petit memento du diagramme de bode

DENNEWALD Nicolas
CLUB*NIX

ce raport a été rédigé en latex et les shémas ont étés réalisés à l'aide du logiciel GNUPlot.

Table des matières

1 Remerciements

Je tiens à remercier mr Lionel BABADJIAN pour ses conseils. Je tiens également à remercier trax (Omar Givernaud) ,spectre (Adrien Boussicault), Donax (Axel Beaugendre), mic (Aymeric Martin), mad (Marc-André Doll) et bien d'autres pour leurs aides sur le plan mathématique et informatique.

2 $H_1(j\omega)$

la fonction de transfert $H_1(j\omega)$ est :

$$H_1(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|H_1(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$G = 20log_{10}(|H_1(j\omega)|)$$

$$G = 10log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Analyse des assymptotes.
si ω est très inférieur à ω_0 alors on a :

$$G = 10log_{10}(1) = 0dB/dec$$

si ω est très supérieur à ω_0 alors on a :

$$G = 10log_{10}\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

$$G = 20log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

soit $\omega_1 = 10\omega$ on a alors G1 :

$$G1 = 20log_{10}\left(\frac{10\omega}{\omega_0}\right)$$

$$G1 = 20log_{10}(10) + 20log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

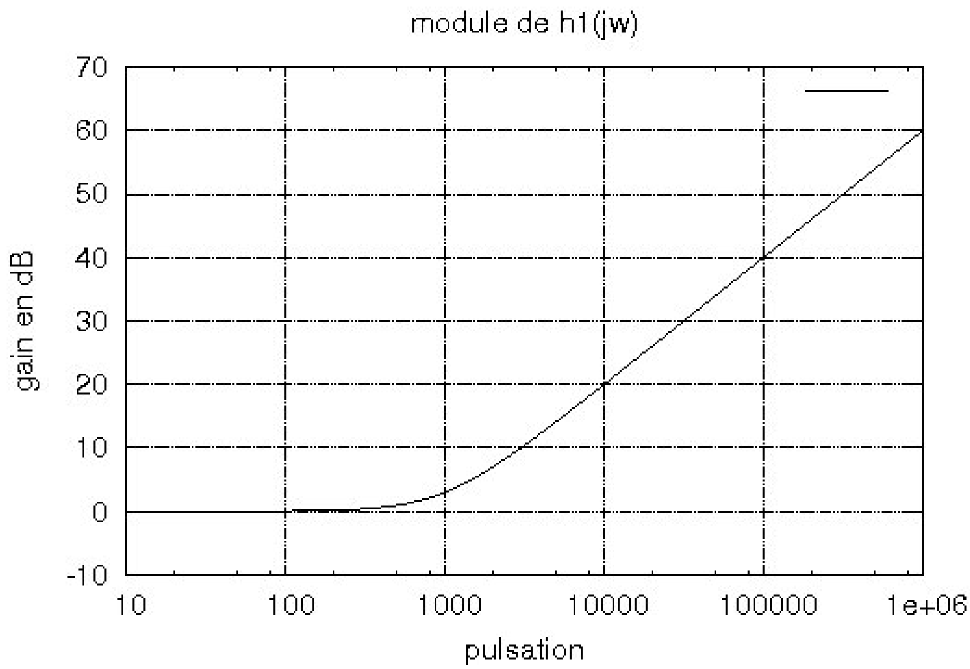
$$G1 = 20 + G$$

on a donc une pente à +20 dB/decade
La courbe réelle est donc similaire à la courbe assymptotique si ce n'est que pour $\omega = \omega_0$ on a :

$$G(\omega_0) = 20log_{10}(2) = 3dB$$

La courbe réelle va donc avoir un gain de -3dB en ω_0, va tendre vers 0 dans les basses fréquences et va tendre vers $+\infty$ dans les hautes fréquences avec la pente à +20db/dec.

voici la représentation de h1(jω) avec $\omega_0 = 1000$



3 $H_2(j\omega)$

la fonction de transfert $H_2(j\omega)$ est :

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{H_1(j\omega)}$$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{1}{|H_1(j\omega)|}$$

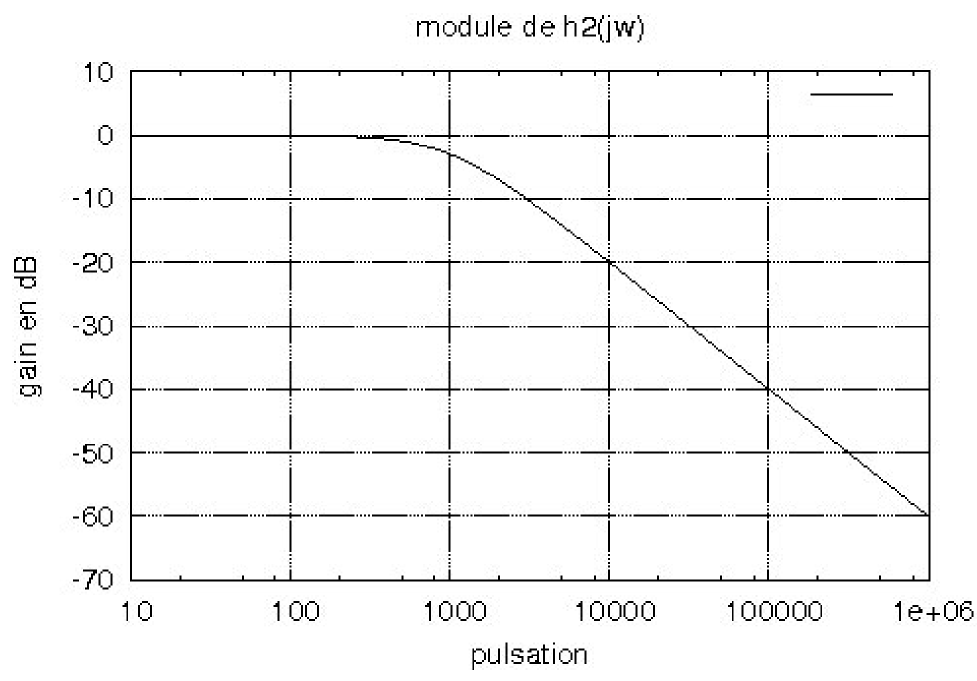
par conséquent le gain G est :

$$G = 20log_{10}(|H_2(j\omega)|)$$

$$G = 20log_{10}(\frac{1}{|H_1(j\omega)|})$$

$$G = -20log_{10}(H_1(j\omega))$$

En assymptotes ,on a donc une pente à 0dB/dec quand ω est inférieur à ω_0 et une pente à -20dB/dec quand ω est supérieur à ω_0. La courbe réelle va donc avoir la même allure que $H_1(j\omega)$ mais en inversée par rapport à l'axe des abscices et pour $\omega = \omega_0$ on aura donc un gain de -3dB. voici la représentation de h2(jω) avec $\omega_0 = 1000$



4 $H_3(j\omega)$

la fonction de transfert $H_3(j\omega)$ est :

$$H_3(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$$

on a donc :

$$|H_3(j\omega)| = \frac{\omega}{\omega_0}$$

le gain G a donc pour formule dans ce cas là :

$$G = 20log_{10}(|H_3(j\omega)|)$$

$$G = 20log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

soit $\omega_1 = 10\omega$ on a :

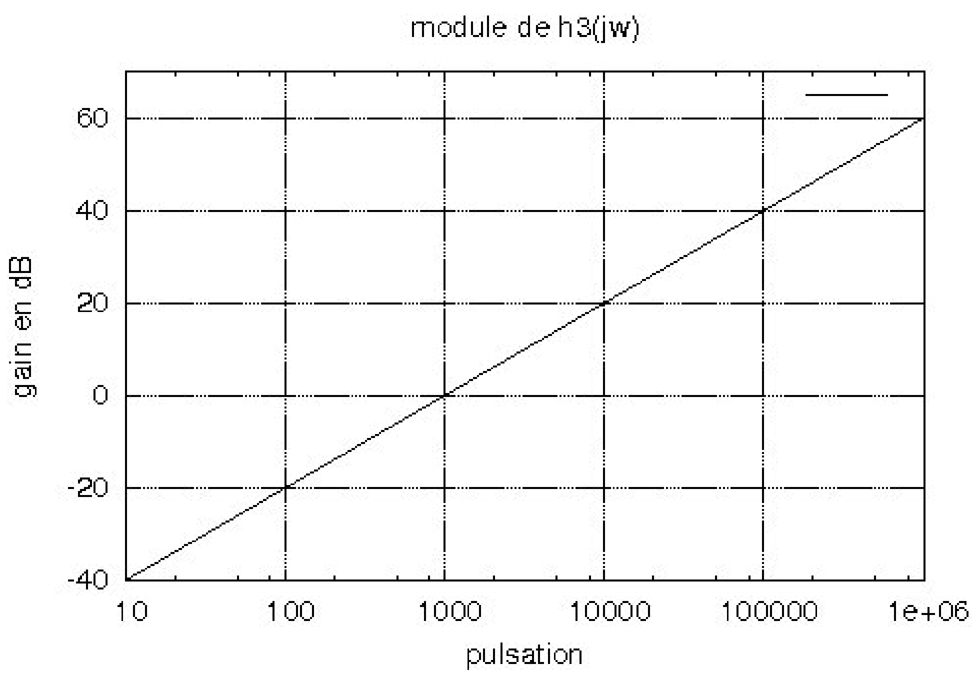
$$G1 = 20log_{10}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)$$

$$G1 = 20log_{10}\left(\frac{10\omega}{\omega_0}\right)$$

$$G1 = 20log_{10}(10) + 20log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$G1 = 20 + G$$

C'est donc une droite depente +20dB/dec tout le temps. voici la représentation de h3(jω) avec $\omega_0 = 1000$



5 $H_4(j\omega)$

la fonction de transfert $H_4(j\omega)$ est :

$$H_4(j\omega) = \frac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

$$H_4(j\omega) = \frac{1}{H_3(j\omega)}$$

on a donc :

$$|H_4(j\omega)| = \frac{1}{|H_3(j\omega)|}$$

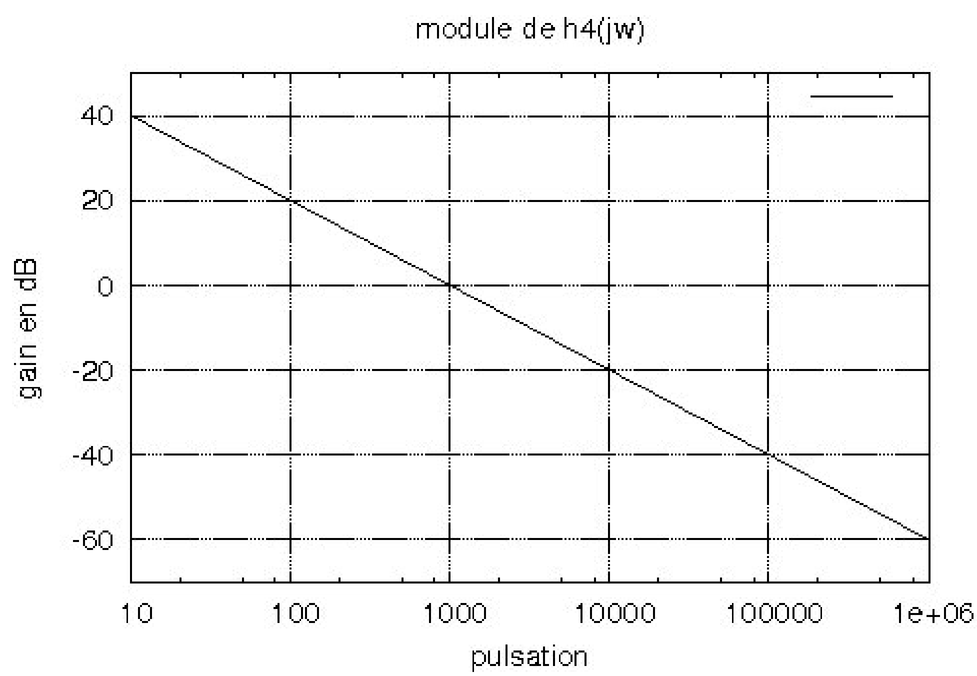
ainsi on a :

$$G = 20log_{10}(|H_4(j\omega)|)$$

$$G = 20log_{10}(\frac{1}{|H_3(j\omega)|})$$

$$G = -20log_{10}(|H_3(j\omega)|)$$

C'est donc une droite de pente -20dB/dec tout le temps. voici la représentation de h4(jω) avec $\omega_0 = 1000$



6 cas d'un circuit du second ordre

La fonction de tranfert peut être ramenéeà la forme suivante :

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_0} + 1}$$

ceci est un polynôme du second degré en $j\frac{\omega}{\omega_0}$ c'est comme si nous avions ce polynôme :

$$x^2 + 2\xi x + 1$$

on peut donc chercher les racines de ce polynôme.

$$\Delta = (2\xi)^2 - 4$$

$$\Delta = 4\xi^2 - 4$$

$$\Delta = 4(\xi^2 - 1)$$

les solutions sont δ_1 et δ_2.On a :

$$\delta_1 = \frac{-2\xi - \sqrt{4(\xi^2 - 1)}}{2} \text{ et } \delta_2 = \frac{-2\xi + \sqrt{4(\xi^2 - 1)}}{2}$$

$$\delta_1 = -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \text{ et } \delta_2 = -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$$

on a alors la factorisation de la forme

$$(x - \delta_1)(x - \delta_2)$$

soit donc dans notre cas la fonction de transfert deviendra donc :

$$\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0} - \delta_1\right)\left(j\frac{\omega}{\omega_0} - \delta_2\right)}$$

si ξ est égal à 1 on a alors :

$$\frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

dans ce cas on aura 0 dB par décade avant ω_0 et une pente à -40 dB par décade après ω_0. Si ξ est superieur à 1 on aura une trois phases distinctes. Tout d'abord 0 dB par décade ensuite -20 dB par décade et enfin -40 dB par décade.

Enfin si ξ est inferieur à 1 on aura une pente à -40 dB par décade mais avec un pic au niveau du module au voisinage de ω_0. Pour preuve si l'on fait tendre ξ vers 0 alors :

$$\lim_{\xi \to 0} \delta_1 = -j$$

$$\lim_{\xi \to 0} \delta_2 = j$$

$$\lim_{\xi \to 0} H(j\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0} - j\right)\left(j\frac{\omega}{\omega_0} + j\right)}$$

$$\lim_{\xi \to 0} H(j\omega) = \frac{1}{-\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)}$$

quand ω tend vers ω_0 on remarque que la fonction de transfert tend vers une valeur infinie dans le positif ce qui explique que le gain G admette un pic au voisinage de ω_0. Plus ξ est petit (proche de 0) plus le gain aura un pic important en ω_0. voici la représentation de h(jω) avec $\omega_0 = 1000$ et ξ pris pour avoir une résonnance.