Gilles Bertrand
Contrôle du mardi 9 décembre 2003

Algorithmique et Applications
Sans documents

I - Césure de paragraphe
(environ 14 pts)

On considère le problème de la césure d'un paragraphe en lignes de texte. Les données d'entrée forment une séquence de n mots de longueurs $l_1, l_2, ..., l_n$, ces longueurs étant mesurées en caractères. On souhaite décomposer cette séquence en un certain nombre de lignes qui contiennent un maximum de M caractères chacune.
On introduit un critère d'équilibre "agréable à l'oeil" qui est le suivant. On s'impose de laisser au moins un caractère entre chaque mot d'une ligne. Si une ligne contient les mots i à j, $i \leq j$, l'espacement supplémentaire correspondant à cette ligne est $M - j + i - \sum_{k=i}^{j} l_k$, cet espacement doit être positif ou nul pour que les mots tiennent sur la ligne. On désire minimiser la somme, pour toutes les lignes hormis la dernière, des carrés des espacements supplémentaires relatifs à chaque ligne.
1) (*Cette question n'est pas indispensable pour traiter la suite du problème*). Ce critère d'optimisation est quelque peu arbitraire. Quel peut-être l'intérêt de prendre la somme des carrés plutôt que la simple somme des espacements supplémentaires? Illustrer votre réponse.
2) Proposer une méthode permettant de résoudre le problème de la césure d'un paragraphe. Cette méthode sera basée sur le principe de la programmation dynamique.
On indiquera soigneusement l'équation de récurrence ainsi que la sémantique des termes employés.
Indiquation : la récurrence porte sur un seul indice.
3) Quelle est la complexité de calcul de votre algorithme?
4) Comment résoudre ce problème si on voulait (en dépit des remarques faites à la première question) minimiser la simple somme des espacements supplémentaires plutôt que la somme des carrés? On proposera un schéma de programme permettant de résoudre le problème dans ce cas particulier. Complexité de calcul?
5) Justifier votre schéma de programme. Pourquoi fournit-il un bon résultat?

Ce problème est inspiré de l'algorithme de césure effectué par TEX: voir "Mathematical typography", Donald E. Knuth, *TEX and Metafont*, p. 1-45, Digital Press, 1979. Ainsi, la page que vous lisez (traitée par LATEX) est composée suivant cette méthode.

II - Pavés

(environ 6 pts)

Soit $P \subset \mathbb{Z}^2$ un objet dans une maille carrée. On dit que P est un *pavé* s'il existe des entiers i, j, k, l tels que $i \leq j$ et $k \leq l$ et $P = \{x = (x_1, x_2);\ i \leq x_1 \leq j \text{ et } k \leq x_2 \leq l\}$, x_1 et x_2 désignant les coordonnées de x.

On dit qu'un objet $X \subset \mathbb{Z}^2$ est *8-connexe* si, pour tous points $x, y \in X$, il existe une séquence de points $x_0, ..., x_k$, avec $x_0 = x$, $x_k = y$, et $x_i \in \Gamma_8(x_{i-1})$, $i = 1, ..., k$.

Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ un objet 8-connexe comportant un nombre fini de points. Montrer qu'il est possible, en utilisant uniquement les opérateurs de morphologie mathématique, d'obtenir le plus petit pavé contenant X.

On utilisera exclusivement des éléments structurants qui sont inclus dans Γ_8. De plus, on ne s'autorisera pas à employer de notion de "cadre d'une image".

On pourra d'abord exprimer la méthode en langage naturel, puis l'exprimer en termes d'opérateurs morphologiques.

Quelle est la complexité de calcul de votre méthode?

Que se passe-t-il si X n'est pas 8-connexe?

N.B.

- Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.
- Il est rappelé l'exigence de clarté et de concision :

Une réponse ne sera considérée comme bonne que si elle satisfait ces critères