles se transforment en singletons, ou sont absorbées par l'arrière plan, ce qui déplace le problème sans le résoudre. Car que faire ensuite de cet arrière plan, ou de ces singletons non classés? La solution préconisée dès le premier exemple du premier texte sur la segmentation connective a consisté à prendre le squelette par zones d'influence des grandes classes (figures 11 et 12 dans [37]). Indépendamment, les auteurs ci-dessus ont souvent fait la même chose, mais de façon discrète et comme en passant, pour ne pas trop attirer l'attention sur ce qui ressemble à de la cuisine, après les beaux théorèmes et les algorithmes puissants. Et si nous y jetions un oeil, dans cette cuisine? Qui sait, peut-être réserve-t-elle de bonnes surprises?

2 Ordre de la construction et opérations associées

L'élimination, parfois difficile, des petites classes renvoie à une question plus vaste: que modélise l'ordre usuel sur les partitions? Selon lui, on passe d'une partition à une plus grande en fusionnant des classes uniquement, donc en supprimant des frontières, mais sans en déplacer. Cela conduit vite à des situations ambiguës, dont la figure 2 est le paradigme. Doit-on introduire un choix sur l'arête à supprimer, dans une démarche par ailleurs déterministe?

Lorsque les gens sont bien tassés dans le métro et qu'une personne en sort, est-ce que brusquement l'un de ses voisins se met à gonfler et à accaparer tout le vide pour lui tout seul? A la fin d'une guerre, est-ce que vainqueurs et vaincus s'imposent comme règle absolue de ne surtout pas déplacer de frontières? On aimerait bien, pour la figure 2 aussi, renoncer à l'oukase de l'ordre par raffinement sur les partitions et couper la poire en deux. Il suffirait de

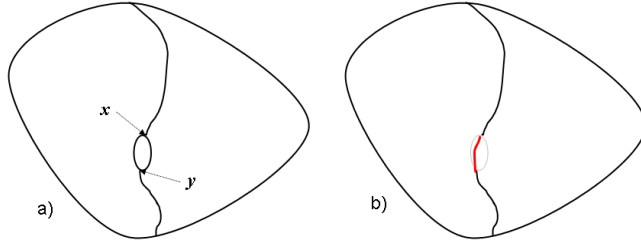


Figure 2: L'ordre usuel sur les partitions ne peut supprimer la petite classe, dans a), qu'en la regroupant avec une des deux grandes. Quel ordre pourrait plutôt la répartir entre les deux autres classes, comme dans b)?

tracer n'importe quel arc simple allant de a à b dans la petite classe, et répartir son partage entre les deux grandes classes. Si l'on procède ainsi, alors chaque classe de la partition finale en contient au moins une classe de l'initiale. Et c'est exactement cette propriété que nous allons maintenant ériger en axiome.

2.1 Ordre de la construction

Etant donné un ensemble E , considérons le treillis $\mathcal{P}(E)$ de ses parties, que nous dotons d'une connexion \mathcal{C}^* , dite standard parce qu'elle joue un rôle de toile de fond dans ce qui suit. A la différence de l'inclusion, où $A \subseteq B$ signifie que tout *point* de A appartient à B , la relation d'ordre que nous allons introduire portera ici sur les \mathcal{C}^* -composantes de $\mathcal{P}(E)$, d'où la dénomination générique d'ordre connexe.

Précisons quelques notations. L'image de $\mathcal{P}(E)$ par l'opération ψ s'écrit \mathcal{P}_ψ

$$\mathcal{P}_\psi = \{\psi(X), X \in \mathcal{P}(E)\}.$$

Pour éviter toute confusion avec les diverses ouvertures qui vont intervenir, on note $\dot{A}(x)$, ou encore \dot{A}_x , la \mathcal{C}^* -composante de A au point x (au lieu de $\gamma_x(A)$). Lorsqu'il n'est pas nécessaire d'étiquetter les composantes connexes de A , on écrit simplement \dot{A} (avec $\dot{A} \subseteq A$). Quand le contexte n'est pas ambigu, on remplace l'expression " \mathcal{C}^* -composante connexe" par "composante", ou "grain", et "ouverture \mathcal{C}^* -connexe" par "ouverture connexe". Par ailleurs, nous conservons le même symbole \subseteq pour désigner l'inclusion des ensembles et aussi la relation d'ordre qu'elle induit entre opérateurs (i.e. $\gamma \subseteq \gamma'$ ssi $\gamma(A) \subseteq \gamma'(A)$ pour tout $A \subseteq E$).

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ de composantes connexes \dot{A}_i . Toute opération sur A qui supprime certains \dot{A}_i et laisse inchangés les autres au regard d'un critère binaire croissant, et qui ne met en jeu que le grain lui-même, se nomme opérateur de grain anti-extensif au sens de H. Heijmans [19]. Quand l'opérateur de grain γ est idempotent, on parle d'ouverture connexe. Il s'agit souvent d'un seuil sur la surface des grains, ou sur le rayon de leur cercle inscrit, voire d'un attribut exogène.

On nomme épaissement toute opération ψ sur $\mathcal{P}(E)$, extensive et idempotente. On impose parfois aux épaissements de préserver l'homotopie, c'est à dire les relations d'inclusion entre grains et pores. Ci-dessous, on demandera plus simplement à $\psi(A)$ de ne pas créer de composantes connexes.

Lorsqu'on s'est donné la connexion \mathcal{C}^* , ni les opérateurs de grains, ni les ouvertures connexes, ni les épaissements ne font intervenir la structure de treillis de $\mathcal{P}(E)$, mais uniquement sa relation d'ordre. Ces trois notions peuvent donc être définies pour tout autre ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$.

Proposition 3 *Lorsque $\mathcal{P}(E)$ est muni de la connexion \mathcal{C}^* , la relation*

$$A \preceq B \text{ ssi tout } \dot{B} \subseteq B \text{ contient au moins un } \dot{A} \subseteq A \quad (1)$$

définit sur $\mathcal{P}(E)$ un ordre \mathcal{C}^ -connexe, dit ordre de la construction².*

Proof. Le réflexivité est manifestement compatible avec la condition sur les composantes connexes. Pour prouver l'anti-symétrie, décomposons B en ses J composantes \mathcal{C}^* -connexes, soit $B = \cup\{\dot{B}(x_j), j \in J\}$. Dire que $A \preceq B$ revient à dire qu'on peut trouver une famille $\{x_j, j \in J\}$ où chaque x_j appartient à un $\dot{A}(x_j) \neq \emptyset$. L'ensemble A se décompose alors en $A = [\cup\dot{A}(x_j)] \cup [\dot{A}_k]$, où les \dot{A}_k sont les autres composantes connexes de A . Quand on a aussi $B \preceq A$, chaque $\dot{A}(x_j)$ doit contenir un \dot{B} , ce qui entraîne que $\dot{A}(x_j) = \dot{B}(x_j)$ et que $\cup[\dot{A}_k] = \emptyset$, d'où $A = B$. Enfin, la transitivité $A \preceq B \preceq C$ découle de ce que tout $\dot{C} \subseteq C$ contient au moins un $\dot{B} \subseteq B$ qui contient à son tour au moins un $\dot{A} \subseteq A$. ■

Par exemple, un \subseteq -épaissement ψ qui ne crée pas de composantes connexes est non seulement \subseteq -extensif, mais aussi \preceq -extensif, et comme son idempotence est indépendante de l'ordre, cela en fait un \preceq -épaissement. Il en va de même de toute ouverture connexe γ . On a en effet $\gamma(A) \succeq A$, puisque toute \mathcal{C}^* -composante de $\gamma(A)$ contient une \mathcal{C}^* -composante de A , à savoir elle-même. On notera que $\gamma(A)$ et A s'ordonnent en sens inverse que pour l'inclusion. Autre point remarquable: l'axiome de la réunion conditionnelle, caractéristique des connexions, n'intervient pas dans la proposition 3. N'importe quelle opération partitionnant les ensembles de E fait aussi bien l'affaire³. L'intérêt de prendre une connexion vient de ce qu'elle donne accès aux épaissements qui vont suivre.

Toute relation d'ordre ensembliste s'étend aux partitions en passant par l'intermédiaire de leurs classes. Dans le cas présent, cette remarque conduit au corollaire suivant:

Corollary 4 *La propriété ensembliste (1) engendre un ordre sur l'espace \mathcal{D} des partitions de E à classes \mathcal{C}^* -connexes, où $D_1 \preceq D_2$, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, quand chaque classe de D_2 contient au moins une classe de D_1 .*

²On traduit en anglais par "grain building ordering", et $A \preceq B$ se dit "A builds B", ou "B is built by A", puisque les grains de A reconstruisent B .

³Ch. Ronse étudie actuellement des méthodes plus générales pour construire des relations d'ordre sur des ensembles via des partitions.

Manifestement, l'ordre de la construction ne préserve ni l'inclusion ni la connexion \mathcal{C}^* , puisque quand $A \preceq B$ certaines \mathcal{C}^* -composantes de l'ensemble le plus petit, A , peuvent se trouver partiellement, voire complètement à l'extérieur de B , comme le montre la figure 3. L'ordre de la construction n'est donc pas comparable à celui de l'inclusion. En revanche, pour les partitions l'ordre usuel \leq , par raffinement, est plus restrictif que lui:

$$D_1 \leq D_2 \quad \Rightarrow \quad D_1 \preceq D_2, \quad D_1, D_2 \in \mathcal{D}. \quad (2)$$

Comment étendre l'ordre de la construction aux fonctions numériques? Lorsqu'il s'agit de l'inclusion, on procède habituellement

- soit en se plaçant en chaque point x de E , et en comparant les deux nombres $f(x)$ et $g(x)$, puis en posant

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in E,$$

i.e. en élevant le treillis $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\bar{\mathbb{Z}}$ à la puissance E ,

- soit en comparant chaque section $X_f(t) = \{x : x \in E, f(x) \geq t\}$, au $X_g(t)$ analogue, puis en posant

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad X_f(t) \subseteq X_g(t), \quad \forall t \in \bar{\mathbb{R}}$$

et c'est cette fois E qui est élevé à la puissance $\bar{\mathbb{R}}$ (ou $\bar{\mathbb{Z}}$).

Les deux procédés sont équivalents. En revanche, quand on passe à l'ordre de la construction, la première méthode ne signifie pas grand'chose, parce qu'elle repose sur des comparaisons ponctuelles, alors que la seconde se transpose. Elle génère l'ordre sur E^T où $T = \bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathbb{Z}}$, ou n'importe quel ensemble, ordonné ou pas. Si l'on pose $\mathcal{X} = \{X_t, t \in T\}$, et $\mathcal{Y} = \{Y_t, t \in T\}$, il vient

$$\mathcal{X} \preceq \mathcal{Y} \quad \Leftrightarrow \quad X_t \subseteq Y_t, \quad \forall t \in T.$$

La figure 4 illustre cette situation à propos de deux fonctions numériques

L'ordre de la construction n'engendre pas de treillis ensembliste: si \dot{A}_1 et \dot{A}_2 sont deux composantes de A , chacun des deux ensembles $\dot{A}_1 = A_1$ et $\dot{A}_2 = A_2$ majore A , sans qu'il existe toutefois un majorant de A plus petit que A_1 et A_2 . Cela n'empêche pas de contruire des opérations croissantes. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{Z}^2 , l'addition de Minkowski est une opération \preceq -croissante (mais pas une dilatation, évidemment) ainsi que la fermeture associée, alors que l'érosion ni l'ouverture ne sont \preceq -croissantes ...

Par dualité vis à vis du complément, la relation (1) induit la suivante:

$$A \preceq B \text{ ssi tout } (\dot{B}^c) \subseteq B^c \text{ contient au moins un } (\dot{A}^c) \subseteq A^c. \quad (3)$$

qui est encore une relation d'ordre, puisque A et B sont égaux ssi leurs complémentaires le sont. Les deux relations (1) et (3) ne sont ni équivalentes, ni incompatibles, mais leur intersection logique définit un troisième ordre, de type homotopique cette fois, en ce sens qu'il symétrise les rôles des grains et des pores.

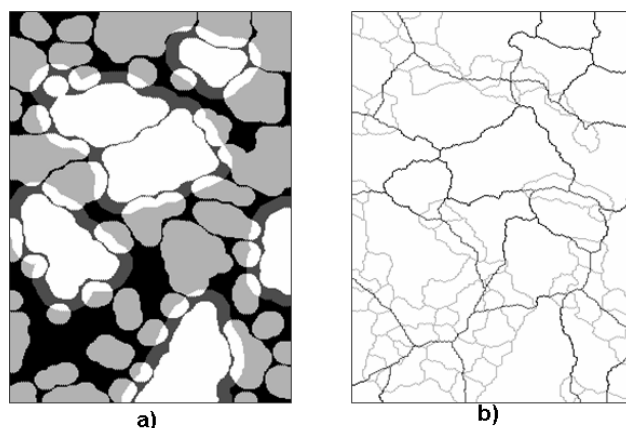


Figure 3: Ordre de la construction: a) pour des ensembles: les grains en blanc dilatés forment l'ensemble le plus grand ; b) pour des partitions: en gris foncé, la partition la plus grande.

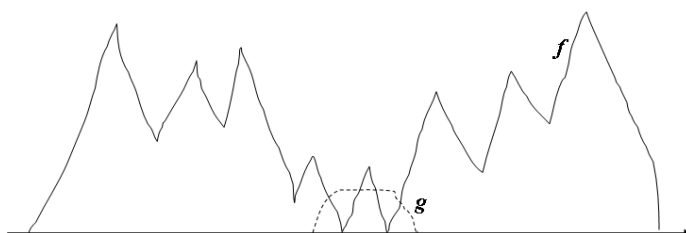


Figure 4: Ordre de la construction pour les fonctions numériques. Le lecteur aura remarqué que c'est la fonction g , en pointillés, qui est la plus grande.

Il ne fait aucun doute que l'ordre de la construction régit les variations de certains phénomènes physiques, biologiques, et même sociologiques. Pour les premiers, il suffit de penser à l'évolution d'un métal sous l'action de la fatigue, c'est à dire à un assemblage de monocristaux qui se réorganise. On observe une évolution semblable quand les bulles de savon liquide dans une bouteille se regroupent. Et pour ce qui est des actions humaines, il suffit de comparer les deux cartes de la figure 5.

2.2 Autres ordres connexes

L'ordre de la construction suggère une forme duale où A est plus petit que B quand tout \dot{A} de A est inclus dans un \dot{B} de B . Mais on voit vite que cette condition nous ramène à l'ordre de l'inclusion.... Il est toutefois facile d'imaginer plusieurs ordres de type \mathcal{C}^* -connexe sur $\mathcal{P}(E)$. Indiquons en quelques uns, qui, à la différence du précédent, sont greffés sur l'inclusion. Par exemple, dire que $A \subseteq B$, et A a moins de \mathcal{C}^* -composantes que B définit déjà un ordre. Et si l'on remplace "moins" par "plus" dans la phrase précédente, on crée à nouveau un ordre. On peut aussi dire que A est plus petit que B ssi $A \subseteq B$, et qu'il y a une bijection entre leurs

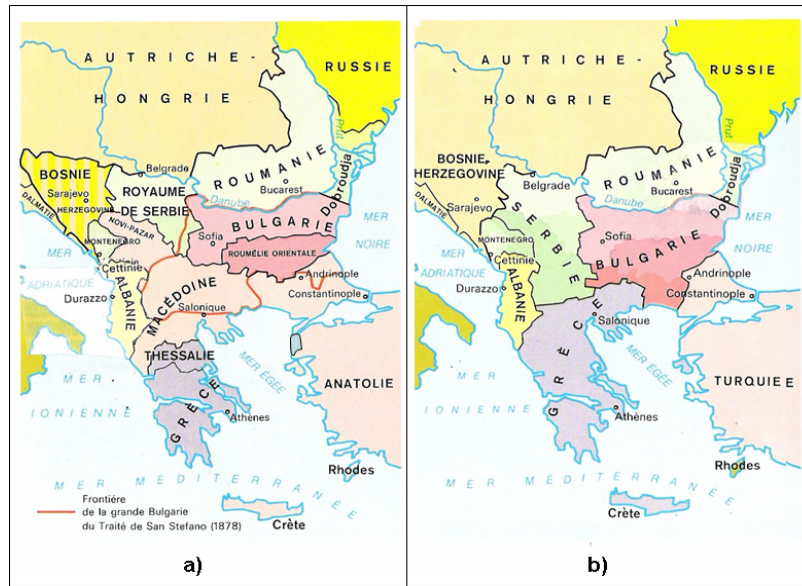


Figure 5: Démembrement de l’empire ottoman, d’après *Histoire de l’Europe* dans l’encyclopédie Bordas: a) 1878, congrès de Berlin; b) 1913, traité de Bucarest. On a deux partitions avec $b) \supsetneq a)$, mais pas $b) \supseteq a)$.

composantes connexes. Voici encore une quatrième possibilité:

Proposition 5 Lorsque $\mathcal{P}(E)$ est muni de la connexion \mathcal{C}^* , la relation

$$A \sqsubseteq B \text{ ssi } A \subseteq B \text{ et tout } \dot{B} \subseteq B \text{ contient au plus un } \dot{A} \subseteq A$$

est une relation d’ordre.

Proof. Le réflexivité et l’anti-symétrie sont compatibles avec la condition sur les composantes connexes. La transitivité $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C$ découle de ce que tout $\dot{C} \subseteq C$ contient au plus un $\dot{B} \subseteq B$ qui contient à son tour au plus un $\dot{A} \subseteq A$. ■

Ces divers ordres connexes s’étendent tous aux fonctions numériques via leurs sections. Chacun d’eux admet aussi une version symétrisée par rapport au complément, de type homotopique. Toutefois, quand on cherche à les appliquer à l’espace \mathcal{D} des partitions, le respect de l’inclusion \subseteq oblige les classes à ne pas se chevaucher, et l’on est ramené à l’ordre usuel par raffinement. C’est cette raison qui nous a fait privilégier l’ordre de la construction défini par la relation (1).

2.3 Épaississements relatifs à l'ordre \preceq de la construction

2.3.1 \preceq -épaississements à base d'ouvertures connexes

Nous nous proposons maintenant de construire des opérations qui simplifient les ensembles et les partitions, en en triant d'abord certaines régions majeures, que dans un second temps on étend à travers l'espace. La phase du choix sera commandée par une ouverture, et celle de l'expansion par un épaississement. Le cas le plus simple, et le plus achevé aussi, s'obtient quand l'ouverture est \mathcal{C}^* -connexe:

Proposition 6 *Etant donnée une connexion \mathcal{C}^* sur $\mathcal{P}(E)$, soit $\gamma : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ un \subseteq -opérateur de grains anti-extensif, et $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ un \subseteq -épaississement qui ne crée pas de composantes connexes. Le produit de composition $\psi\gamma$ est alors un épaississement pour l'ordre de la construction, et*

$$I \preceq \psi\gamma = \gamma\psi\gamma = (\psi\gamma)^2. \quad (4)$$

Le produit $\gamma\psi$ se comporte, au facteur ψ près, comme un épaississement pour lequel on a

$$I \preceq \psi\gamma\psi = \gamma\psi\gamma\psi = (\gamma\psi)^n \quad n > 1. \quad (5)$$

Proof. Considérons le produit $\psi\gamma(A)$, $A \in \mathcal{P}(E)$. Nous avons vu que l'ouverture γ est \preceq -extensive. Il en va de même de ψ , puisqu'il est \subseteq -extensif et ne crée pas de composante connexe. Le produit $\psi\gamma$ est donc \preceq -extensif. De plus, les composantes de $\psi\gamma(A)$ étant \supseteq à celles de $\gamma(A)$ pour tout A , la \subseteq -croissance de γ entraîne que γ ne peut plus supprimer de grains à $\psi\gamma$ donc $\gamma\psi\gamma = \psi\gamma$, puis par idempotence de ψ ,

$$\psi\gamma\psi\gamma = \psi\gamma. \quad (6)$$

Le produit $\psi\gamma$ est donc un épaississement pour l'ordre \preceq . Quant au produit $\gamma\psi$, \preceq -extensif lui aussi, n'est pas directement idempotent, car $\psi \subseteq \psi\gamma\psi$, mais l'ouverture suivante crée l'égalité, puisque les composantes $\psi\gamma\psi(A)$ se maintiennent toutes sous l'action de γ , d'où la relation (5). ■

Dans la suite du texte, les opérateurs de grains de la proposition seront toujours des ouvertures connexes. Par ailleurs, on notera que la proposition ne nous informe pas sur l'épaisseur des espaces entre composantes connexes dans $\psi\gamma$ et $\gamma\psi$.

Extension aux partitions La proposition 6 se formule également dans le langage des partitions de E en classes connexes. Soit \mathcal{D} l'ensemble de ces dernières, $D \in \mathcal{D}$ et D_x la classe de D au point x . L'ouverture connexe ensembliste γ induit sur \mathcal{D} l'opération $\gamma_{\mathcal{D}}$ suivante

$$\begin{aligned} D_x[\gamma_{\mathcal{D}}(D)] &= \gamma(D_x) = D_x \quad \text{si} \quad \gamma(D_x) \neq \emptyset \\ D_x[\gamma_{\mathcal{D}}(D)] &= \{x\} \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Il s'agit manifestement d'une ouverture relativement à l'ordre usuel sur \mathcal{D} . Par conséquent on étend la proposition 6 aux partitions en remplaçant l'ouverture $\gamma : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par $\gamma_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}(E) \rightarrow \mathcal{D}(E)$, et l'épaississement $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par $\psi : \mathcal{D}(E) \rightarrow \mathcal{D}(E)$.

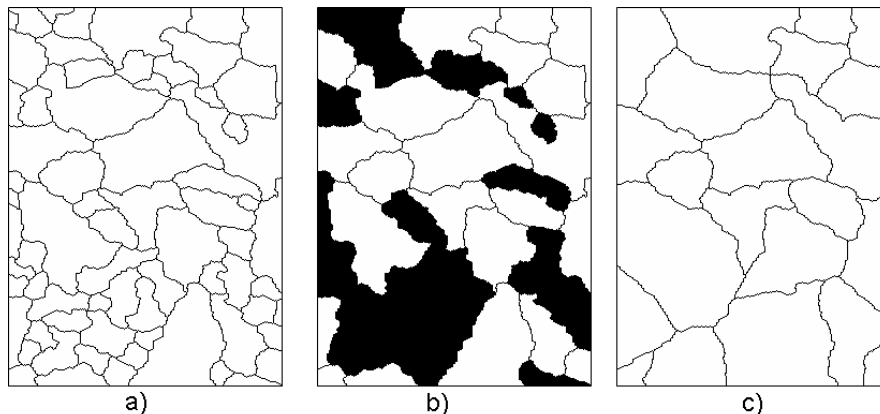


Figure 6: a) Tessellation initiale A , b) ouverture $\gamma(A)$ qui supprime les petits grains selon leur cercle inscrit (ici de rayon ≥ 15) sans toucher aux autres; c) épaissement $\psi\gamma(A)$, qui est identique à son ouvert $\gamma\psi\gamma(A)$.

L'exemple pétrographique qui sert de fil conducteur à la section 2.5.3 ci-dessous porte sur des partitions. Les 15 images d'entrée ont en effet été segmentées par zones plates, et deux d'entre elles sont présentées en figure ?? un peu plus loin. Mais cet exemple montre aussi qu'on bascule très vite vers un traitement ensembliste, en érodant les partitions et en se focalisant sur les classes non ponctuelles. Et les étapes suivantes, qui mettent en jeu des épaissements de Voronoï, nous orientent vers une classe d'ensembles très particulière: les tessellations.

2.3.2 Tessellations, partitions et épaissements de Voronoï

Tesselations Les partitions initiales qu'on peut voir en figure 6 et dans les suivantes comprennent une famille de classes simplement connexes, en blanc, séparées par une ligne noire, connexe elle aussi, et qui se décompose en union d'arcs simples. Pour distinguer ce type de partition de celles où les classes blanches sont placées bord à bord, sans la composante filiforme noire, R. Miles a introduit dans les années 70 le terme anglais de "tessellation"⁴. Miles étudiait les tessellations du plan par des droites de Poisson, et plus généralement de \mathbb{R}^n par des variétés poissonniennes de dimension $n - 1$. A sa suite, et en nous limitant ici à deux dimensions, nous posons la définition suivante:

Definition 7 Soit \mathcal{C}^* la connexion par arcs de \mathbb{R}^2 . On appelle tessellation tout ensemble de \mathbb{R}^2 dont toutes les \mathcal{C}^* -composantes sauf une sont des ouverts, la dernière étant réunion localement finie et en boucles fermées d'arcs simples.

De même, ayant choisi pour \mathcal{C}^* une connexion par arcs de \mathbb{Z}^2 , on appelle tessellation de \mathbb{Z}^2 tout ensemble dont toutes les \mathcal{C}^* -composantes sauf une sont connexes, la dernière étant

⁴Tessellation n'existe pas en français, et se traduit par mosaïque. En revanche "tesselle", la pièce élémentaire d'une mosaïque, existe en français, mais pas en anglais (du moins selon MMs Robert et Collins).

formée de contours.

Les arcs simples et les contours sont appelés *clivages*⁵, les autres *tesselles*.

Lorsque la classe des clivages est connexe, les tesselles sont simplement connexes.

Épaississements de Voronoï dans \mathbb{R}^2 Dans une tessellation euclidienne, on peut toujours appréhender la famille des classes ouvertes comme un ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$: la tessellation, *ersatz* de partition, se manipule comme un ensemble. Les épaississements de Voronoï dans \mathbb{R}^2 illustrent bien cette façon de procéder. On part de la famille \mathcal{G}_0 des réunions localement finies d'ouverts connexes et disjoints. Soit $A = \cup \dot{A}_k \in \mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Appelons *zone d'influence de \dot{A}_k* l'ensemble des points plus proches de \dot{A}_k que de tout autre $\dot{A}_p \in A, p \neq k$, et *Voronoï de A* la réunion $\psi(A)$ de ces zones d'influence. On sait d'après les travaux classiques de Ch.Lantuejoul, que le complémentaire $[\psi(A)]^c$ est réunion localement finie d'arcs simples. C'est un squelette, dit par zones d'influence. Par conséquent, $\psi(A)$ étend les C^* -composantes de A sans les fusionner, et tout ensemble $B \supset \psi(A)$ relie obligatoirement certaines C^* -composantes de $\psi(A)$. L'opérateur ψ est donc un \subseteq -épaississement sur \mathcal{G}_0 qui ne crée pas de composantes connexes. D'autre part, toute ouverture connexe sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ applique \mathcal{G}_0 dans lui-même. Il en résulte la proposition classique suivante:

Proposition 8 *L'opérateur $\psi : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_0$ des zones d'influences de Voronoï est un épaississement conduisant une tessellation.*

On peut donc le faire précéder d'une ouverture connexe et appliquer la relation 4. La figure 6 illustre les deux étapes de ce processus vers l'idempotence lorsque γ est l'ouverture par reconstruction d'une érosion circulaire et ψ le complément du squelette par zones d'influence. Les clivages du Voronoï $\psi(A)$ ne se contentent pas d'être fins, ils sont aussi équidistants de tesselles de A . Quand le domaine d'étude est compact, cela signifie que la distance de Hausdorff ρ entre A et $\psi(A)$ est la plus petite possible, i.e. la distance ρ' à A de toute autre tessellation $\psi' \succcurlyeq A$ est $\geq \rho$.

Bien que l'épaississement ψ par zones d'influences ne soit pas \preccurlyeq -croissant en général, on peut se trouver dans des circonstances particulières où tout se passe comme s'il l'était. C'est ce qui se produit lorsque A et A' sont deux ensembles de \mathcal{G}_0 , avec $A' = A \cup B$, les C^* -composantes de B étant disjointes de celles de A . En effet:

Proposition 9 *Soient $A, A' \in \mathcal{G}_0$, avec $A' = A \cup B$, et $B \cap A = \emptyset$. L'épaississement de Voronoï est alors \preccurlyeq -croissant dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ et l'on a*

$$\{A' = A \cup B, B \cap A = \emptyset\} \Rightarrow \{A' \preccurlyeq A \Rightarrow \psi(A') \preccurlyeq \psi(A)\}. \quad (7)$$

Proof. Toute composante connexe de A se contient elle-même, vue en tant que composante de A' , d'où $A' \preccurlyeq A$. Soit \dot{A}_k une composante commune à A et à A' . Si le point

⁵Le terme de clivage a été introduit par J. Cousty dans sa thèse et les publications afférentes, en association avec la notion de saillance [10], [13].

$x \in \mathbb{R}^2$ est plus proche de A_k que de toutes les autres C^* -composantes de A' , alors il est aussi plus proche de A_k que de toutes les autres C^* -composantes de A , puisqu'il y en a en moins. Donc la zone d'influence de A_k est plus grande dans le Voronoï de A que dans celui de A' . Comme ψ ne crée pas de composantes connexes, on obtient finalement $\psi(A') \preceq \psi(A)$. ■

Épaississements de Voronoï dans \mathbb{Z}^2 La démarche précédente ne se transpose pas directement à \mathbb{Z}^2 , car les distances digitales ne garantissent plus la connexité des germes qui s'épaississent. L'on doit, pour s'assurer de cette dernière, procéder par séquences d'opérations élémentaires qui la préservent à chaque étape, en prenant pour modèle les épaississements homotopiques (ch. XI-E in [35]) et les watersheds topologiques de G. Bertrand [5], dans une version binaire. Ils laissent une grande marge de liberté dans la succession des opérations élémentaires, qu'on peut mettre à profit pour construire des clivages finaux à peu près équidistants des germes initiaux.

On se donne un élément structurant L qui fait passer le point x du fond à la forme sous réserve qu'il ne modifie pas la connexité, ou encore qu'il est destructible. L'épaississement élémentaire consiste à parcourir \mathbb{Z}^2 et rajouter séquentiellement à A tous les points destructibles rencontrés. Le graphe induit par \mathbb{Z}^2 est supposé doté d'une rotation (trames carrée, hexagonale) d'angle minimum α , dont on fait tourner L , et l'on reprend une passe d'épaississement élémentaire avec L_α , puis $L_{2\alpha}$, etc. jusqu'à l'idempotence. Une deuxième séquence d'opération est alors nécessaire pour ébarbuler les clivages, ce qui les réduit à des boucles d'arcs simples, qu'on appelle classiquement squelette digital par zones d'influence. Il s'agit de watersheds topologiques, binaires, et construits sur le groupe des rotations discrètes du graphe de \mathbb{Z}^2 , qui exprime l'équidistance à sa façon. Pour ne pas compliquer la terminologie, nous conservons le terme usuel de "Voronoi" pour les bassins versants de ces watersheds topologiques particuliers.

L'expérience montre que quand on insère \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{R}^2 , les Voronoï digitaux approximent bien leurs homologues euclidiens. Avec quelques bémols cependant. Ils dépendent du choix de la première orientation de S , ainsi que du sens des rotations. De plus, ils ne garantissent pas l'épaisseur unité pour les clivages finaux. Sur le plan théorique, cela n'est pas gênant pour les propriétés établies ici, et en pratique les clivages épais sont rares. L'étude pétrographique de la section 2.5.3, par exemple, a porté sur 60 images digitales en graphe hexagonal, pour lesquelles on a utilisé l'élément structurant L de [35], Ch. X.F.2. Aucune des tessellations ne présentait de contours épais.

Cela étant, pour obtenir à coup sûr des contours d'épaisseur unité il faut partir de graphes de fusion parfaits au sens de J. Cousty et Al.[10], [13]. Dans ces ces graphes, lorsqu'on retire un point d'une arête, on fait fusionner deux tesselles exactement; de plus, tous les points de cette arête sont équivalents, en ce qu'ils peuvent être retirés en parallèle, sans que l'on aboutisse jamais à une situation où des points du clivage ne seraient plus frontière. Le cas de figure des graphes d'arêtes est particulièrement intéressant. Ce sont des graphes de fusion, et quand on fait porter les γ et les ψ sur ces arêtes, leurs tessellations équivalent à des partitions

de leurs sommets [11], [14]. La distinction entre partition et tessellation se ramène à la dualité entre sommets arêtes du graphe.

La proposition 9 s'étend à $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$ quand ψ est obtenu par des épaissements progressifs d'un pixel à la fois, et qui se propagent sous la réserve que le pixel courant, qui passe du fond à la forme, ne crée pas une nouvelle composante connexe, ni n'en connecte d'existantes. On retrouve les conditions des Voronoï digitaux.

2.3.3 \preceq -épaissements à base d'ouvertures non connexes

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque l'ouverture γ n'est plus connexe, en prenant par exemple des ouvertures par adjonction à base de dodécagones, en trame hexagonale. Ils sont à peu près circulaires, et leurs tailles vérifient, pour les indices pairs, la relation $j \geq i \Rightarrow \gamma_i \leq \gamma_j$. La proposition 6 n'est plus valide, et se voit remplacée par deux propriétés, l'une plus générale, l'autre plus spécifique.

Proposition 10 *Soit $\alpha : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ un filtre morphologique, et $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ un opérateur \subseteq -extensif. Le produit de composition $(\gamma\psi)^n$ est alors une fonction \subseteq -croissante de n , ainsi qu'à α près, les itérées du produit $\psi\gamma$:*

$$j \geq i \Rightarrow (\alpha\psi)^i \subseteq (\alpha\psi)^j \quad (8)$$

$$j \geq i \Rightarrow \alpha(\psi\alpha)^i \subseteq \alpha(\psi\alpha)^j \quad (9)$$

Proof. Commençons par le produit $\alpha\psi$. Par extensivité de ψ , on a $\alpha\psi \subseteq \psi\alpha\psi$, puis par croissance et idempotence de α , $\alpha\psi \subseteq \alpha\psi\alpha\psi$, d'où la relation (8). Concernant le produit $\psi\alpha$, l'extensivité de ψ entraîne $\alpha(\psi\alpha)^j \subseteq \psi\alpha(\psi\alpha)^j = (\psi\alpha)^{j+1}$, d'où la relation (9). ■

La proposition reste muette sur le comportement des itérations (8) et (9) vis à vis de l'ordre du contenu. Pour faire apparaître ce dernier il faut partir de l'espace $\mathcal{P}_\gamma = \gamma[\mathcal{P}(E)]$, image de $\mathcal{P}(E)$ selon γ . L'ouverture γ n'est plus connexe, mais on suppose qu'elle agit indépendamment sur chaque $\dot{A}_i \in A$, i.e. $\gamma(A) = \cup \gamma(\dot{A}_i)$. L'inclusion

$$\gamma(A) \subseteq \gamma\psi\gamma(A) \quad \gamma(A) \in \mathcal{P}_\gamma$$

implique que chaque composante de $\gamma(A)$ soit incluse dans une composante de $\gamma\psi\gamma(A)$, ce qui n'interdit pas à $\gamma\psi\gamma(A)$ de posséder des composante supplémentaires, qui ne rencontrent pas $\gamma(A)$. Si $\tilde{\gamma}\psi\gamma(A)$ désigne la restriction de $\gamma\psi\gamma(A)$ à celles de ses composantes marquées par $\gamma(A)$, l'inclusion

$$\gamma(A) = \tilde{\gamma}\gamma(A) \subseteq \tilde{\gamma}\psi\gamma(A)$$

se double alors de l'inégalité

$$\gamma(A) \preceq (\tilde{\gamma}\psi)\gamma(A),$$

car toute composante de $\tilde{\gamma}\psi\gamma(A)$ en contient une de $\gamma(A)$. Le transformé $(\tilde{\gamma}\psi)\gamma(A)$ est encore un élément de \mathcal{P}_γ puisque γ agit séparément sur les composantes connexes. L'ensemble $(\tilde{\gamma}\psi)\gamma(A)$ peut à son tout servir de variable d'entrée, d'où

$$\gamma(A) \preceq (\tilde{\gamma}\psi)\gamma(A) \preceq (\tilde{\gamma}\psi)(\tilde{\gamma}\psi)\gamma(A),$$

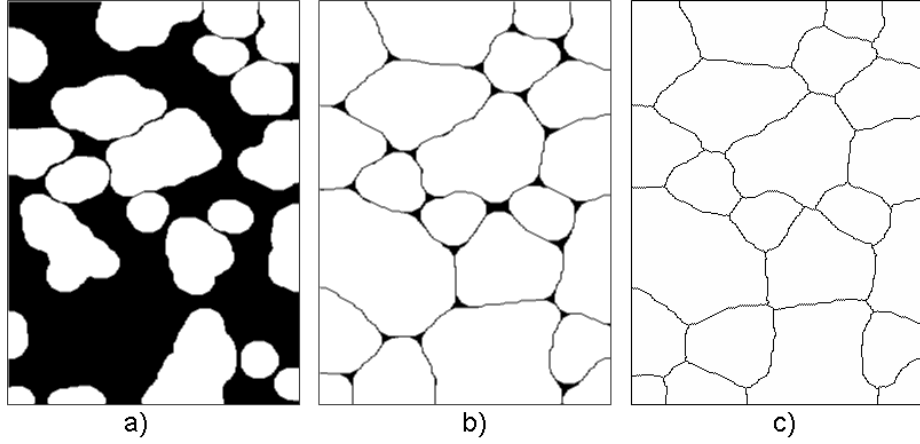


Figure 7: La tessellation initiale est celle de la figure 9; a) ouvert des classes par un élément structurant dodécagonal de taille 15; b) ouverture limite μ pour la taille 15, c) épaissement de Voronoï $\psi\mu$ (avec $\gamma\psi\mu = \mu$).

ce qui conduit, après itérations, à la proposition

Proposition 11 *Soit γ une ouverture sur $\mathcal{P}(E)$ qui agit indépendamment sur les composantes connexes, soit $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ un opérateur \subseteq -extensif qui ne crée pas de C^* -composantes. Si $\tilde{\gamma}\psi\gamma(A)$ désigne les C^* -composantes de $\gamma\psi\gamma(A)$ qui contiennent chacune une C^* -composante de $\gamma(A)$, où $A \in \mathcal{P}(E)$, alors le produit $(\tilde{\gamma}\psi)$ est un opérateur \preceq -extensif sur $\mathcal{P}_\gamma = \gamma[\mathcal{P}(E)]$:*

$$\gamma(A) \preceq (\tilde{\gamma}\psi)^j \gamma(A) \preceq (\tilde{\gamma}\psi)^{j+1} \gamma(A). \quad (10)$$

L'idempotence de ψ n'est pas ici nécessaire. D'autre part, la condition pour les ouvertures de traiter séparément les diverses composantes connexes n'est pas vraiment pénalisante: il suffit d'utiliser les éléments structurants convexes habituels. a) Tessellation initiale; b) ouvert des classes par un élément structurant dodécagonal de taille 15; c) ouverture limite μ pour la taille 15.

Lorsque l'espace E est fini, il existe un $n < \infty$ tel que l'opérateur

$$\mu = (\tilde{\gamma}\psi)^n \gamma = (\tilde{\gamma}\psi)^{n+1} \gamma \quad (11)$$

achève la progression et réponde en miroir à l'épaississement $\psi\mu$, puisqu'il vient alors

$$\tilde{\gamma}\psi\mu = \gamma\psi\mu = \mu. \quad (12)$$

Les ouvertures connexes débouchaient sur l'égalité $\psi\gamma = \gamma\psi\gamma$. Cette fois, les deux membres μ et $\psi\mu$ sont obtenus par passage à la limite, et ils restent distincts (cf. Figure 7b et c).

2.4 Hiérarchies d'épaississements à base d'ouvertures connexes

Les familles totalement ordonnées d'ensembles, de partitions, ou d'opérations les concernant sont communément appelées chaînes, ou encore hiérarchies. La section 3, un peu plus loin, les utilise comme cadre pour des minimisations, mais on peut dès à présent se demander quelles propriétés apparaissent quand on hiérarchise les épaississements connexes en faisant dépendre $\gamma = \gamma_j$ du paramètre $j \in J$, où l'ensemble J est muni d'une relation d'ordre. Remarquons tout d'abord que s'agissant d'ouvertures connexes, la \subseteq -décroissance des γ_i équivaut à leur \preceq -croissance:

$$\{j \geq i \Rightarrow \gamma_j \subseteq \gamma_i\} \Leftrightarrow \{j \geq i \Rightarrow \gamma_j \succeq \gamma_i\}$$

puisque toute composante de $\gamma_j(A)$ l'est aussi de $\gamma_i(A)$ et se contient elle-même.

On peut aborder la question des hiérarchies de deux façons, selon qu'on choisit d'agir directement sur la croissance des $\gamma_j\psi$ en fonction de j , ou que l'on recherche des semi-groupes. La seconde démarche génère une structure plus puissante, mais moins directe: elle contraint à passer par des séquences d'opérations. Voyons comment procéder dans l'un et l'autre cas.

2.4.1 Hiérarchies par chaînes

Le moyen le plus simple pour construire une \preceq -hiérarchie par chaînes repose sur l'épaississement de Voronoï.

Proposition 12 *Soit ψ un épaississement par zones d'influences dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{Z}^2 , et soit $\{\gamma_j, j \in J\}$, une famille \preceq -croissante d'ouvertures connexes dans ces mêmes espaces. Les épaississements $\{\psi\gamma_j, j \in J\}$ et $\{\gamma_j\psi, j \in J\}$ forment alors deux chaînes pour l'ordre de la construction.;*

$$j \geq i \Rightarrow \psi\gamma_j \succcurlyeq \psi\gamma_i \quad \text{et} \quad \gamma_j\psi \succcurlyeq \gamma_i\psi \quad i, j \in J$$

Proof. Quand $j \geq i$ on a par hypothèse $\gamma_j \succeq \gamma_i$, ce qui appliqué à ψ donne $\gamma_j\psi \succcurlyeq \gamma_i\psi$.

De plus, s'agissant d'ouvertures connexes, chaque composante A_k de $\gamma_j(A)$, $A \in \mathcal{P}(E)$, est aussi composante de $\gamma_i(A)$. La relation (7) s'applique donc si l'on prend $\gamma_j(A)$ pour A , et $\gamma_i(A)$ pour A' , d'où $\psi\gamma_j \succcurlyeq \psi\gamma_i$. ■

En un sens, les \preceq -chaînes de $\psi\gamma_j$ et de $\gamma_j\psi$ compensent un peu l'absence de treillis pour l'ordre de la construction. Lorsqu'on veut supprimer des petits grains, ou des petites classes, elles permettent de déterminer le plus petit épaississement nécessaire. En revanche, la famille \preceq -croissante $\{\psi\gamma_j, j \in J\}$ ne donne pas lieu à un semi-groupe, comme on peut le constater en figure 8.

2.4.2 Modifications de hiérarchies pré-existantes

Dans le même ordre d'idées, on peut se trouver devant une chaîne finie de tessellations issue d'un processus préalable, et que l'on souhaite remodeler pour l'amender de certaines classes

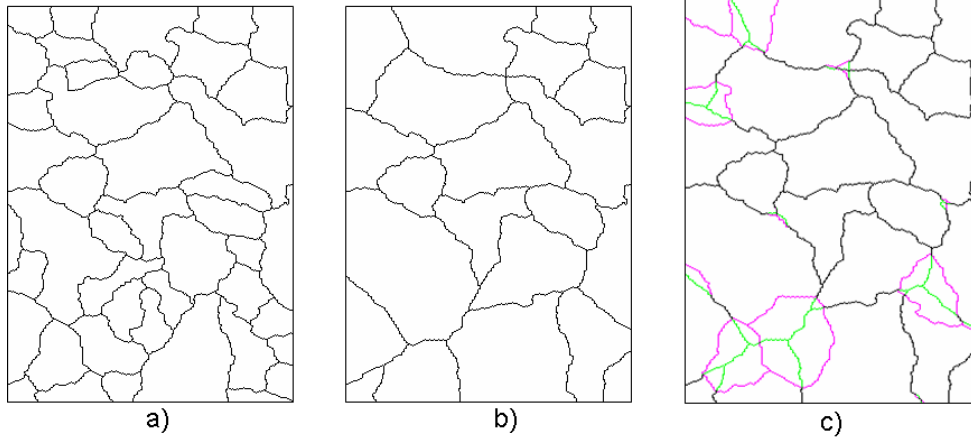


Figure 8: la tessellation initiale est celle de la figure 6a, et γ_{10} et γ_{15} sont deux ouvertures connexes selon le diamètre du cercle inscrit. a) \preceq -épaississement $\psi\gamma_{10}$; b) \preceq -épaississement $\psi\gamma_{15}$; c) comparaison entre b) et le \preceq -épaississement $\psi\gamma_{15}\psi\gamma_{10}$, ce dernier en noir et en rose. On voit que $\psi\gamma_{15} \neq \psi\gamma_{15}\psi\gamma_{10}$, il n'y a pas de semi-groupe de Matheron.

non désirées. Si $\{\alpha_j, j \in J\}$ est la chaîne \subseteq -croissante d'opérateurs qui appliquent l'espace \mathcal{F} des fonction à segmenter dans celui des tessellations, posons $A_i = \alpha_j(f), f \in \mathcal{F}$.

Les A_i sont des ensembles de \mathbb{Z}^2 ou des ouverts de \mathbb{R}^2 . S'agissant de tessellations, quand $i \leq j$ l'inclusion $A_i \subseteq A_j$ signifie qu'une partie des arêtes de A_i est passée dans les tesselles de A_j . Comme par définition la classe filiforme ne comporte pas d'arêtes pendantes, les parties supprimées sont donc soit des boucles, soit des arcs simples ouverts aux extrémités et joignant des points multiples. La saillance, au sens de L. Najman, d'une arête qui disparaît au niveau j vaut par définition $j - 1$ [24]. Toute arête qui disparaît fait fusionner les tesselles qui lui étaient adjacentes, donc chaque tesselle de A_j en contient au moins une de A_i , et $A_i \preceq A_j$.

Les tesselles indésirables $\{B_s, s \in S\}$ de la suite des A_i ont été repérées lors d'une démarche antérieure. A ce stade, le problème n'est pas vraiment défini, puisqu'une arête peut disparaître soit du fait de sa saillance, soit parce qu'elle est adjacente à une ou deux tesselles qu'on supprime. Il faut se donner un ordre de préséance, et la règle la plus simple consiste à dire qu'on supprime tous les B_s dès le premier niveau hiérarchique. La tessellation A_1 est remplacée par $\beta(A_1)$ qui est la réunion des tesselles autres que les $\{B_s, s \in S\}$, donc $A_1 \preceq \beta(A_1)$. L'épaississement de Voronoï ψ aggrandit à son tour $\beta(A_1)$, donc $A_1 \preceq \beta(A_1) \preceq \psi\beta(A_1)$. La nouvelle hiérarchie se construit en retirant progressivement des arêtes à la tessellation $\psi\beta(A_1)$.

La figure 8c, si on en change la genèse, illustre la situation. Prenons pour A_1 la tessellation dont les arêtes sont en noir et en rose, celles de couleur rose indiquant ce qu'on souhaite supprimer. L'opérateur connexe β les fait disparaître, et la tessellation composée $\psi\beta(A_1)$ est

celle d'arêtes noires et vertes. Dans ce processus, on se trouve en présence de trois types d'arêtes:

- *i)* celles qui sont les mêmes dans A_1 et $\psi\beta(A_1)$, en noir,
- *ii)* celles, en partie nouvelles qui prolongent des tronçons d'arêtes de A_1 , partiellement en noir,
- *iii)* des arêtes nouvelles, entièrement vertes.

On construit la nouvelle hiérarchie en reprenant l'ancienne saillance dans le cas *i)* et en étendant à toute l'arête la saillance de la partie noire dans le cas *ii)*. Pour le cas *iii)* une règle est nécessaire, comme par exemple l'infimum des saillances des arêtes adjacentes. La hiérarchie ainsi obtenue n'est évidemment plus \subseteq -croissante, mais elle reste \preccurlyeq -croissante, et débarrassée des tesselles qu'on voulait enlever.

2.4.3 Le semi-groupe de Matheron

Les semi-groupes $\{\gamma_\lambda, \lambda \geq 0\}$ d'ouvertures dépendant d'un paramètre positif λ , que G.Matheron a introduit pour élaborer des granulométries [21], à savoir

$$\mu \geq \lambda \Rightarrow \gamma_\mu \gamma_\lambda = \gamma_\lambda \gamma_\mu = \gamma_\mu \quad (13)$$

sont en fait très généraux. Ils peuvent être vérifiés par des opérateurs non croissants, et ni extensifs ni anti-extensifs, bien que dans le cas des ouvertures les implications (13) et $\{\mu \geq \lambda \Rightarrow \gamma_\mu \leq \gamma_\lambda\}$ soient équivalentes, et les paramètres peuvent n'être que partiellement ordonnés. Développons ces points dans le cas où l'espace J du paramètre est discret (entiers, entiers positifs, produits finis d'entiers, etc..). Lorsqu'une famille $\{\nu_i, i \in J\}$ d'opérateurs sur $\mathcal{P}(E)$ vérifie la relation

$$j \geq i \Rightarrow \nu_i \nu_j = \nu_j, \quad i, j \in J \quad (14)$$

qui signifie que le plus faible ne modifie pas l'action du plus fort, il est manifeste que les ν_i sont idempotents et que le produit de composition séquentielle $N_j = \nu_j \dots \nu_2 \nu_1$ obéit au semi-groupe de Matheron

$$N_j N_i = N_i N_j = N_{\max(i,j)}. \quad (15)$$

Notons au passage que les relations (13) ou (15) expriment un ordre \leq intrinsèque à la famille $\{N_i, i \in J\}$. Si nous posons en effet

$$N_i \leq N_j \Leftrightarrow [N_j N_i = N_i N_j = N_j],$$

la réflexivité de la relation \leq est évidente. Son anti-symétrie vient de ce que $N_i \leq N_j$ entraîne que $N_j N_i = N_j$, et $N_j \leq N_i$ que $N_j N_i = N_i$. La transitivité enfin découle de ce que si $N_j = N_j N_i$ et $N_k = N_k N_j$, alors $N_k = N_k N_i$.

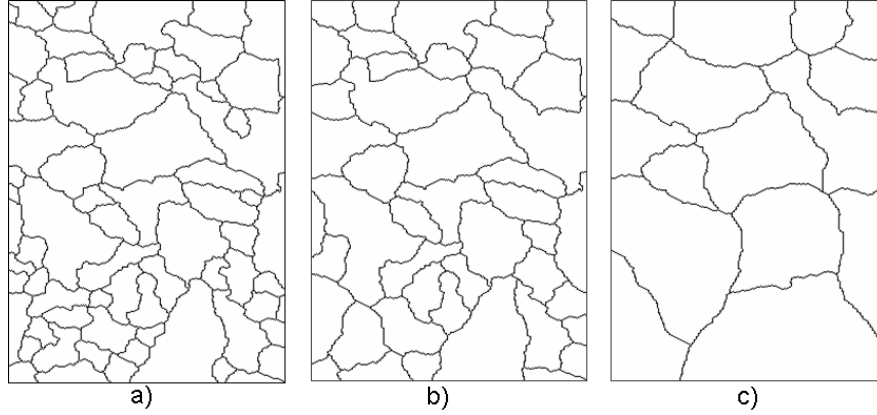


Figure 9: a) Tessellation initiale ψ , b) et c) épaissements $\psi\gamma_{10}\psi\gamma_0$ puis $\psi\gamma_{20}\psi\gamma_{10}\psi\gamma_0$. Les résultats sont ordonnés à la fois selon \preceq , et selon le semi-groupe.

2.4.4 Hiérarchies par semi-groupes

Revenons à l'épaissement \preceq connexe $\psi\gamma$ (l'autre, $\gamma\psi$, revient à $\psi\gamma$ lorsque la donnée de départ est du type $\psi(A)$), et faisons décroître γ selon le paramètre $j \in J$, soit

$$j \geq i \quad \Rightarrow \quad \gamma_j \leq \gamma_i, \quad i, j \in J$$

Les composantes connexes de $\psi\gamma_j$ restent alors inchangées sous l'action de γ_i , et par idempotence de ψ , on obtient

$$j \geq i \quad \Rightarrow \quad (\psi\gamma_i)(\psi\gamma_j) = (\psi\gamma_j),$$

ce qui n'est autre que l'implication (14). Il en résulte que les $\{\psi\gamma_j\}$ engendrent un semi-groupe de Matheron par composition séquentielle M_j :

$$M_j = (\psi\gamma_j)\dots(\psi\gamma_2)(\psi\gamma_1),$$

où les M_j vont en croissant non seulement pour l'ordre intrinsèque au semi-groupe, mais aussi pour celui de la construction, puisque

$$j > i \quad \Rightarrow \quad M_j = (\psi\gamma_j)\dots(\psi\gamma_{i+1})M_i \succ M_i.$$

La figure 9 illustre ce type de progression. Ainsi, le semi-groupe induit une \succ -chaîne d'opérateurs, alors que l'inverse est faux, comme nous l'avons vu plus haut (Figure 8).

Lorsque les opérateurs $\psi\gamma$ portent sur des tessellations et génèrent des zones d'influence grandissantes, comme dans les figures 3b et 9, on ne peut pas affecter de saillance à chaque arête de manière aussi simple que dans les hiérarchies connexes au sens classique. Ici, des arêtes nouvelles apparaissent quand on s'élève dans la hiérarchie et d'autres sont éliminées, mais dans les deux cas les changements portent sur des tronçons d'arêtes. En revanche,

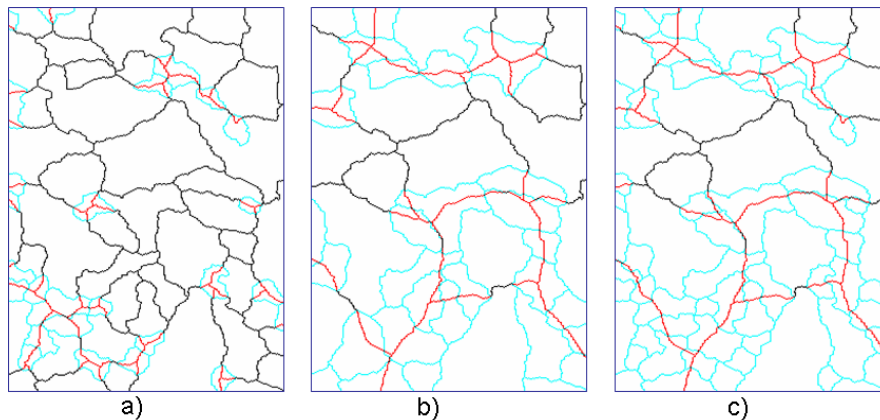


Figure 10: En bleu, les frontières qui ont disparu et en rouge celles qui ont apparu entre les étapes de la figure 9, a) entre les étapes 2 et 1; b) entre 3 et 2, c) entre 3 et 1. En noir, les frontières inchangées.

comme dans les filtres connexes classiques, la position des arêtes ne fluctue pas, ce qui permet d'affecter aux tronçons d'arêtes des mesures de saillance, pour dater leur apparition puis leur disparition, cf. figure 10.

2.5 Applications

2.5.1 Nettoyage des petites classes

Les épaissements à base d'ouvertures (connexes ou pas) filtrent les petites classes parasites, et le font de manière déterministe, c'est à dire sans qu'on ait à choisir quoi que ce soit. La question posée en figure 2 trouve donc sa réponse avec l'opération de la figure 11.

2.5.2 Interpolations

Imaginons que nous voulions synthétiser en une seule image une partition du plan et sa translatée. Quelle origine prendre? Et si le décalage est important, quel rapport établir entre deux classes placées à l'aplomb l'une de l'autre? Le seul cas où la question possède un peu de sens reste celui des translations faibles vis à vis de la taille moyenne des classes. L'inf des deux partitions retrouve alors à peu près les mêmes classes, mais entourées de fines bandes, comme on peut le voir en figure 12. On résorbe celles-ci par un \preceq -épaississement de type $\psi\gamma$, où γ est une petite ouverture connexe qui supprime les bandes, et où ψ est l'épaississement de Voronoï.

2.5.3 Combinaisons de partitions ou de tessellations

Le cadre théorique initialement construit pour le problème des petites classes parasites s'avère finalement assez général, et va maintenant servir à combiner des partitions. Il n'élabore ni

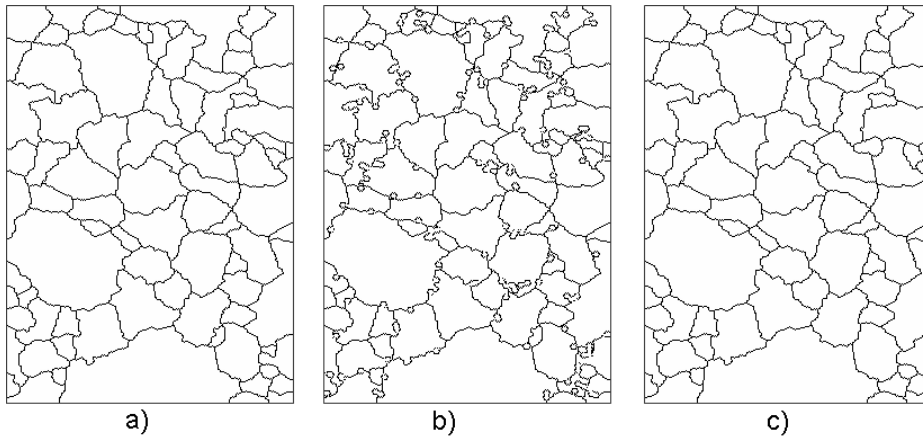


Figure 11: a) Tessellation initiale; b) addition d'un bruit par petites classes parasites; c) épaissement limite $\psi\mu$ de b), pour une ouverture γ dodécagonale de taille 5.

supremum (pas de treillis...) ni sommation (pas d'espace vectoriel...) mais une démarche qui chemine entre les deux.

Quand on veut combiner des ensembles (ou des partitions, ou des tessellations) au regard de l'ordre de la construction, l'absence de treillis se fait sentir. On trouvera facilement une tessellation qui contienne toutes les autres, au sens de \preceq , mais on risque aussi d'en trouver beaucoup, ce qui conduit à s'imposer des contraintes supplémentaires. Le "bon" cas de figure ici est celui où toutes les données sont reliées par un même substratum spatial. Il peut s'agir typiquement de la combinaison de données en télédétection (cf. par exemple les travaux de J.Chanussot, Ch. Collet, et K. Chehdi [9]), ou encore dans les systèmes d'information géographique (cf. par exemple les travaux de Ch.Voiron-Canicio [8]), où diverses technologies s'interposent entre le monde physique et les images qui nous en parviennent.

Aux micro-échelles, c'est aussi le cas des objets qu'il faut plusieurs angles de vue pour appréhender. Les exemples des lames minces de silicates de [36], [39] illustrent bien cette situation. Regardées en lumière ordinaire sous microscope, elles paraissent totalement transparentes. Mais quand on polarise le rayon incident elles deviennent un véritable habit d'arlequin dont les couleurs dépendent de l'orientation optique du rayon incident. Ainsi, une même lame mince de dolérite, vue sous 15 angles de polarisation différents génère 15 images à partir desquelles on voudrait tracer les contours des grains. Deux vues de la série initiale sont représentées en figure 13.

Un filtrage par zones plates est effectué sur toute la série. Ce sont les tessellations que définissent ces 15 images, dont deux sont visibles en figure 14, que nous devons "moyenner". Pour ce faire, on met d'abord en évidence les contours dans chaque image, en en dilatant le gradient par un disque de taille 4 (cf. figure 15), et l'on prend la moyenne des 15 gradients

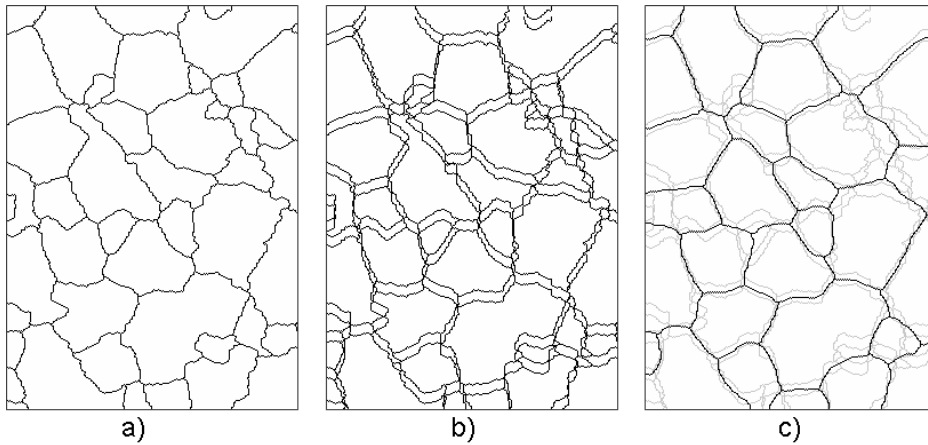


Figure 12: a) tessellation; b) intersection A de a) et de sa translatée horizontale de 10 pixels; épaisseur asymptotique $\psi\gamma(A)$, pour une ouverture par adjonction γ de taille 6. A comparer avec le supremum de la tessellation et sa translatée.

dilatés, ce qui donne la fonction g de la figure 16a. En ce sens, la synthèse des 15 tessellations s'opère bien par moyenne, mais celle-ci débouche sur une fonction.

C'est ici que l'ordre de la construction intervient, par un épaissement du type $\psi\gamma$, sous forme numérique cette fois, et en passant par les fonctions opposées. L'opération γ est le produit de composition de l'ouverture $\gamma_1(255 - g)$ qui reconstruit $255 - g$ à partir de $(255 - g) - 120$, suivie de l'ouverture "horizontale" γ_2 , toujours par reconstruction, de $\gamma_1(255 - g)$ par son érodé selon un cercle de taille 4, soit $\gamma(255 - g) = \gamma_2\gamma_1(255 - g)$. Pour ψ , nous prenons comme précédemment un watershed topologique w , mais numérique cette fois. Plus précisément, comme w est un amincissement, on a finalement $\psi\gamma(255 - g) = 255 - w[255 - \gamma(255 - g)]$. La transformée $255 - \gamma(g)$ est indiquée en figure 16b et le complément $\psi(g)$ de son watershed en figure 16c. Enfin, la figure 17 superpose images initiales et lignes de partage des eaux pour les deux échantillons témoins.

3 Segmentations dans les hiérarchies

Nous abordons maintenant la seconde question soulevée en introduction. On suppose qu'une première vague de segmentations a donné lieu à une suite croissante de partitions, que l'on réorganise dans un second temps pour en extraire la quintessence, sous forme d'une partition nouvelle. Quels atouts supplémentaires la structure en chaîne des partitions nous donne-t-elle lors du second étage d'optimisation?

3.1 Hiérarchies de partitions

Les hiérarchies finies sont d'abord apparues en taxinomie, pour rechercher des lois de classification des objets. Elles ont donné lieu en France aux travaux de J.P. Benzécri [7] et de E.

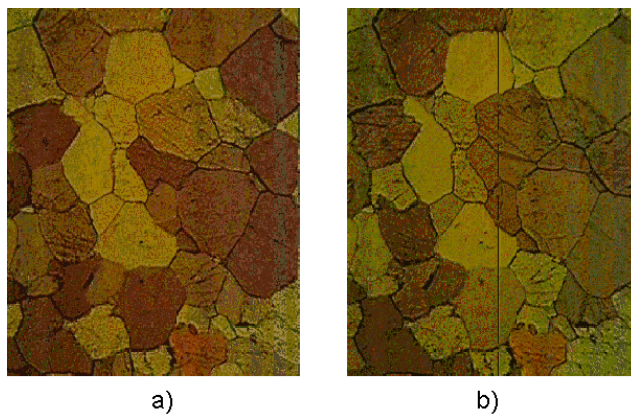


Figure 13: Deux vues témoin de la série des 15 polarisations d'une dolérite.

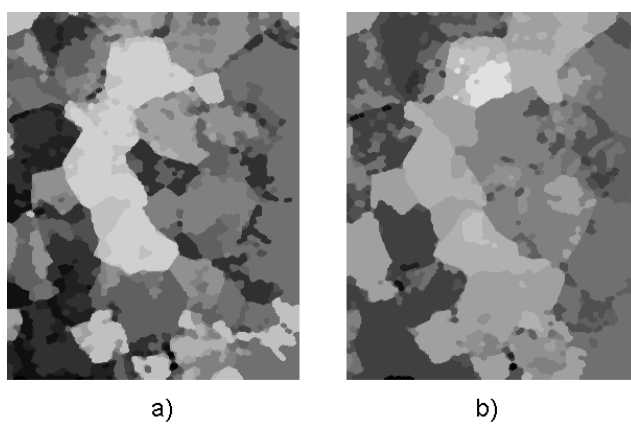


Figure 14: Les zones plates des deux vues de la figure 13.

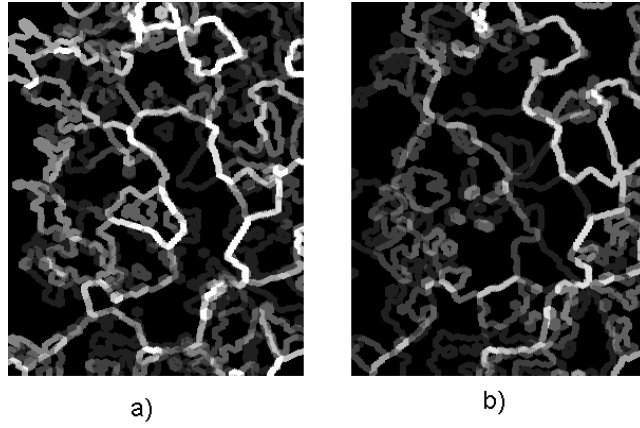


Figure 15: Gradients épais des deux images de la figure 14.

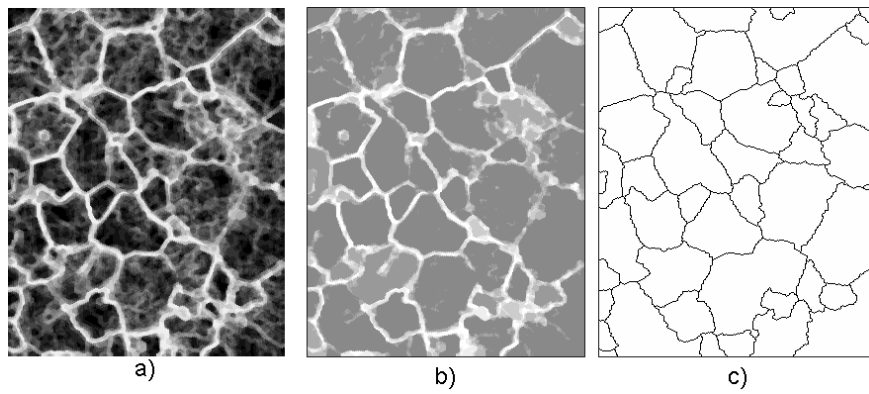


Figure 16: a) Somme g des gradients; b) $u = 255 - \gamma(255 - g)$; épaisseur $\psi\gamma(255 - g) = .255 - watershed(u)$

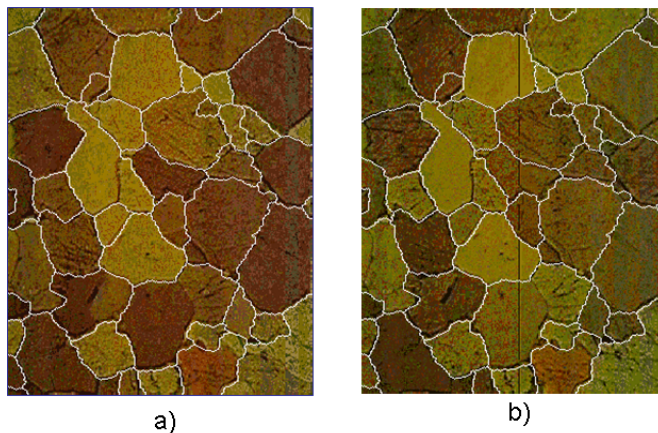


Figure 17: Superposition de deux images de la série des 15, avec leur ligne de partage des eaux synthétique commune.

Diday [16]. L'on doit en particulier au premier le théorème liant ultramétriques et hiérarchies que nous reprenons dans la proposition 17. En analyse d'image, les structures hiérarchiques peuvent porter sur des piles d'images, mais plus souvent d'opérateurs, comme les familles de convolutions gaussiennes de D. Marr [20], ou encore les granulométries de G. Matheron [21]. Toutefois, les hiérarchies dont il est question dans les exemples de l'introduction occupent une place intermédiaire, puisqu'elles partent d'une chaîne H de segmentations d'une fonction f donnée de E , numérique ou vectorielle, chaîne qui sert ensuite de cadre à des opérations ultérieures.

Il est plus simple pour notre propos de considérer fonction f et hiérarchie H comme deux points de départ, liés ou pas. Cela conduit à la définition suivante:

Definition 13 Soit \mathcal{D} l'ensemble des partitions de E , muni d'une relation d'ordre \ll . On appelle hiérarchie de partitions π_i toute chaîne finie H dans \mathcal{D} , i.e.

$$H = \{\pi_i, 0 \leq i \leq n, \pi_i \in \mathcal{D} \mid i \leq j \Rightarrow \pi_i \ll \pi_j\}, \quad (16)$$

d'extrémités les extrema universels de \mathcal{D} , à savoir $\pi_0 = \{\{x\}, x \in E\}$ et $\pi_n = E$.

Notons \mathcal{S} l'ensemble des classes $S_i(x)$ de toutes les partitions π_i de H , i.e. $\mathcal{S} = \{S_i(x), x \in E, 0 \leq i \leq n\}$. L'expression (16) équivaut à dire qu'en tout point $x \in E$ la famille des classes $S_i(x)$ de \mathcal{S} qui contiennent x forme une chaîne finie \mathcal{S}_x dans $\mathcal{P}(E)$, d'éléments minimal $\{x\}$, et maximal E :

$$\mathcal{S}_x = \{S_i(x), 0 \leq i \leq n\}.$$

La finitude de E n'est pas vraiment nécessaire. Elle sert surtout à garantir que les longueurs de frontières entre classes soient finies, mais nous avons vu que le modèle de Voronoï euclidien le garantit aussi. En revanche la recherche des coupes minimales par récurrence sur les niveaux hiérarchiques qui interviennent dans la proposition 18, requiert que ceux-ci soient

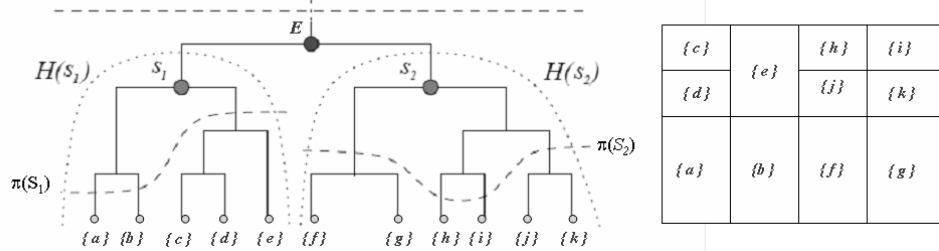


Figure 18: A gauche, arbre hiérarchique; à droite, la structure spatiale qui lui répond. S_1 et S_2 sont les noeuds fils de E , et $H(S_1)$ et $H(S_2)$ les sous-hiérarchies correspondantes. π_1 et π_2 sont respectivement des coupes de $H(S_1)$ et $H(S_2)$, et $\pi_1 \sqcup \pi_2$ est une coupe de E .

en nombre fini. Notons aussi que la paramétrisation des niveaux par l'indice i peut être remplacée par toute fonction $t(i)$ strictement croissante, qui définit alors une *indexation* de la hiérarchie.

Selon un résultat classique, une famille d'ensembles indexés $\{S_i(x), x \in E, 0 \leq i \leq n\}$ engendre les classes d'une hiérarchie ssi

$$i \leq j \text{ et } x, y \in E \Rightarrow S_i(x) \subseteq S_j(y) \text{ ou } S_i(x) \supseteq S_j(y) \text{ ou } S_i(x) \cap S_j(y) = \emptyset. \quad (17)$$

Il est commode de représenter une hiérarchie par un arbre dont chaque classe S est un noeud de bifurcation. Les classes de π_{i-1} de niveau $i-1$ incluses dans $S_i(x)$ sont dites les fils de $S_i(x)$. Manifestement, l'ensemble des descendants de chaque S forme à son tour une hiérarchie $H(S)$ de sommet S incluse dans la hiérarchie complète $H = H(E)$. On en voit deux exemples en figure 18 avec les deux zones $H(S_1)$ et $H(S_2)$ en pointillés étroits.

3.2 Coupes dans une hiérarchie

On appelle coupe dans la hiérarchie H toute partition π de E dont les classes sont prises dans \mathcal{S} . L'ensemble des coupes de E est noté $\Pi(E) = \Pi$. Toute section "horizontale" $\pi_i(H)$ à la cote i est évidemment une coupe, mais plusieurs niveaux différents peuvent coopérer dans une même coupe, comme $\pi(S_1)$ et $\pi(S_2)$ (figure 18, pointillés larges). Utilisons le symbole \sqcup pour exprimer que des groupes de classes sont concaténés. On voit par exemple que la partition $\pi(S_1) \sqcup \pi(S_2)$ de la figure 18 qui engendre une coupe de $H(E)$. Chaque classe S est elle aussi susceptible de coupes dans la sous-hiérarchie $H(S)$ dont elle est le sommet. Soit $\Pi(S)$ la famille des coupes de $H(S)$. Posons

$$\tilde{\Pi} = \cup\{\Pi(S), S \in \mathcal{S}\}. \quad (18)$$

L'ensemble $\tilde{\Pi}$ ne comprend pas toutes les partitions partielles de classes dans \mathcal{S} . La partition partielle $\{a\} \sqcup \{f\}$ de la figure 18, dont les deux termes sont pourtant dans \mathcal{S} n'en

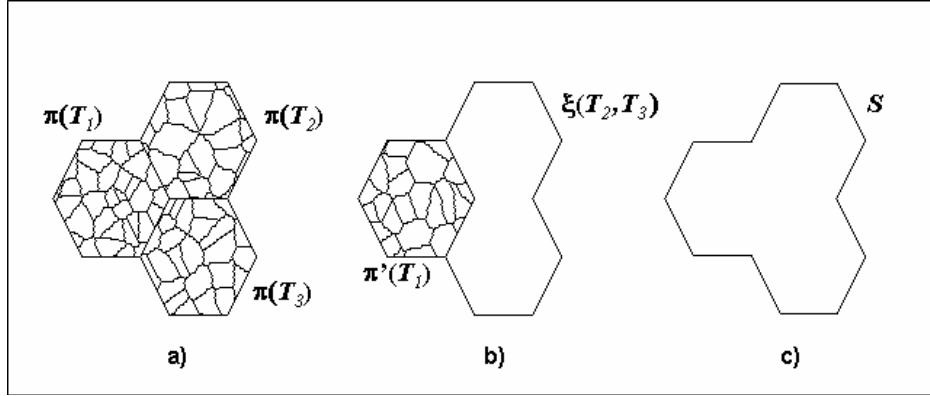


Figure 19: Les trois hexagones en a) sont les trois fils T_1, T_2, T_3 du sommet S (en c)). La concaténation $\pi(T_1) \sqcup \pi(T_2) \sqcup \pi(T_3)$ de trois coupes de leurs est une coupe de S (a). On obtient aussi une coupe de S en prenant $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = S$ (c). En revanche, $\pi'(T_1) \sqcup \xi(T_2, T_3)$ n'est pas une coupe permise pour S .

fait pas partie. De plus, toutes les réunions de classes ne sont pas dans \mathcal{S} . Si par exemple S est la réunion de trois fils hexagonaux T_1, T_2, T_3 (figure 19), la hiérarchie $H(S)$ peut accepter une coupe de type 19a, mais sûrement pas 19b, car la réunion de deux hexagones n'est pas une classe de \mathcal{S} . Toutefois, $\tilde{\Pi}$ contient la famille $\Pi(E)$ de toutes les coupes de $H(E)$.

La structure hiérarchique des données se traduit par une relation entre la famille $\Pi(S)$ des coupes du noeud S et les familles $\Pi(T_1), \dots, \Pi(T_p)$ de ses fils T_1, \dots, T_p . Comme les expressions de la forme $\sqcup\{\pi(T_k); 1 \leq k \leq p\}$ définissent des coupes de S , $\Pi(S)$ contient la famille

$$\Pi'(S) = \{\pi(T_1) \sqcup \dots \sqcup \pi(T_k) \dots \sqcup \pi(T_p); \quad \pi(T_1) \in \Pi(T_1) \dots \pi(T_p) \in \Pi(T_p)\},$$

à laquelle il faut rajouter la coupe de S en une seule classe, i.e. S lui-même, que $\Pi'(S)$ ne contient pas. Et comme les autres réunions de plusieurs T_k ne sont pas des classes répertoriées dans \mathcal{S} , il n'y a pas d'autre coupe possible, d'où finalement:

$$\Pi(S) = \Pi'(S) \cup S. \quad (19)$$

3.3 Propriétés des hiérarchies de partitions

La structure en chaîne des partitions de la hiérarchie H donne lieu à quelques propriétés remarquables en matière de treillis, de connexions, et d'ultramétriques (l'annexe I rappelle les notions de base sur la segmentation connective).

Treillis Concernant les premiers, nous avons la proposition suivante:

Proposition 14 *La famille $\Pi(E)$ des coupes de H est un treillis pour l'ordre \ll défini sur les partitions, où la classe de l'infimum de J coupes au point x est l'intersection des classes en x des J opérands, et où le supremum est leur réunion.*

Proof. Soit $\{\pi(j), j \in J\}$ une famille de coupes dans $\Pi(E)$. Les classes $S(x, j)$ des $\pi(j)$ au point x étant des éléments de la chaîne finie \mathcal{S}_x , on a $\cup\{S(x, j), j \in J\} = S(x, j_x)$ où $j_x \in J$. Au point y on a de même $\cup\{S(y, j), j \in J\} = S(y, j_y)$. Comme les classes $S(x, j_x)$ et $S(y, j_y)$ sont des éléments de \mathcal{S} , elles sont liées par une des trois relations de l'équation (17). Supposons que $S(x, j_x) \subseteq S(y, j_y)$. Comme $x \in S(x, j_x)$ il vient $x \in S(y, j_y)$ ce qui signifie que $S(y, j_y)$ est l'une des classes de la famille $\{S(x, j), j \in J\}$, donc $S(y, j_y) \subseteq \cup\{S(x, j), j \in J\} = S(x, j_x)$, d'où l'égalité $S(x, j_x) = S(y, j_y)$, égalité qu'on retrouve aussi lorsque l'on part de l'hypothèse $S(x, j_x) \supseteq S(y, j_y)$. En définitive, les classes $S(x, j_x)$ et $S(y, j_y)$ étant égales ou disjointes, elles engendrent une partition $\bar{\pi}$ de E quand x et y varient, qui par construction est la plus petite partition majorant les $\pi(j)$. On montre de même que la famille $\{\pi(j)\}$ admet un plus grand minorant $\underline{\pi}$. ■

Le treillis $\Pi(E)$ est atomique. Ses atomes sont les partitions dont toutes les classes sauf une sont des singletons, et la dernière étant réunion de deux singletons. Lorsque l'ordre \ll est celui du raffinement, ce que la proposition exhibe n'est qu'un sous-treillis de celui, habituel, des partitions. Mais dans le cas où l'ordre \ll des partitions est celui de la construction \preceq , qui n'engendre pas de treillis sur les partitions de E , la proposition 14 en procure un pour $\Pi(E)$.

Toute suite croissante $\{\pi(i), 0 \leq i \leq n\}$ de coupes de classes prises dans \mathcal{S} et d'extrémités π_0 et π_n , définit à son tour une nouvelle hiérarchie H' , différente de H , mais bâtie elle aussi à partir des classes \mathcal{S} . Soit \mathcal{H} la famille de toutes les hiérarchies de ce type. Chaque ordre \ll sur les partitions en induit un autre sur les familles de coupes croissantes, i.e. sur les hiérarchies de \mathcal{H} , selon lequel $H_1 \ll H_2$ ssi à chaque niveau k l'on a $\pi_1(k) \ll \pi_2(k)$. D'où le corollaire:

Corollary 15 *La proposition 14 montre que l'ensemble \mathcal{H} des hiérarchies de classes dans \mathcal{S} est lui-même un treillis. Tous ces treillis sont finis, donc complets.*

Connexions En ce qui concerne la segmentation connective, la famille \mathcal{S} des classes vérifie la proposition 16 et le théorème 17 suivants:

Proposition 16 *La famille $\mathcal{S} \cup \emptyset$ est une connexion, et tout critère binaire $\sigma : (\mathcal{F}, \mathcal{S} \cup \emptyset) \rightarrow \{0, 1\}$ relatif à $\mathcal{S} \cup \emptyset$ est nécessairement connectif.*

Proof. Montrons d'abord que $\mathcal{S} \cup \emptyset$ est une connexion. Cette famille contient l'ensemble vide et les singletons de $\mathcal{P}(E)$. Soit $\{S_k, k \in K\}$ une famille d'intersection non vide dans $\mathcal{S} \cup \emptyset$, et $x \in \cap S_k$. Comme tous les éléments de \mathcal{S} qui contiennent x sont ordonnés selon la chaîne finie \mathcal{S}_x , l'un des S_k , disons $S_{k_{\max}}$ contient tous les autres, donc $\cup S_k = S_{k_{\max}} \in \mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{S} \cup \emptyset$, et $\mathcal{S} \cup \emptyset$ est une connexion. On peut donc définir des critères connectifs à son sujet (cf annexe I).

Considérons maintenant un critère binaire σ sur $(\mathcal{F}, \mathcal{S} \cup \emptyset)$, que nous supposons vérifié par tous les S_k . Comme la famille $\{H_s, s \in \mathcal{S}\}$ est croissante et finie, on a comme précédemment $\cup S_k = S_{k_{\max}} \in \{S_k, k \in K\}$, donc $\sigma(f, \cup S_k) = \sigma(f, S_{k_{\max}}) = 1$. Q.E.D. ■

Ultramétriques Une distance est qualifiée d'ultramétrique quand l'inégalité triangulaire y est remplacée par l'axiome plus sévère suivant [16],[7]:

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}. \quad (20)$$

Deux boules ultramétriques ne peuvent être que disjointes ou concentriques. L'équation (20) implique donc que l'ensemble des boules fermées de rayon r fixé induit une tessellation de Voronoï π_r sur E , de classes les boules ouvertes d'une part, et l'ensemble des frontières de l'autre. Toujours d'après la même équation (20) cette tessellation de Voronoï ne dépend plus explicitement d'un ensemble de sites mais du rayon r . Quand le domaine de variation de r est fini, la famille $H = \{\pi_r, r \geq 0\}$ forme une hiérarchie paramétrisée par la fonction qui assigne son rayon à chaque boule ultramétrique. Inversement d'ailleurs, chaque hiérarchie de partitions détermine une ultramétrique sur l'ensemble \mathcal{S} des classes de H [7]. Il est donc équivalent de se donner une ultramétrique ou une hiérarchie de partitions. Cet aspect est étudié en détail par P. Arbelaez et L. Cohen dans [3], ainsi que par F. Meyer et L. Najman dans [23].

Cette équivalence n'est pas sans rappeler la propriété caractéristique des classes d'une hiérarchie de l'équation (17). De fait, les trois concepts de hiérarchie indexée, d'ultramétrique et de critère connectif universel sont trois aspects d'une même notion. Plus précisément:

Theorem 17 *Les trois énoncés suivants sont équivalents:*

1. H est une hiérarchie indexée,
2. l'ensemble \mathcal{S} des classes des partitions π_i de H est un espace ultramétrique, de distance l'indexation de la hiérarchie,
3. tout critère binaire $\sigma : (\mathcal{F}, \mathcal{S} \cup \emptyset) \rightarrow \{0, 1\}$ est connectif.

Proof. L'implication (1) \Rightarrow (3) vient d'être prouvée par la proposition 16, et l'équivalence (1) \Leftrightarrow (2) est un résultat classique [7]. Il reste à démontrer que (3) \Rightarrow (1). Remarquons d'abord qu'étant donnés deux ensembles fixes B_1 et B_2 , le critère " $\sigma^*(f, A) = 1$ ssi $A \subseteq B_1$ ou $A \subseteq B_2$ " est connectif ssi $B_2 \subseteq B_1$ ou $B_1 \subseteq B_2$. Soit alors une famille H de partitions. Si elle n'est pas hiérarchique, il existe au moins un point x inclus dans deux classes B_1 et B_2 de partitions de H telles que l'on ait ni $B_2 \subseteq B_1$ ni $B_1 \subseteq B_2$ ce qui entraîne que le critère σ^* n'est pas connectif, et qui achève la démonstration. ■

Voilà qui pousse à renoncer aux charmes de la segmentation connective, et à changer le fusil d'épaule...

3.4 Coupes d'énergie minimales dans $\Pi(E)$

Pour ce faire, nous partons d'un problème formulé par L. Guigues dans sa thèse [18], et résolu par lui dans le cadre d'énergies additives, et de hiérarchies binaires (voir aussi Guigues et Al.[17]). La première de ces deux conditions est remplacée ci-dessous par la relation (21) de croissance hiérarchique de l'énergie, qui est plus générale, et la seconde condition n'est pas nécessaire. Nous étudions de plus la structure des solutions.

3.4.1 Minimisation sous croissance hiérarchique

Donnons nous une énergie ω sur la réunion $\tilde{\Pi}$ des familles de coupes de l'équation (18), c'est à dire une fonction numérique positive quelconque $\omega : \tilde{\Pi} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous nous proposons de caractériser la ou les coupes de $\Pi(E)$ d'énergie minimale. Comme la famille $\Pi(E)$ est finie, elle contient toujours au moins une coupe $\pi^*(E)$ de plus petite énergie; plus généralement, pour tout noeud S , la famille $\Pi(S)$ des coupes de la hiérarchie de sommet S admet au moins une coupe minimale $\pi^*(S)$.

La recherche des coupes minimales se simplifie quand on relie les énergies des couples père/fils S et T . Nous proposons de prendre ici la relation

$$\omega(\pi_1(T)) \leq \omega(\pi_2(T)) \quad \Rightarrow \quad \omega[(\pi_1(T) \sqcup \pi(S \setminus T))] \leq \omega[(\pi_2(T) \sqcup \pi(S \setminus T))], \quad (21)$$

dite de *croissance hiérarchique*, qui signifie que si l'énergie de la coupe $\pi_1(T)$ est plus faible que celle de $\pi_2(T)$, l'inégalité se transmet aux coupes de S , i.e. $(\pi_1(T) \sqcup \pi(S \setminus T))$ et $(\pi_2(T) \sqcup \pi(S \setminus T))$, où $\pi(S \setminus T)$ est une coupe quelconque du complément $S \setminus T$. L'implication (21), qui associe des partitions de deux espaces différents, relève de la segmentation partielle au sens de Ch. Ronse [29].

Proposition 18 *Soit S un noeud d'une hiérarchie H , ayant pour p fils les noeuds $T_1..T_p$ auxquels sont associées p coupes minimales $\pi_1^*.. \pi_p^*$. L'une des deux coupes*

$$\pi_1^* \sqcup \pi_2^*.. \sqcup \pi_p^*, \quad (22)$$

ou la partition ayant S pour seule classe, est coupe minimale de S .

Proof. La croissance hiérarchique entraîne que la coupe (22) est la moins énergétique de toutes les coupes du type $A = \sqcup \{\pi(T_k); 1 \leq k \leq p\}$ (ce qui n'implique pas qu'elle soit unique). Or d'après la décomposition (19), toute coupe de S est soit un élément de $\Pi'(S)$, soit S lui-même. L'ensemble formé de la coupe (22) et de S contient donc au moins une coupe minimale de S . ■

La proposition 18 restreint à deux le nombre des comparaisons à effectuer quel que soit celui des fils de S . Elle fait intervenir la condition de croissance hiérarchique (21) qui sans être obligatoire, n'en demeure pas moins facile à vérifier, et tolère des types d'énergies assez variés. L. Guigues et Al. ont étudié le cas des énergies séparables, i.e. vérifiant la relation d'additivité

$$\omega(T_1 \sqcup T_2.. \sqcup T_p) = \sum_{1 \leq k \leq p} \omega(T_k) \quad (23)$$

entre l'énergie d'une partition et celles de ses classes. Il s'agit d'un cas particulier de la croissance hiérarchique, bien que l'algorithme proposé dans [18], p.142, pour trouver une coupe optimale s'applique, lui, à tout ω hiérarchiquement croissant. Il consiste à parcourir une seule fois les noeuds de H selon un ordre ascendant de type lexicographique, et à déterminer en chaque noeud S une coupe minimale provisoire en fonction de celles de ses fils T_k (déjà parcourus). Que la hiérarchie soit binaire ou pas, ce minimum partiel porte sur deux termes.

3.4.2 Treillis des coupes minimales.

Rien, dans ce qui précède, n'impose à la hiérarchie H d'admettre une unique coupe d'énergie minimale. Chaque noeud S arrive avec son propre lot de comparaisons, et il se peut fort bien que dans la famille $\Pi(S)$ exprimée par la relation (19) une coupe minimale de $\Pi'(S)$ ait la même énergie que S , ce qui donne deux solutions qui sont véhiculées ensuite tout au long de la récurrence. Et comme un tel doublon peut apparaître à propos de chaque de noeud S de H , le nombre des solutions reste *a priori* indéfini. Toutefois, au noeud S il y en a toujours une plus grande pour l'ordre \ll , à savoir S lui-même, puis une plus grande des plus grandes, etc. En définitive, on trouve donc un treillis de solutions, dont le cardinal augmente ou diminue selon que l'on a quantifié ω en tranches plus ou moins épaisses.

Quel parti tirer de cette structure? Tout d'abord, elle résoud le problème de l'unicité. Puisque le treillis garantit qu'il existe toujours une unique plus grande solution, il faut remplacer le problème "trouver la coupe qui minimise l'énergie" par "trouver la plus grande coupe qui minimise l'énergie". Cette plus grande solution est caractérisée par la proposition suivante:

Proposition 19 *Soit $\{x\}$ un élément de la base d'une hiérarchie H à $n + 1$ niveaux, et $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x)$ la succession des noeuds antécédants de $\{x\}$. Soit ω une énergie croissante pour la hiérarchie sur $\Pi(E)$, et $\pi^*(E)$ une coupe minimale de $H(E)$ pour cette énergie. La classe de $\pi^*(E)$ qui contient $\{x\}$ est alors $S_i(x)$ telle que*

$$\omega[\pi^*(S_{i-1}(x))] \geq \omega[\pi^*(S_i(x))] \quad (24)$$

$$i \leq j < p \Rightarrow \omega[\pi^*(S_j(x))] < \omega[\pi^*(S_{j+1}(x))] \quad (25)$$

Proof. On remonte à travers les antécédants $x_i(b)$ de b en gardant à chaque niveau l'énergie a plus petite, jusqu'au moment où tous les niveaux plus élevés ont une énergie strictement plus grande. ■

On peut aussi chercher à greffer une seconde optimisation sur la première. Par exemple, pour des images en couleur, on fait porter ω sur la luminance, et on choisit entre les coupes optimales à l'aide d'un second critère qui agit sur le produit saturation \times teinte.

3.4.3 Minimisation avec partitions exogènes

Il se peut que, pour certaines raisons, l'on ait intérêt à compléter la famille $\tilde{\Pi}$ de la relation (18) par d'autres partitions. On peut par exemple vouloir supprimer des petites classes en les regroupant avec leurs voisines. Cela conduit à introduire l'ensemble $\Xi(S)$ des partitions partielles de S dont toutes les classes sont réunions de plus d'un T_k , comme par exemple la classe $\xi(T_1, T_2)$ en figure 19b. Ces coupes supplémentaires du noeud S engendrent la famille (à une permutation d'indice près)

$$\Pi''(S) = \{\pi(T_1) \sqcup \dots \sqcup \pi(T_k) \sqcup \xi(T_{k+1} \dots T_p) \mid 1 \leq k \leq p ; \xi(T_{k+1} \dots T_p) \in \Xi(S)\}, \quad (26)$$

qu'il faut rajouter à celle, $\Pi(S)$, due aux fils légitimes (relation (19)). La proposition 18 se reformule maintenant de la façon suivante

Proposition 20 Soit S un noeud d'une hiérarchie H , ayant pour p fils les noeuds $T_1..T_p$ auxquels sont associées p coupes minimales $\pi_1^*, ..\pi_p^*$. Les éléments minimaux de l'ensemble formé par

i) la coupe

$$\pi_1^* \sqcup \pi_2^* .. \sqcup \pi_p^*, \quad (27)$$

ii) la famille

$$\{\pi_1^* \sqcup \pi_2^* .. \sqcup \pi_k^* \sqcup \xi(T_{k+1}, ..T_p) ; \xi \in \Xi(S)\}, \quad (28)$$

contiennent des coupes minimales de S .

Proof. La croissance hiérarchique entraîne que quand $\pi(T_1) \in \Pi(T_1), .. \pi(T_p) \in \Pi(T_p)$, la coupe (27) est la moins énergétique de toutes les coupes du type $A = \sqcup\{\pi(T_k); 1 \leq k \leq p\}$ (ce qui n'implique pas qu'elle soit unique). Toujours par croissance hiérarchique, lorsqu'on fixe une partition $\xi \in \Xi(S)$ de support $\cup(T_{k+1}, ..T_p)$, la famille des coupes de type

$$B(\xi) = \pi(T_1) \sqcup \pi(T_2) .. \sqcup \pi(T_k) \sqcup \xi ; \quad \pi(T_1) \in \Pi(T_1) .. \pi(T_k) \in \Pi(T_k)$$

admet pour élément minimal $\pi_1^* \sqcup \pi_2^* .. \sqcup \pi_k^* \sqcup \xi$. Or d'après la décomposition (19), toute coupe de S est soit du type A , soit d'un des types $\{B(\xi), \xi \in \Xi(S)\}$. L'ensemble formé de la coupe (27) et de la famille (28) contient donc au moins une coupe minimale de S . ■

La proposition 20 restreint le nombre des comparaisons à effectuer la coupe minimale de $H(S)$ à partir de celles de ses fils. Voyons plus précisément combien de comparaisons sont nécessaires quand S a 2, 3 ou 4 fils. Pour deux fils T_1 et T_2 , il suffit de comparer les énergies des deux termes $\pi_1^* \sqcup \pi_2^*$ et $S = T_1 \cup T_2$. Quand un troisième fils T_3 se rajoute, on passe à cinq termes: $\pi_1^* \sqcup \pi_2^* \sqcup \pi_3^*$, $T_1 \cup T_2 \cup T_3$, et les trois coupes du type $\pi_1^* \sqcup \xi(T_2, T_3)$ (cf. figure 19). Pour les noeuds à quatre fils, on trouve de même $1 + C_4^2 + C_4^3 + 4 = 15$ possibilités. Par ailleurs, toutes ces valeurs ne peuvent que diminuer lorsqu'on exige en plus que les classes des partitions ξ soient connexes.

Au total, l'algorithme de calcul en une passe reste valide, mais demande un peu plus de comparaisons à chaque noeud. En revanche, les solutions ne forment plus un treillis, ce qui est loin d'être négligeable.

3.5 Exemples de minimisations hiérarchiques

Les exemples qui suivent reviennent sur les études de l'introduction, et les interprètent dans le cadre qui vient d'être proposé. Ces études sont en règle générale bien plus riches que ce qui en est retenu ici, où nous nous concentrons sur leur aspect d'optimisation hiérarchique.

3.5.1 Énergies composées par supremum

Envisageons d'abord des énergies qui se composent par supremum selon un mode semblable à la relation d'additivité (23). Si $T_1, ..T_k, ..T_p$, sont les classes de la partition π , on a donc

$$\pi = T_1 \sqcup T_2, .. \sqcup T_p \Rightarrow \omega(\pi) = \sup\{\omega(T_k), 1 \leq k \leq p\}. \quad (29)$$

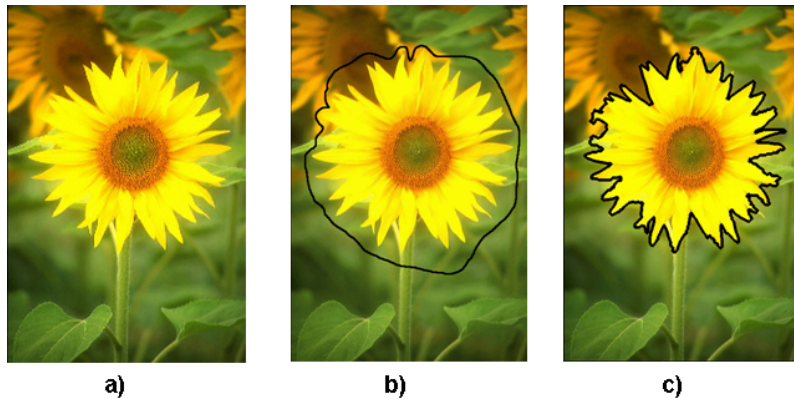


Figure 20: a) image initiale; b) lasso manuel; c) contour par union des classes intérieures au lasso.

Les énergies impliquées dans la loi (29), qui de toute évidence croissent hiérarchiquement, se prêtent donc aux optimisations précédentes. En voici deux exemples, où l'on suppose de plus que l'énergie est une fonction décroissante des classes, i.e.

$$T \subseteq S \quad \Rightarrow \quad \omega(T) \leq \omega(S) \quad T, S \in \mathcal{S}. \quad (30)$$

Cette dernière condition semble contradictoire avec la montée hiérarchique vers une coupe d'énergie minimale, puisque la partition en singletons, d'où l'on part, est déjà solution. Mais elle retrouve du sens si l'on quantifie l'énergie en 0 et 1, et qu'on cherche, dans le treillis des solutions, quelle est la plus grande.

Lasso Cet algorithme, dû à F. Zanoguera et Al. [45], [46] est repris dans [23]. Dans un premier temps, l'image a été segmentée par zones α -plates (cf. annexe II), qui engendrent une hiérarchie quand on fait varier la pente α . Pour en extraire un objet, on se place dans l'image initiale, où l'on trace manuellement une courbe fermée autour de l'objet. Désignant par A l'intérieur de ce lasso, on prend pour énergie

$$\begin{aligned} \omega(S) &= 0 & \text{si } S \subseteq A ; S \in \mathcal{S} \\ \omega(S) &= 1 & \text{sinon,} \end{aligned}$$

et l'on passe des classes aux partitions par la loi (29) de \vee -composition des énergies. La plus grande coupe qui minimise ω est représentée en figure 20c. On voit que son contour reste accroché aux bords des pétales. De fait, une classe de segmentation ne peut franchir ce gradient élevé que pour un α assez grand, et dès lors elle s'étend au delà du tracé du lasso.

Segmentation sous contrainte Il s'agit de la méthode proposée par P. Soille et J. Grazzini dans [41] et [43] avec plusieurs variantes, et reformulée par C. Ronse dans un cadre plus général

[31]. On prend cette fois pour énergie pour les classes

$$\begin{aligned}\omega(S) &= 0 & \text{si } \sup\{f(x), x \in S\} - \inf\{f(x), x \in S\} \leq \omega_0 \\ \omega(S) &= 1 & \text{sinon,}\end{aligned}$$

où ω_0 est un seuil donné, et on l'étend aux partitions par \vee -composition. Dans les exemples de [41] et [43], la hiérarchie est obtenue par zones α -plates, avec parfois l'intersection de ce critère pour différents canaux, et aussi avec le critère "présence d'au moins un extremum de f dans S ". Dans la plus grande partition d'énergie minimale, la classe en x est définie par le plus grand $S \in \mathcal{S}$, contenant x , et tel que l'amplitude de variation de f dans S soit $\leq \omega_0$.

3.5.2 Energies composées additivement

Modèles séparables Il s'agit d'énergies dont l'archétype est donné par la fonctionnelle classique de Mumford et Shah. D'une manière générale, on construit des énergies séparables dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{Z}^2 en partant d'une tessellation (et non plus d'une partition) de S entre ses fils T_1, \dots, T_p plus l'ensemble Γ de leurs frontières. Une première mesure ω_μ porte sur les T_k , une seconde, ω_ν , sur leurs frontières ∂T_k , et l'on pose

$$\omega(S) = \sum_{1 \leq k \leq p} \omega_\mu(T_k) + \omega_\nu(\partial T_k), \quad (31)$$

(dans l'esprit de la géométrie intégrale, on pourrait rajouter un terme proportionnel à la constante d'Euler-Poincaré). Ces modèles sont séparables au sens de L. Guigues et Al. [18] [17] en ce que qu'à des effets de bords près, il vient $\omega(S) = \omega(T_1) + \dots + \omega(T_p)$. L'énergie ω , additive, est donc hiérarchiquement croissante. Le lecteur trouvera dans la thèse [18] une série de variantes de la méthode, et aussi d'exemples très instructifs.

Les imagettes La création d'imagettes (thumbnails) par Ph. Salembier et L. Garrido [34] relève des modèles séparables, mais est antérieure à leur formulation dans [18]. On cherche à construire des versions réduites d'images en couleur. L'image de départ f donne lieu à une hiérarchie de segmentations, et dans chaque région T la fonction f est remplacée par sa valeur moyenne $m(T)$. Cette approximation est estimée en norme L_2 , soit

$$\omega_\mu(T) = \sum_{x \in R} \|f(x) - m(T)\|^2.$$

De plus, si le coût de codage d'un élément de frontière vaut k , celui de toute la région T vaut

$$\omega_\nu(T) = 24 + \frac{k}{2} |\partial T|$$

avec 24 bits pour la couleur de la région T elle-même. L'énergie totale d'une coupe s'écrit $\omega(S) = \lambda \omega_\mu(S) + \omega_\nu(S)$, et conduit à une première minimisation à λ fixé, puis une seconde relativement au paramètre de Lagrange λ .

3.5.3 Autres lois de composition

Bien des lois reliant l'énergie d'une partition à celles de ses classes, et compatibles avec la croissance hiérarchique, sont imaginables. Nous venons de voir le supremum et la somme, mais pensons aussi à l'inf, au produit, au sup-inf, à la somme quadratique, et à leurs combinaisons. On peut de plus faire dépendre ω de groupes de classes, ou de la localisation plus ou moins proche des bords de la partition, ou de plusieurs éléments du treillis \mathcal{H} des hiérarchies, etc..

L'exemple des segmentations trichromes de [2] est instructif à ce sujet, car il porte sur les combinaisons de hiérarchies en parallèle ou en série dans un contexte multi-spectral. Trois hiérarchies H_l, H_s , et H_h de segmentations de la luminance, la saturation et la teinte d'une image en couleur sont données. Dans [2], on en extrait trois coupes horizontales π_l, π_s , et π_h et selon que la moyenne de la saturation dans la classe $T_s \in \pi_s$ est $<$ ou \geq à un seuil prédéterminé s_0 , on remplace T_s par $T_s \cap \pi_l$ ou par $T_s \cap \pi_h$. Aussi bien, dans les régions faiblement saturées, la segmentation de la luminance signifie davantage, et dans celles fortement saturées, celle de la teinte.

Mais il est facile d'aller plus loin, et de plusieurs manières. En voici deux. On peut d'abord estimer, conformément aux histogrammes bi- et tri-dimensionnels de [2], qu'une classe de saturation T_s est d'autant plus représentative d'objets colorés que la teinte y varie peu. Une faible variabilité de la luminance est moins significative. Cela suggère de prendre pour énergie $\omega(T_s)$ l'accroissement quadratique moyen de h (et non plus de s) dans la classe T_s :

$$\omega(T_s) = \frac{1}{\text{aire}T_s} \int \int_{T_s} [h(x) - h(y)]^2 dx dy,$$

et pour loi de composition la moyenne des $\omega(T_s)$ pondérés par leurs aires. La coupe optimale de la hiérarchie H_s garantit alors la faible variation de h à l'intérieur de chacune de ses classes T_s . S'il y a plusieurs solutions, choisit celle de plus faible variabilité de la luminance. La segmentation s'achève comme dans [2], i.e. en remplaçant T_s par $T_s \cap \pi_l$ ou par $T_s \cap \pi_h$ selon le seuil s_0 .

Pour ceux qui trouvent gênant l'arbitraire du paramètre s_0 , voici une autre approche. Nous reprenons la hiérarchie H_s , supposée ordonnée suivant un critère de régularité spatiale (la connexion par sauts de [2], ou la connexion lisse de l'annexe II). La saturation variant entre 0 et 1, l'énergie des classes vaut maintenant

$$\omega(T_s) = \frac{1}{\text{aire}T_s} [1 - \int_{T_s} s(x) dx], \quad (32)$$

avec pondération par les aires pour passer aux énergies des partitions. D'où la coupe minimale $\bar{\pi}_s$. On recommence l'opération en remplaçant $1 - \int_{T_s} s(x) dx$ par $\int_{T_s} s(x) dx$ dans (32), d'où une nouvelle coupe minimale $\underline{\pi}_s$. Il ne reste plus qu'à intersecter les deux partitions $\bar{\pi}_s$ et $\underline{\pi}_s$. Si la classe $T(x)$ en x de l'intersection est plus lumineuse que sombre, au sens des deux énergies, on l'étiquette "teinte"; et si elle est plus sombre, ou égale, on l'étiquette "luminance". Pour finir, on retient la segmentation selon π_h dans la réunion des classes "teinte" et la segmentation selon π_l dans la réunion des classes "luminance".

4 Conclusion

Deux traits qu'on retrouve souvent dans la pratique des segmentations d'image nous ont conduit à deux développements. Nous avons cherché à remédier à la surabondance de petites zones parasites, le premier trait, en introduisant par la proposition 3 un ordre nouveau, dit la construction, pour les ensembles et les partitions. Dans la foulée, nous avons trouvé des opérateurs idempotents, et extensifs pour cet ordre. Grâce à eux, nous avons résolu la question des petites classes, et nous avons établi une procédé pour combiner des partitions. Puis, passant au second trait, à savoir l'utilisation de hiérarchies de partitions comme outil de segmentation, nous avons recherché quel sens on pouvait donner à la notion de coupes optimales dans une hiérarchie, quelles lois les régissaient. Pour pouvoir progresser dans la jungle des coupes possibles, nous nous sommes donné l'hypothèse de croissance hiérarchique, par la relation (21). Elle permet de regrouper différentes techniques de segmentation qui jusque là semblaient étrangères entre elles.

Le lecteur subtilement critique remarquera qu'une troisième partie manque au tableau, puisqu'après avoir trouvé des hiérarchies de l'ordre par construction, puis avoir donné les règles pour déterminer des coupes optimales dans les hiérarchies de partitions, nous n'avons pas appliqué celles-ci à celles là. Tout en remerciant ce lecteur, et en appréciant sa sagacité, oserai-je lui suggérer qu'il n'hésite pas à essayer par lui-même, si ses images s'y prêtent...

Remerciements *Je remercie grandement Gilles Bertrand, Jean Cousty, Laurent Najman, et Christian Ronse pour la pertinence de leurs remarques très utiles, et tout autant pour leur inépuisable patience à mon égard.*

References

- [1] Angulo J., *Morphologie mathématique et indexation d'images couleur. Application à la microscopie en biomédecine*. Thèse doctorale, Centre de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines, Paris, décembre 2003.
- [2] Angulo J., Serra, J., Modeling and segmentation of colour images in polar representations *Image and Vision Computing* 25 (2007) 475-495.
- [3] Arbelaez P., Cohen, L.D., Segmentation d'images couleur par partitions de Voronoï, *Traitement du Signal*, 2004 , Vol. 21, N° 5 , p. 407-421
- [4] Arbelaez P., *Une approche métrique pour la segmentation d'images*, thèse de sciences, Univ. Paris Dauphine, 2005
- [5] Bertand G., On topological watersheds *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 22 (2-3) mai 2005. pp. 217–230.
- [6] Beucher S. *Segmentation d'images et Morphologie Mathématique*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 1990.

- [7] Benzécri J. P., *L'Analyse des Données. Tome I : La Taxinomie*. Dunod, Paris, 4ème édition, 1984.
- [8] Voiron-Canicio Ch., Modélisation spatio-morphologique de l'urbanisation du littoral languedocien, UMR ESPACE Un. de Nice, 2007
- [9] Collet Ch., Chanussot J., Chehdi K., *Multivariate image processing* Amazon, 2010
- [10] Cousty J., *Lignes de partage des eaux discrètes: théorie et application à la segmentation d'images cardiaques* Thèse de Sciences, Université de Marne-la-Vallée, octobre 2007
- [11] Cousty J., Bertrand G., Najman L., Couprie M., Watersheds, minimum spanning forests, and the drop water principle. *Rapport technique ESIEE*, 2007
- [12] Cousty J., Najman L., Serra J., Raising in Watershed Lattices, *2008 IEEE Intern. Conf. on Image Processing, ICIP 2008*, San Diego 13 -17 Oct. 2008.
- [13] Cousty J., Bertrand G., Najman L., Couprie M., Fusion graphs: merging properties and watersheds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 30 (1). January 2008. pp. 87–104.
- [14] Cousty J., Najman, L Serra J. Some Morphological Operators in Graph Spaces, in *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing*, M.H.F. Wilkinson and B.T.M. Roerdink, Eds, Lecture Notes in computer Science n° 5720 Springer 2009, pp.149-160.
- [15] Crespo J., Schafer R.W. Serra J., Gratin Ch., Meyer F. , The flat zone approach: A general low-level region merging segmentation method, *Signal Processing*, 62, n°1.1997, 37-60.
- [16] Diday E., Lemaire J., Pouget J., Testu F., *Éléments d'analyse des données* .Dunod, Paris, 1982
- [17] Guigues L., Cocquerez J.P., Le Men H., Scale-Sets Image Analysis, *Int. Journal of Computer Vision* 68(3), 289-317, 2006.
- [18] Guigues L., *Modèles multi-échelles pour la segmentation d'images*.Thèse doctorale Université de Cergy-Pontoise, décembre 2003.
- [19] Heijmans, M.J.A.M. Connected morphological operators. Tech. Rep. CWI No PNA-R9708, April 1997.
- [20] Marr D., *Vision*, Freeman and Co., 1982.
- [21] Matheron G., *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New-York, 1975.
- [22] Meyer F., Graph Based Morphological Segmentation. in *Proc. 2nd IAPR TC-15 workshop on Graph based Representations, Haïndorf, Austria*, 1999, pp. 51-60.

- [23] Meyer F., Najman L. Segmentation, arbres de poids minimum et hiérarchies Ch. 7 in *Morphologie Mathématique I: approches déterministes*, L. Najman et H. Talbot, Eds. Hermès 2009.
- [24] Najman L., and Schmitt M., Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation. *IEEE Trans. on PAMI*, 18(12): 1163-1173, Dec. 1996
- [25] Najman L., Ultrametric watersheds, in *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing*, M.H.F. Wilkinson and B.T.M. Roerdink, Eds, Lecture Notes in computer Science n° 5720 Springer 2009, pp.181-193.
- [26] Najman L., Ultrametric watersheds: a bijection theorem for hierarchical edge segmentation, rapport interne ESIEE, août 2009 (soumis à PAMI),
- [27] Noyel G., Angulo J., and Jeulin D., On distances, paths and connections for hyperspectral image segmentation, *Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology*, Rio de Janeiro, Brazil, Oct. 10 –13, 2007, MCT/INPE, v. 1, p. 399–410.
- [28] Noyel G., *Filtrage, éduction de dimension, classification et segmentation morphologique hyperspectrale*, thèse de sciences, Ecole des Mines, Paris, 2008.
- [29] Rouse, C., Partial partitions, partial connections and connective segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32 (2008) 97–125
- [30] Rouse, C., Segmentation connective contrainte et opérateurs idempotents sur les partitions, transparencies LSIIT UMR 7005 Nov. 2008
- [31] Rouse, C., Block splitting on (partial) partitions for morphological image segmentation (preprint 2009)
- [32] Rouse, C., Serra, J., Fondements algébriques de la morphologie , Ch. 4 in *Morphologie Mathématique I: approches déterministes*, L. Najman et H. Talbot, Eds. Hermès, Paris, juin 2008, 53 p.
- [33] Salembier Ph., Garrido L., Garcia D., Auto-dual connected operators based on iterative merging algorithms, *Mathematical Morphology and its applications to image and signal processing*, H.Heijmans and J. Roerdink eds, Kluwer,1998, pp.183-190.
- [34] Salembier Ph., Garrido L., Binary Partition Tree as an Efficient Representation for Image Processing, Segmentation, and Information Retrieval. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2000, 9(4): 561-576,.
- [35] J. Serra, *Image analysis and mathematical morphology*, Academic Press, London, 1982.
- [36] Serra J. and Mlynarczuk M., Morphological merging of multidimensional data, *Proc. STERMA'2000*, Cracow, Sept. 2000, pp.385-390 and 455.

- [37] Serra, J., A lattice approach to Image segmentation, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24: 83-130, 2006.
- [38] Serra, J., Morphological Segmentation of Colour Images, in *Mathematical Morphology: 40 years on*, Ch. Ronse, L. Najman and E. Decencière, Eds; Springer 2005 pp.151-176.
- [39] Serra, J., Morphological Operators for the Segmentation of Colour Images in *Space, Structure, and Randomness*, Lecture Notes in Statistics, n° 183 (in Memoriam of G. Matheron), M. Bilodeau, F. Meyer and M. Schmitt, Eds. Springer 223-255, 2005.
- [40] Soille, P., On genuine connectivity relations based on logical predicates. In: Proc. of 14th ICIAP, Modena, Italy, IEEE Computer Society Press (2007)487–492
- [41] Soille, P., Constrained connectivity for hierarchical image partitioning and simplification. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 30 (2008)1132–1145
- [42] Soille, P., Grazzini, J. Advances in constrained connectivity. Lecture Notes in Computer Science 4992 (2008) 423–433
- [43] Soille, P., Grazzini, J. Constrained Connectivity and Transition Regions, in *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing*, M.H.F. Wilkinson and B.T.M. Roerdink, Eds, Springer 2009, pp.59-70.
- [44] Wilkinson. M.H.F. An axiomatic Approach to Hyperconnectivity, in *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing*, M.H.F. Wilkinson and B.T.M. Roerdink, Eds, Lecture Notes in computer Science n° 5720 Springer 2009, pp.35-46.
- [45] Zanoguera, F., Marcotegui, B., Meyer, F. A toolbox for interactive segmentation based on nested partitions. In *Proc. of ICIP'99 Kobe (Japan)*, 1999
- [46] Zanoguera, F., *Segmentation interactive d'images fixes et de séquences videos basée sur des hiérarchies de partitions*. Thèse Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique, 2001.

Annexe I : Rappel sur la segmentation connective

Le court rappel qui suit ne vise pas l'exhaustivité. Actuellement, les deux textes majeurs sur la segmentation connective sont dus à Ch. Ronse [29] et à J. Serra [37]. On trouvera une bonne présentation en français dans le livre de L. Najman et H. Talbot [32].

Partons de deux ensembles arbitraires E et T , donnons nous une famille \mathcal{F} de fonctions de E dans T , et une partie \mathcal{P}' de $\mathcal{P}(E)$. On appelle *critère binaire* σ toute application de $(\mathcal{F}, \mathcal{P}')$ dans $\{0, 1\}$. Le critère est confirmé quand $\sigma(f, A) = 1$, pour $f \in \mathcal{F}$ et $A \in \mathcal{P}'$, et infirmé quand $\sigma(f, A) = 0$. L'attribut qui est affirmé ou nié au doublet (f, A) se nomme *prédicat* (ex: la fonction numérique f vaut plus de dix sur tous les points de A).

Une *connexion* \mathcal{C} sur $\mathcal{P}(E)$ est une classe d'ensembles contenant \emptyset ainsi que tous les singletons de $\mathcal{P}(E)$, et telle que pour toute famille $\{C_i\}$ dans \mathcal{C} d'intersection non vide, la réunion $\cup C_i$ appartienne encore à \mathcal{C}

$$\{C_i \in \mathcal{C}, i \in I\} \text{ et } \cap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \cup C_i \in \mathcal{C}. \quad (33)$$

Si l'on retire l'axiome relatif aux singletons, la connexion est dite *partielle* [29] [38].

Comme précédemment, $\mathcal{P}(E)$ est doté de la connexion standard \mathcal{C}^* . Dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$ par exemple il s'agit typiquement de l'une des connexions par chemins. Prenons alors pour \mathcal{P}' la connexion \mathcal{C}^* . On dit que le critère $\sigma : (\mathcal{F}, \mathcal{C}^*) \rightarrow \{0, 1\}$ est *connectif* quand, pour tous les éléments A_i d'une famille dans \mathcal{C}^* d'intersection non vide et vérifiant σ , la réunion $\cup A_i$ vérifie σ à son tour. Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{F}$, et toute famille $A_i \in \mathcal{C}^*$, l'on a

$$\wedge_i \sigma(f, A_i) = 1 \text{ et } \cap_i A_i \neq \emptyset \Rightarrow \sigma(f, \cup_i A_i) = 1. \quad (34)$$

Cette écriture n'a de sens que si \mathcal{C}^* est une connexion au moins partielle, puisqu'elle suppose $A_i \in \mathcal{C}^*$ et $\cap_i A_i \neq \emptyset \Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{C}^*$. Le théorème qui identifie segmentation par partition maximale et connexion (n° 8 dans [37], [29]), et qui est en général énoncé relativement à $\mathcal{P}(E)$, reste vrai quand on remplace $\mathcal{P}(E)$ par la connexion standard \mathcal{C}^* . Pour le vérifier, on reprend, mutatis mutandis, la démonstration du théorème. Il devient alors:

Theorem 21 *Considérons deux ensembles E et T arbitraires, une connexion $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$, et une famille \mathcal{F} de fonctions $f : E \rightarrow T$. Soit un critère binaire $\sigma : (\mathcal{C}^*, \mathcal{F}) \rightarrow \{0, 1\}$. Les quatre énoncés suivants sont alors équivalents:*

- (1) *Le critère σ est connectif,*
- (2) *pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$, les ensembles de \mathcal{C}^* pour lesquels le critère σ est satisfait, à savoir*

$$\mathcal{C} = \{X \mid X \in \mathcal{C}^* \text{ et } \sigma[f, X] = 1\},$$

forment à leur tour une connexion, et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^$,*

- (3) *pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$, la famille des partitions de f en classes dans \mathcal{C}^* qui vérifient le critère σ est stable pour le supremum, ce dernier définissant la segmentation de E selon (σ, f) et selon des éléments de \mathcal{C}^* ,*
- (4) *pour tout ensemble $Z \subseteq E$, σ segmente de même la restriction à Z de toute fonction $f \in \mathcal{F}$.*

La rédaction du théorème vise manifestement la segmentation des fonctions, mais il suffit de remplacer "les classes homogènes selon σ " par "une famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ de parties de E " pour lui conférer une couleur purement ensembliste: l'ensemble des partitions dont les classes composent \mathcal{C} est fermé pour le sup si et seulement si \mathcal{C} est une connexion sur \mathcal{C}^* (donc aussi sur $\mathcal{P}(E)$).

La démarche que nous venons de résumer s'exprime aussi bien dans le cadre des segmentations connectives *partielles*, dont la théorie a été établie par Ch. Ronse [29], et où la différence porte sur le rôle dévolu aux singletons. L'approche partielle formalise mieux les partages de l'espace E entre segmentations différentes, alors que celle que nous venons de présenter brièvement impose aux singletons de vérifier tous les critères σ . Cela permet de prendre en main plus facilement les hiérarchies, dont le premier niveau est souvent formé des singletons de $\mathcal{P}(E)$.

Annexe II : Connexion par zones quasi-plates et connexion lisse

Les études [41], [43], [27] et [28] citées en introduction effectuent des segmentations connectives à l'aide du critère dit des zones α -plates, encore appelées λ -plates ou quasi-plates. Dans la littérature scientifique, l'usage de l'adverbe vague à souhait "quasi" devant un adjectif, révèle souvent quelques surprises. Qu'est-ce par exemple qu'une zone "quasi-plate" Z , dans l'espace de définition d'une fonction numérique dérivable f ? Une zone dans laquelle le module du gradient de f est borné supérieurement par un $\alpha > 0$ que l'on considère comme petit? Ou bien une zone où le module d'une au moins des dérivées directionnelles est $< \alpha$? La différence est considérable.

Si l'on s'en tient à la seconde acception, celle qu'a retenue la littérature, elle signifie dans le cas digital, que tout couple de points de Z est relié par un chemin le long duquel le module de la pente n'excède jamais α . Par exemple, dans la figure 21 a) tous les couples de points sont de ce type (pour la faible valeur de $\alpha = 8$ sur 256 niveaux), puisqu'on peut passer par la petite rampe de pente α pour joindre chaque point du carré clair à la couronne sombre. L'ensemble de la figure constitue donc une seule région, que ses falaises abruptes n'empêchent absolument pas d'être qualifiée de quasi-plate. En revanche, les deux carrés concentriques de la figure 21 b) forment pour le même critère deux régions distinctes, car leurs niveaux de gris diffèrent de 10 !

Pourtant, non seulement ces zones n'ont de quasi-plate que le nom, mais leurs médiocres propriétés devraient faire fuir les plus téméraires. Elles sur-segmentent les images en bordure de champ, où deux zones contigües qui devraient n'en former qu'une apparaissent comme distinctes parce que tous les chemins acceptables de l'une à l'autre passent par l'extérieur du champ. Autre faiblesse: en télédétection, les nuages ne donnent souvent qu'une vision partielle de la région d'étude, et l'on combine plusieurs segmentations issues de passages successifs du satellite. Mais si dans la zone Z , le seul chemin acceptable entre x et y est oblitéré par un nuage aujourd'hui mais pas demain, et entre x' et y' demain mais pas aujourd'hui, comme en figure 21 c), quelle segmentation choisir? Celle qui sépare les classes de x et de y , ou celle qui sépare celles de x' et de y' ?

Il est facile de voir que toutes ces mauvaises propriétés viennent de ce que le critère des zones quasi-plates, bien que connectif, n'est pas décroissant. S'il est vérifié par A et que $B \subseteq A$, il n'est pas nécessairement vérifié par B . Revenons à la première acception, qui signifie en digital que *tous* les chemins (et non plus au moins un) entre un point et ses voisins ont une pente de module $\leq \alpha$. Ce critère, connectif et décroissant, se nomme la connexion lisse [37]. Pour une valeur de α convenable, il découpe la figure 21 a) en trois zones (le carré central clair, la bande sombre autour de lui, et la rampe), il affecte une seule région à la figure 21 b), il connecte les zones adjacentes en bord de champ, et laisse passer les nuages sur Z sans modifier la segmentation des zones visibles (figure 21 c).

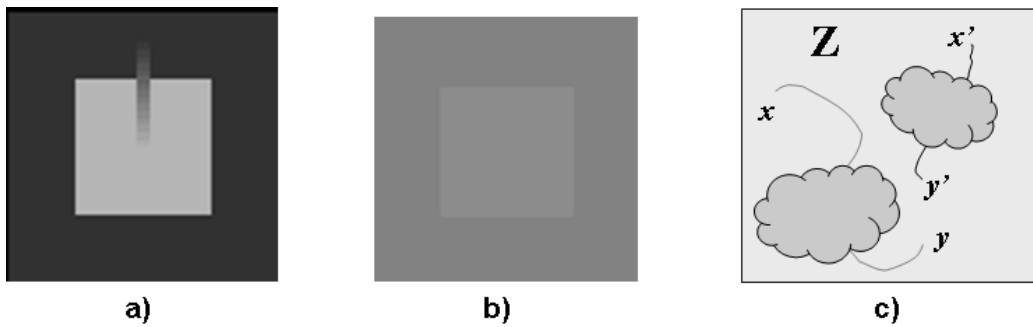


Figure 21: Pour $a = 8$, il y a une seule région α -plate en a), malgré ses falaises verticales, parce qu'on peut passer de haut en bas par la rampe, mais deux régions en b); c) la segmentation de Z en zones quasi-plates varie selon les nuages qui la survolent.

La renommée du critère des zones quasi-plates tient essentiellement à son ancienneté, que le conformisme du milieu scientifique apprécie. Selon les recherches bibliographiques de P. Soille [42] l'apparition des zones quasi-plates en traitement d'images remonte à 1979, et pour les arbres de poids minimum en théorie des graphes, à 1956. Notons que P. Soille et J. Grazzini, qui utilisent le critère des zones quasi-plates dans [41] et [42], mais qui sont de bons physiciens, se placent toujours dans le cas particulier où il coïncide avec la connexion lisse...