



Résumé Cours EL301

# Signaux aléatoires

par J-L Bercher

MàJ : été 2005

Auteur : Roland M.  
Mise en page : Olivier M.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Signaux Aléatoires</b>	<b>3</b>
1.1	Généralités . . . . .	3
1.2	Description d'un Signal Aléatoire . . . . .	3
1.2.1	Description complète . . . . .	3
1.2.2	Description partielle . . . . .	4
1.3	Propriétés Fondamentales . . . . .	4
1.3.1	Stationnarité . . . . .	4
1.3.2	Ergodisme . . . . .	5
1.3.3	Stationnarité et ergodisme . . . . .	5
1.4	Transformation des Signaux Aléatoires par Filtrage . . . . .	5
1.4.1	Transformation de la moyenne . . . . .	5
1.4.2	Théorème ou formule des interférences . . . . .	6

*N.B. :Ce document a été créé sur la base des cours en amphi dispensés à l'ESIEE, mais il n'a fait l'objet d'aucune relecture de la part d'un enseignant. Il est donc susceptible de présenter des erreurs ou incompréhensions.*

# Chapitre 1

## Signaux Aléatoires

**Introduction** De la même manière qu'une variable aléatoire est un ensemble de valeurs caractérisé par une loi de probabilités, on appelle signal aléatoire un ensemble de fonctions auquel on adjoint une loi de probabilités.

### 1.1 Généralités

**Notations** On notera  $X(t, \omega)$  un signal aléatoire  $X$ . Il s'agit d'un ensemble de fonctions de la variable  $t$ , cet ensemble étant indexé par la variable  $\omega$ . Un signal aléatoire (s.a.) est une **quantité bivariée**, dépendant à la fois du temps  $t$  et de l'épreuve  $\omega$ .

**Remarques :**

1. Lorsque l'épreuve est fixée ( $\omega = \omega_i$ ), on obtient une réalisation de processus aléatoires  $X(t, \omega_i)$  ou plus simplement  $x_i(t)$ .
2. Lorsque la variable  $t$  est fixée, le processus aléatoire se réduit à la simple variable aléatoire  $X(t_i, \omega)$ , que l'on notera  $X_i(\omega)$  ou  $X_i$ . Enfin, on notera  $x_i$  les valeurs prises par la variable aléatoire  $X_i$ .

### 1.2 Description d'un Signal Aléatoire

Les signaux aléatoires pourront être caractérisés par le biais de deux types de description :

- une description complète qui permet de caractériser complètement le processus.
- une caractérisation partielle, à partir des moments du processus.

#### 1.2.1 Description complète

$X(t, \omega)$  est connu si  $\forall t_1, t_2, \dots, t_k$  et  $\forall k$  on connaît la loi suivante :  $\rho_{X_1, X_2, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$  où  $X_1, X_2, \dots, X_k$  sont les variables aléatoires associées aux  $k$  instants  $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_k, \omega)$ .

## 1.2.2 Description partielle

### Description à 1 instant

On dit que  $X(t, \omega)$  est connu à un instant si,  $\forall t_1$  on connaît la loi de la v.a.  $X(t_1, \omega)$ .

**Remarque :** On caractérise souvent la v.a.  $X(t_1, \omega)$  à l'aide des moments.

$$m_X(t_1) = E[X(t_1, \omega)] = \int x_1 \cdot p_{X_1}(x_1) \cdot dx_1 \quad (1.1)$$

$$m_X^{(n)}(t_1) = E[X(t_1, \omega)^{(n)}] = \int x_1^{(n)} \cdot p_{X_1}(x_1) \cdot dx_1 \quad (1.2)$$

### Description à 2 instant

On dit que  $X(t, \omega)$  est connu à deux instants si  $\forall t_1, t_2$  on connaît la loi conjointe des v.a.  $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega)$  :

$$P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \text{ est connue } \forall t_1, t_2. \quad (1.3)$$

*La connaissance à deux instants nécessite donc de connaître le lien statistique entre  $X(t_1, \omega)$  et  $X(t_2, \omega)$ .*

**Définition :** On appelle **covariance** la fonction  $C_X(t_1, t_2)$  qui permet de quantifier un certain "lien statistique" entre les v.a.  $X_1$  et  $X_2$ .

$$C_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)^*] = \int \int x_1 \cdot x_2^* \cdot P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \cdot dx_1 dx_2 \quad (1.4)$$

## 1.3 Propriétés Fondamentales

### 1.3.1 Stationnarité

**Définition :** On dit qu'un **signal aléatoire** est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps.

$$P_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)} = P_{X(t_1 - \Delta), X(t_2 - \Delta), \dots, X(t_k - \Delta)} \quad (1.5)$$

*Toutes les variables  $X(t_i, \omega)$  possèdent ainsi la même loi à un instant. On en déduit que **tous les moments sont indépendants du temps.***

**Cas Particulier** A deux instants, la distribution conjointe ne dépend que de l'écart entre les deux instants :  $P_{X(t_1)X(t_2)} = P_{X(t_1 - t_2)X(0)}$ .

$$C_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)^*] = E[X(t)X(t - \tau)^{ast}] = R_X(\tau) \quad (1.6)$$

avec  $t$  quelconque et  $\tau = t_1 - t_2$ .

### 1.3.2 Ergodisme

**Définition :** On considère un signal aléatoire  $X(t, \omega)$ . On note  $x_i(t)$  les différentes réalisations de ce signal. On appelle moyenne temporelle prise sur la réalisation :

$$\langle x_i^n \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{[T]} x_i(t)^n \cdot dt \quad (1.7)$$

De même, la moyenne temporelle du signal aléatoire  $X(t, \omega)$  est définie par :

$$\langle X(t, \omega)^n \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{[T]} X(t, \omega)^n \cdot dt = \mu^{(n)}(\omega) \quad (1.8)$$

**Proposition :** Le signal  $X(t, \omega)$  est dit **ergodique** si les moyennes temporelles sont des nombres certains.

### 1.3.3 Stationnarité et ergodisme

**Proposition :** Il est d'une grande importance pratique d'avoir à la fois les propriétés de stationnarité et d'ergodisme. En effet, dans ce cas, les moyennes d'ensembles (les espérances mathématiques) et les moyennes temporelles sont égales :

$$E[X(t, \omega)^n] = \langle X(t, \omega)^n \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{[T]} X(t, \omega)^n \cdot dt = \mu^{(n)}(\omega) \quad (1.9)$$

Ceci est d'une grande importance pratique, car il est rare que l'on dispose de plusieurs réalisations du processus et de sa distribution de probabilité. On réalise alors une estimation du résultat par le calcul des moyennes temporelles sur la durée où est connue une réalisation du processus

## 1.4 Transformation des Signaux Aléatoires par Filtrage

On étudie ici comment sont transformés les signaux aléatoires lors d'un filtrage linéaire.

### 1.4.1 Transformation de la moyenne

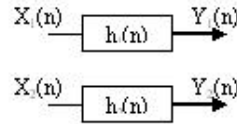
On note  $m_Y$  la moyenne de sortie du filtre, et on effectue le calcul à temps discret suivant :

$$m_Y = E[Y(n, \omega)] = m_X t(0) = m_X \sum_m h(m) \quad (1.10)$$

Ainsi, la moyenne de la sortie du filtre est la moyenne de l'entrée, multipliée par le gain complexe (la fonction de transfert) pour la fréquence nulle.

### 1.4.2 Théorème ou formule des interférences

Cette formule permet de relier l'intercorrélation entre les sorties de deux filtres aux intercorrélations des entrées de ces filtres.



$$\begin{cases} Y_1(n, \omega) &= (X_1 * h_1).(n, \omega) \\ Y_2(n, \omega) &= X_2 * h_2).(n, \omega) \end{cases}$$

On calcule l'intercorrélation entre  $Y_1(n)$  et  $Y_2(n)$ , et on en déduit :

$$S_{Y_1 Y_2}(F) = H_1(F) \cdot S_{X_1 X_2}(F) \cdot H_2^*(F)$$

**Remarque :** En prenant  $Y_1 = Y_2 = Y$  et  $X_1 = X_2 = X$  et  $H_1 = H_2 = H$ , il vient :

$$S_{Y Y}(F) = S_{X X}(F) \cdot |H(F)|^2$$

**Notion de densité spectrale de puissance** La densité spectrale de puissance représente la répartition de la puissance du signal dans le domaine fréquentiel.

$$\text{Or } \underbrace{R_{X X}(0)}_{\text{Puissance}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{X X}(f) \cdot df$$

$S_{X X}(f)$  représente la **répartition de la puissance en fréquence**.

**Notion de bruit blanc** Un bruit blanc est un modèle de signal aléatoire "limite" que l'on rencontrera très souvent.

on pose par définition :

$$R_{X X}(k) = \delta^2 \cdot \delta(k) \xrightarrow{T.F.} S_{X X}(f) = \delta^2$$

Ainsi, on constate que le bruit blanc possède une **puissance moyenne infinie**. Il s'agit donc d'un modèle difficile à manipuler.