

Interpolation et espace des formes

Fernand Meyer

Avril 2009

- Historique :

- Pierre Soille : construction de modèles numériques de terrain par interpolation de lignes de niveaux
- Jean Serra : interpolation entre formes binaires basée sur la distance de Hausdorff
- Serge Beucher : interpolation à mi-distance de formes binaires et images numériques par SKIZ entre le sup et l'inf.
- Fernand Meyer : interpolation quelconque de formes binaires et d'images mosaïques en s'inspirant des travaux de Soille
- Roland Bremond et Ferran Marques : interpolations d'images mosaïques pour le codage
- Marcin Iwanowski : extension des travaux précédents, application d'une transformation affine préalable à l'interpolation

Opérateurs connexes binaires : arasements (1)

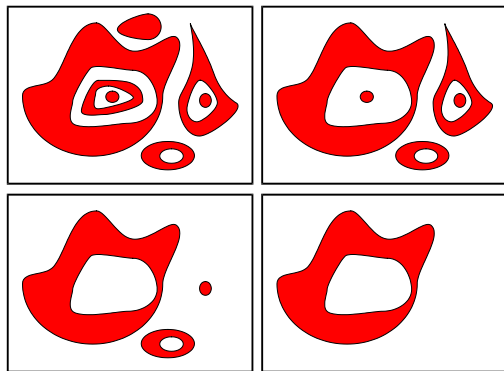


Figure: Suppression progressive de particules connexes choisies arbitrairement

" Y est un arasement de X " est une relation d'ordre.

Les arasements sont cumulatifs : chacun est arasement de tous les précédents.

Arasements (2)

Si on ne fait que supprimer certaines particules d'un ensemble X , alors l'ensemble Y déduit a la forme suivante :

$$Y = \Xi^-(X) = \bigcup \left\{ X_i \mid \begin{array}{l} X_i \text{ particule connexe de } X \\ X_i \text{ est sélectionné pour être gardé} \end{array} \right\}$$

Opérateurs connexes binaires : inondations (1)

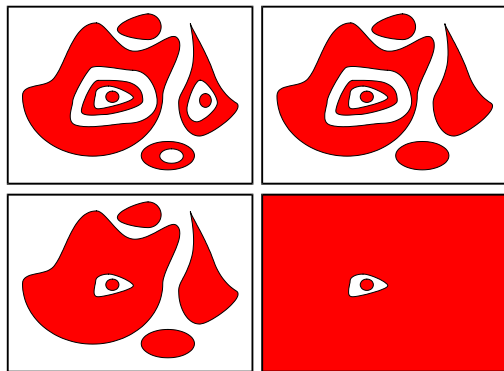


Figure: D'une image à l'autre, des trous choisis arbitrairement sont remplis.

" Y est une inondation de X " est une relation d'ordre

Les inondations sont cumulatives : chacune est inondation de toutes les précédentes.

Inondations (2)

Si on ne remplit que des trous, on obtient à partir de X un ensemble Y dont le complémentaire vaut

$$\overline{Y} = \bigcup \left\{ X_j \mid \begin{array}{l} X_j \text{ trou de } X \\ X_j \text{ est sélectionné pour être gardé comme trou} \end{array} \right\}$$

et en prenant le complémentaire

$$Y = \Xi^+(X) = X \cup \left\{ \overline{X_k} \mid \begin{array}{l} X_k \text{ trou de } X \\ X_k \text{ est sélectionné pour être comblé} \end{array} \right\}$$

Combiner arasements et inondations : applatissements (1)

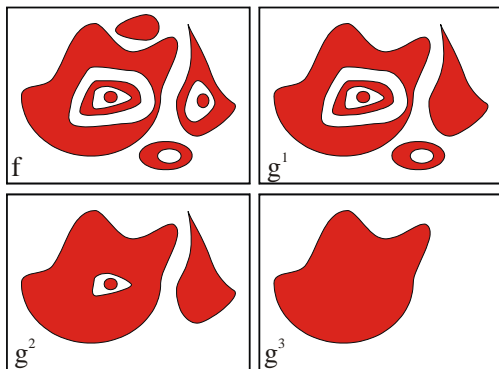


Figure: Applatissements : Supprimer particules et trous choisis arbitrairement

" Y est un applatissement de X " est une relation d'ordre. Pour cet ordre :
 $f \prec g_1 \prec g_2 \prec g_3$

Remarque : Si un grain et un trou adjacent ne changent pas de valeur simultanément, on a affaire à un nivellement

Combiner arasements et inondations : applatissements (2)

Combiner les deux opérations et ainsi supprimer certaines particules et combler certains trous en appliquant à chaque des règles tout à fait arbitraires produit un *applatissement* (noté Ξ)

$$\begin{aligned} Y &= \Xi(X) = \bigcup \left\{ X_i \mid \begin{array}{l} X_i \text{ particule de } X \\ X_i \text{ est gardé} \end{array} \right\} \cup \left\{ \overline{X_k} \mid \begin{array}{l} X_k \text{ trou de } X \\ X_k \text{ est comblé} \end{array} \right\} \\ &= \Xi^-(X) \cup [\Xi^+(X) \setminus X] \end{aligned}$$

Remarque : Dans le cas limite où on ne garde aucune particule et on comble tous les trous, on obtient la complémentation

Sélection des particules et trous par marquage

X : ensemble à simplifier

Y : marqueur

Une particule X_i est marquée si elle intersecte une particule du marqueur Y , c'est-à-dire si $X_i \cap Y \neq \emptyset$; un trou X_k est marqué s'il intersecte un trou du marqueur Y , c'est-à-dire si $\overline{X_k} \cap \overline{Y} \neq \emptyset$, cad $\overline{X_k} \not\subseteq Y$. Les autres trous sont complémentés et deviennent des particules

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X, Y) &= \bigcup \left\{ X_i \mid \begin{array}{l} X_i \text{ particule de } X \\ X_i \cap Y \neq \emptyset \end{array} \right\} \cup \left\{ \overline{X_k} \mid \begin{array}{l} X_k \text{ trou de } X \\ \overline{X_k} \subset Y \end{array} \right\} \\ &= \mathbb{E}^-(X, Y) \cup [\mathbb{E}^+(X, Y) \setminus X]\end{aligned}$$

Sélection des particules et trous par marquage

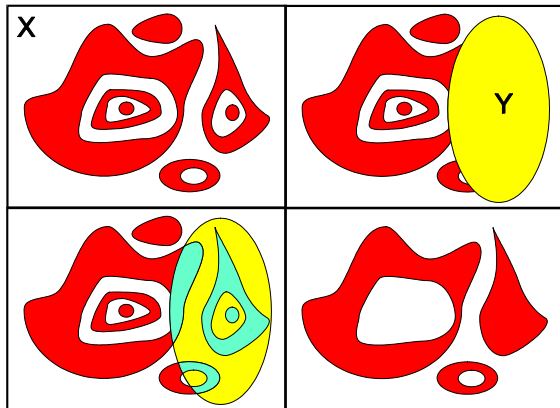


Figure: Une particule X_i est marquée si $X_i \cap Y \neq \emptyset$; un trou X_k est marqué si $\overline{X_k} \not\subseteq Y$.

Construction des arasements

$$\Xi^-(X, Y) = \bigcup \left\{ X_i \mid \begin{array}{l} X_i \text{ particule de } X \\ X_i \cap Y \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

Or X_i est une particule connexe de X donc $X_i = \delta X_i \cap X$ et
 $X_i \cap Y \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta X_i \cap X \cap Y \neq \emptyset \Leftrightarrow X_i \cap \delta(X \cap Y) \neq \emptyset \Leftrightarrow$
 $X_i \cap X \cap \delta(X \cap Y) \neq \emptyset$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Xi^-(X, Y) &= \bigcup \left\{ X_i \mid \begin{array}{l} X_i \text{ particule de } X \\ X_i \cap X \cap \delta(X \cap Y) \neq \emptyset \end{array} \right\} \\ &= \Xi^-(X, X \cap \delta(X \cap Y)) \end{aligned}$$

Nous noterons $\Xi_i^-(X, Y) = X \cap \delta(X \cap Y)$ l'arasement élémentaire

On montre de même que

$$\begin{aligned}\Xi^+(X, Y) &= X \cup \left\{ \overline{X_k} \mid \begin{array}{l} X_k \text{ trou de } X \\ \overline{X_k} \subset Y \end{array} \right\} \\ &= X \cup \left\{ \overline{X_k} \mid \begin{array}{l} X_k \text{ trou de } X \\ \overline{X_k} \subset X \cup_{\varepsilon} (X \cup Y) \end{array} \right\} \\ &= \Xi^+(X, X \cup_{\varepsilon} (X \cup Y))\end{aligned}$$

Nous noterons $\Xi^+(X, Y) = X \cup_{\varepsilon} (X \cup Y)$ l'arasement élémentaire

Nous appellerons :

- inondation élémentaire la transformation :

$$Xi^+(X, Y) = X \cup \varepsilon(X \cup Y)$$

- arasement élémentaire la transformation :

$$Xi^-(X, Y) = X \cap \delta(X \cap Y)$$

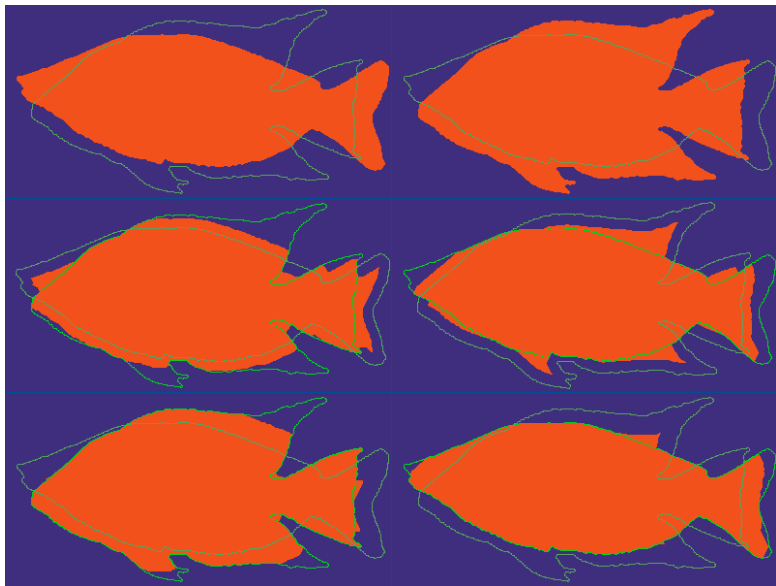
- applatissement élémentaire la transformation

$$Xi(X, Y) = [Xi^-(X, Y)] \cup [Xi^+(X, Y) \cap \bar{X}] = \\ [X \cap \delta(X \cap Y)] \cup [\varepsilon(X \cup Y) \cap \bar{X}] \text{ vérifie :}$$

- $X \cap Xi(X, Y) = [X \cap \delta(X \cap Y)] = Xi^-(X, Y)$
- $X \cup Xi(X, Y) = [X \cup \varepsilon(X \cup Y)] = Xi^+(X, Y)$

$$\begin{aligned}
 \Xi(X, Y) &= \bigcup \left\{ X_i \mid \begin{array}{l} X_i \text{ particule de } X \\ X_i \cap Y \neq \emptyset \end{array} \right\} \cup \left\{ \overline{X_k} \mid \begin{array}{l} X_k \text{ trou de } X \\ \overline{X_k} \subset Y \end{array} \right\} \\
 &= \Xi^-(X, Y) \cup [\Xi^+(X, Y) \setminus X] \\
 &= \Xi^-(X, X \cap \delta(X \cap Y)) \cup \Xi^+(X, X \cup \varepsilon(X \cup Y)) \setminus X \\
 &= \Xi^-(X, \text{Xi}(X, Y)) \cup [\Xi^+(X, \text{Xi}(X, Y)) \setminus X] \\
 &= \Xi(X, \text{Xi}(X, Y)) = \Xi(X, \text{Xi}^{(n)}(X, Y)) = \Xi(X, \text{Xi}^{(\infty)}(X, Y)) \\
 &= \text{Xi}^{(\infty)}(X, Y)
 \end{aligned}$$

Pour construire un aplatissement, il suffit donc d'itérer jusqu'à stabilité l'opérateur $\text{Xi}(X, Y) = [X \cap \delta(X \cap Y)] \cup [\varepsilon(X \cup Y) \cap \overline{X}]$





L'espace entre 2 formes X et Y

L'observation de la figure précédente montre que l'ensemble $X_i^{(n)}(X, Y)$ voit sa frontière décoller progressivement de Y pour se rapprocher de X . Inversement $X_i^{(n)}(Y, X)$ "s'éloigne" de X pour se rapprocher de Y

Tous ces ensembles ont en commun de vérifier

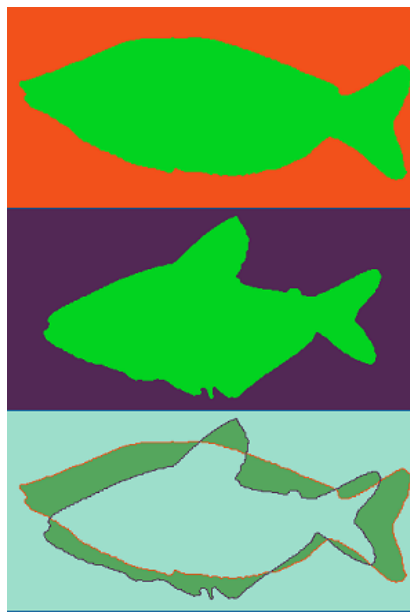
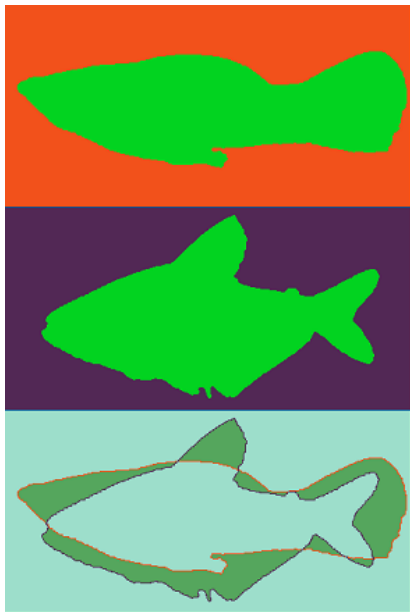
$$X \wedge Y \subset \begin{matrix} X_i^{(n)}(X, Y) \\ X_i^{(n)}(Y, X) \end{matrix} \subset X \vee Y$$

Ce espace intermédiaire entre $X \wedge Y$ et $X \vee Y$ sera appelé *Inter* (X, Y) ou *Inter* (Y, X) selon les relations d'ordre dont on les munit.

L'espace entre 2 formes X et Y

On définit $Inter(X, Y) = \{Z \mid X \wedge Y \subset Z \subset X \vee Y\}$, l'ensemble des formes entre X et Y .

En termes de fonction caractéristique, Z appartient à $Inter(X, Y)$ ssi pour tout pixel x , on a $1_X(x) \leq 1_Z(x) \leq 1_Y(x)$ ou $1_X(x) \geq 1_Z(x) \geq 1_Y(x)$, donnant un sens plus précis à la dénomination "être entre".



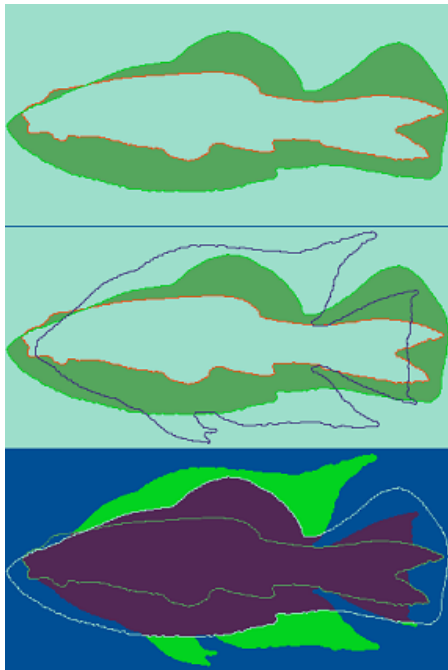
Projection d'un ensemble Z dans $\text{Inter}(X,Y)$

Si un ensemble $Z \notin \text{Inter}(X, Y)$ alors le plus grand sous-ensemble Z' de Z qui appartienne à $\text{Inter}(X, Y)$ est défini par

$$Z' = [Z \cup (X \cap Y)] \cap (X \cup Y) \text{ montrant que } Z' \subset X \cup Y$$

$$Z' = [Z \cap (X \cup Y)] \cup (X \cap Y) \text{ montrant que } X \cap Y \subset Z'$$

Il s'agit du centre morphologique de Z par rapport à X et à Y .



La structure de treillis de $\text{Inter}(X,Y)$

On définit sur $\text{Inter}(X, Y)$ la relation d'ordre suivante :

- une relation d'ordre s'exprime par rapport à un pôle de référence X :

$Z_1 <_X Z_2$ signifie que Z_1 est plus proche de X que Z_2 , ce qui s'exprime par une double relation

$X \wedge Z_2 \subset X \wedge Z_1$: tout pixel de Z_2 dans X appartient aussi à Z_1

$X \vee Z_2 \supset X \vee Z_1$: tout pixel de Z_1 en dehors de X appartient aussi à Z_2

- la relation d'ordre inverse s'exprime par rapport au pôle de référence Y

$$Z_1 <_Y Z_2 \iff \begin{cases} Z_2 \wedge Y \subset Z_1 \wedge Y \\ Z_2 \vee Y \supset Z_1 \vee Y \end{cases}$$

La structure de treillis de $\text{Inter}(X, Y)$

La relation d'ordre $Z_1 <_X Z_2$ s'exprime par un des ordres suivants entre les fonctions indicatrices : pour tout pixel x , on a

$$1_X(x) \leq 1_{Z_1}(x) \leq 1_{Z_2}(x) \leq 1_Y(x) \text{ ou}$$

$1_X(x) \geq 1_{Z_1}(x) \geq 1_{Z_2}(x) \geq 1_Y(x)$, ce qui montre bien que les deux relations d'ordre sont inverses l'une de l'autre $Z_1 <_Y Z_2 \iff Z_1 >_X Z_2$

Lemma

Pour Z_1 et Z_2 appartenant à $\text{Inter}(X, Y)$, on a $Z_1 \in \text{Inter}(Y, Z_2) \iff Z_1 <_Y Z_2 \iff Z_1 >_X Z_2 \iff Z_2 \in \text{Inter}(X, Z_1)$

L'infimum dans le treillis $\text{Inter}(X,Y)$

Parmi tous les ensembles Z de $\text{Inter}(X, Y)$ vérifiant $Z <_X Z_1$ et $Z <_X Z_2$, il en existe un plus grand, écrit $Z_1 \wedge_X Z_2$

$$\begin{aligned} Z_1 \wedge_X Z_2 &= (X \vee (Z_1 \wedge Z_2)) \wedge (Z_1 \vee Z_2) \\ &= (X \wedge (Z_1 \vee Z_2)) \vee (Z_1 \wedge Z_2) \end{aligned}$$

Caractérisation de l'infimum

$$\begin{aligned} Z_1 \wedge_X Z_2 &= (X \vee (Z_1 \wedge Z_2)) \wedge (Z_1 \vee Z_2) \\ &= (X \wedge (Z_1 \vee Z_2)) \vee (Z_1 \wedge Z_2) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} X \wedge (Z_1 \wedge_X Z_2) &= X \wedge (Z_1 \vee Z_2) \\ X \vee (Z_1 \wedge_X Z_2) &= X \vee (Z_1 \wedge Z_2) \end{aligned}$$

On vérifie que $Z_1 \wedge_X Z_2 <_X Z_1, Z_2$.

En effet $X \wedge (Z_1 \wedge_X Z_2) = X \wedge (Z_1 \vee Z_2) \geq \frac{X \wedge Z_1}{X \wedge Z_2}$. De plus parmi tous les ensembles supérieurs à $X \wedge Z_1$ et $X \wedge Z_2$, $X \wedge (Z_1 \vee Z_2)$ est bien le plus petit, c'est à dire celui qui s'écarte le plus de X . Il en va de même pour la partie $X \vee (Z_1 \wedge_X Z_2)$.

Le supremum dans le treillis $\text{Inter}(X, Y)$

Parmi tous les ensembles Z de $\text{Inter}(X, Y)$ vérifiant $Z_1 <_X Z$ et $Z_2 <_X Z$, il en existe un plus petit $Z_1 \vee_X Z_2$ défini par

$$\begin{cases} X \wedge (Z_1 \vee_X Z_2) = X \wedge Z_1 \wedge Z_2 \\ X \vee (Z_1 \vee_X Z_2) = X \vee Z_1 \vee Z_2 \end{cases}$$

On vérifie que $Z_1 \vee_X Z_2$ est bien le plus petit ensemble de $\text{Inter}(X, Y)$ qui soit plus grand que Z_1, Z_2 pour la relation d'ordre $<_X$.

Associativité :

$$(Z_1 \wedge_X Z_2) \wedge_X Z_3 = Z_1 \wedge_X (Z_2 \wedge_X Z_3)$$

$$(Z_1 \vee_X Z_2) \vee_X Z_3 = Z_1 \vee_X (Z_2 \vee_X Z_3)$$

Distributivité :

$$(Z_1 \wedge_X Z_2) \vee_X Z_3 = (Z_1 \vee_X Z_2) \wedge_X (Z_1 \vee_X Z_3)$$

$$(Z_1 \vee_X Z_2) \wedge_X Z_3 = (Z_1 \wedge_X Z_2) \vee_X (Z_1 \wedge_X Z_3)$$

Tout élément Z de $Inter(X, Y)$ appartient aussi à $Inter(Y, X)$. On peut définir une espèce de "changement de casquette" ou swap, agissant comme une complémentation, à l'aide duquel on peut définir une dualité.

$$Z_1 \in Inter(X, Y) \quad \longrightarrow \quad Z_1 \in Inter(Y, X)$$

En particulier De même, $Z_1 <_X Z_2 \iff Z_1 >_Y Z_2$.

Et si $Z_1, Z_2 \in Inter(X, Y)$, alors $Z_1 \vee_X Z_2 = Z_1 \wedge_Y Z_2 \in Inter(X, Y)$ et $\in Inter(Y, X)$

L'érosion ordinaire avec un élément structurant B se définit alors comme

$$\varepsilon_B(Z) = \bigwedge_{t \in B} Z^t$$

Par analogie, on définit dans $Inter(X, Y)$ l'opérateur $\lambda_B(Z) = \bigwedge_{t \in B} Z^t$ pour $Z \in Inter(X, Y)$. Si B représente le point central et ses premiers voisins, cet opérateur s'explicite en

$$\lambda_X(Z) = (X \wedge \delta Z) \vee \varepsilon Z = (X \vee \varepsilon Z) \wedge \delta Z.$$

On reconnaît l'opérateur élémentaire des nivellements.

Les nivellements ne sont pas des érosions dans $\text{Inter}(X,Y)$

Cet opérateur n'est pas une érosion, car il ne commute pas avec \wedge_X . On vérifie que $\lambda_X^t(Z) = Z \wedge_X Z^t$ ne commute pas avec \wedge_X

D'une part $\lambda_X^t(Z_1 \wedge_X Z_2) = Z_1 \wedge_X Z_2 \wedge_X (Z_1 \wedge_X Z_2)^t$

D'autre part $\lambda_X^t(Z_1) \wedge_X \lambda_X^t(Z_2) = Z_1 \wedge_X Z_1^t \wedge_X Z_2 \wedge_X Z_2^t$

Ces deux expressions ne sont pas identiques car

$(Z_1 \wedge_X Z_2)^t = Z_1^t \wedge_{X^t} Z_2^t \neq Z_1^t \wedge_X Z_2^t$.

Une translation qui commute avec l'inf dans $\text{Inter}(X, Y)$

La "translation" définie par $\tilde{Z}^t = Z^t \vee_X X^t$ commute avec \wedge_X .

D'une part $\left(\widetilde{Z_1 \wedge_X Z_2}\right)^t = (Z_1 \wedge_X Z_2)^t \vee_X X^t = (Z_1^t \wedge_{X^t} Z_2^t) \vee_X X^t$

D'autre part

$(\tilde{Z}_1^t \wedge_X \tilde{Z}_2^t) = (Z_1^t \vee_X X^t) \wedge_X (Z_2^t \vee_X X^t) = (Z_1^t \wedge_X Z_2^t) \vee_X X^t$

Apparemment, ces deux expressions sont dissemblables. Elles sont pourtant identiques, comme on peut le vérifier en calculant le *sup* et l'*inf* avec X :

- $X \vee (X^t \vee_X (Z_1^t \wedge_{X^t} Z_2^t)) = X \vee X^t \vee (Z_1^t \wedge_{X^t} Z_2^t) = X \vee X^t \vee (Z_1^t \wedge Z_2^t)$
- $X \vee (X^t \vee_X (Z_1^t \wedge_X Z_2^t)) = X \vee X^t \vee (Z_1^t \wedge_X Z_2^t) = X^t \vee [X \vee (Z_1^t \wedge_X Z_2^t)] = X^t \vee X \vee (Z_1^t \wedge Z_2^t)$

Les deux expressions sont bien identiques.

Les aplatissements par un bi-point

Ainsi $X_B(Z) = \bigwedge_{t \in B} \tilde{Z}^t \wedge_X Z$ est une érosion dans $Inter(X, Y)$:

Explicitation pour un bi-point $\cdot \xleftarrow{t} \cdot$: $Z \wedge_X \tilde{Z}^t = Z \wedge_X (X^t \vee_X Z^t)$
caractérisé par

$$X \vee (Z \wedge_X \tilde{Z}^t) = \left[\underbrace{(X \vee Z) \wedge X}_X \right] \vee \left[\underbrace{(X \vee Z) \wedge (X^t \vee Z^t)}_{\text{érosion de } X \vee Z \text{ par le bi-point } \cdot \xleftarrow{t} \cdot} \right]$$

$$X \wedge (Z \wedge_X \tilde{Z}^t) = X \wedge \left[\underbrace{(X \wedge Z) \vee (X^t \wedge Z^t)}_{\text{dilatation de } X \wedge Z \text{ par le bi-point}} \right]$$

Pour un élément structurant B formé par tous les voisins du point central, on obtient $\chi_B(Z)$ caractérisé par

$$\begin{aligned}X \vee \chi_B(Z) &= X \vee \varepsilon(X \vee Z) = \text{Xi}^+(X, Z) \\X \wedge \chi_B(Z) &= X \wedge \delta(X \wedge Z) = \text{Xi}^-(X, Z)\end{aligned}$$

On reconnaît l'opérateur élémentaire des aplatissements.

et l'érosion $\chi_B(Z)$ s'exprime par

$$\chi_B(Z) = [X \wedge \delta(X \wedge Z)] \vee [\varepsilon(X \vee Z) \wedge \overline{X}]$$

A l'aide du "swap" introduit plus haut, on peut définir une dilatation duale
 $Z \in \text{Inter}(X, Y) \rightarrow Z \in \text{Inter}(Y, X)$

comme l'érosion de Z par le même élément structurant B mais dans le treillis $\text{Inter}(Y, X)$:

$$\tilde{\zeta}_B(Z) = [Y \wedge \delta(Y \wedge Z)] \vee [\varepsilon(Y \vee Z) \wedge \overline{Y}]$$

Pour trouver le milieu entre 2 personnages qui se font face, il suffit que alternativement ils avancent d'un pas l'un vers l'autre jusqu'à se trouver nez à nez.

Il en va de même pour les aplatissements

Pour l'interpolé milieu entre X et Y , répéter jusqu'à stabilité :

- $Y = X_i(X, Y)$
- $X = X_i(Y, X)$

L'interpolation milieu peut se trouver plus simplement en appliquant l'algorithme précédent non à X et Y mais à $Z^+ = X \cup Y$ et à $Z^- = X \cap Y$. La transformation X_i se simplifie alors en X_i^+ et X_i^- . Pour l'interpolé milieu entre X et Y , répéter jusqu'à stabilité :

- $Z^+ = X_i^+(Z^-, Z^+)$
- $Z^- = X_i^-(Z^+, Z^-)$

Interpolation de modèles numériques de terrain

Pierre Soille a proposé en 1991 un algorithme d'interpolation entre lignes de niveaux d'un relief topographique. Pour tout point x se trouvant entre 2 lignes de niveaux successives L_i et L_{i+1} , on calcule la distance géodésique $d_i(x)$ à L_i et $d_{i+1}(x)$ à L_{i+1} : $d_i(x) + d_{i+1}(x)$ représente alors la longueur du plus court chemin entre L_i et L_{i+1} passant par x et $\frac{d_i(x)}{d_i(x) + d_{i+1}(x)}$ représente à quelle distance relative de L_i se trouve x sur ce chemin. Prendre tous les points à la même distance relative constitue une ligne de niveau interpolée. Si X_i et X_{i+1} sont les seuils du relief topographique, $d_i(x)$ s'obtient par dilatés géodésiques successifs de X_i dans X_{i+1} : $\delta(X_i) \wedge X_{i+1}$; $d_{i+1}(x)$ par érodés géodésiques successifs de X_{i+1} au dehors de X_i : $\delta(X_{i+1}) \vee X_i$.
Nous allons transposer cette approche à notre cadre $Inter(X, Y)$.

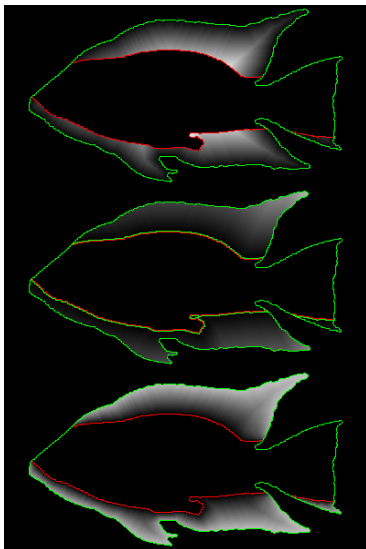
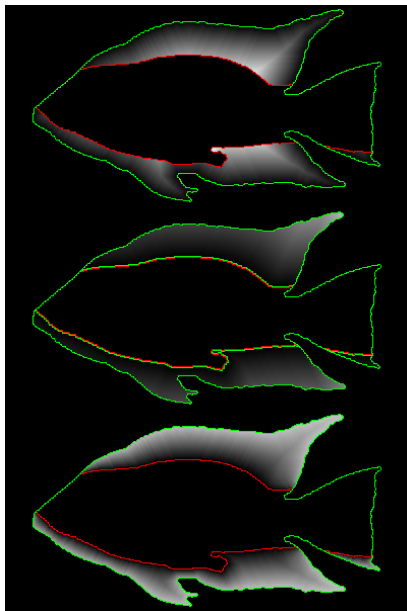
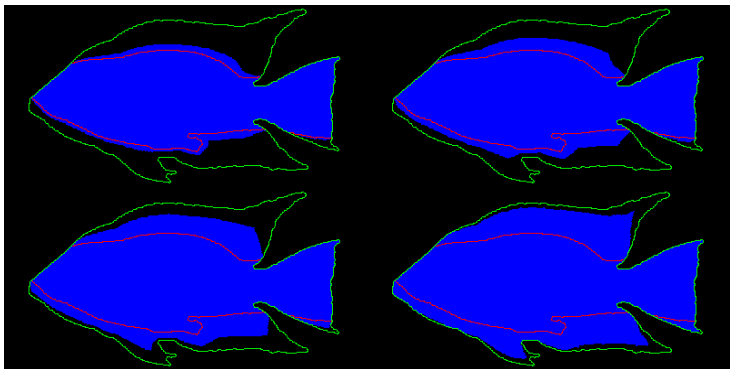


Figure: Cas où une forme contient l'autre





Fonctions distance dans $\text{Inter}(X, Y)$

Les érodés élémentaires successifs de Y $\chi_B^{(n)}(Y) = \chi_B \chi_B^{(n-1)}(Y)$, avec $\chi_B^{(0)}(Y) = \chi_B(Y)$ permettent de construire une fonction distance de Y à X .

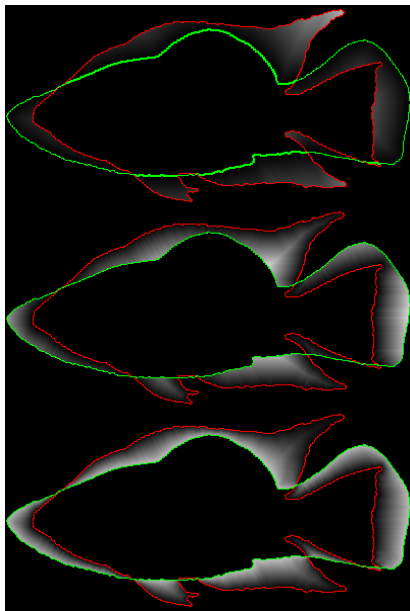
$$d_Y^X = n \text{ si } \chi_B^{(n)}(Y) = 1 \text{ et } \forall m > n \quad \chi_B^{(m)}(Y) = 0$$

De même, les dilatés duaux successifs de X dans $\text{Inter}(Y, X)$, identiques aux érodés successifs de X dans $\text{Inter}(Y, X)$ permettent de construire une fonction distance de X à Y .

$$d_X^Y = n \quad \text{si} \quad \zeta_B^{(n)}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall m > n \quad \zeta_B^{(m)}(X) = 0$$

On construit de même $d_X^Y + d_Y^X$ donnant pour chaque point x de $(X/Y) \vee (Y/X)$ la largeur du plus court chemin à $X \wedge Y$ et à $(\overline{X \vee Y})$.

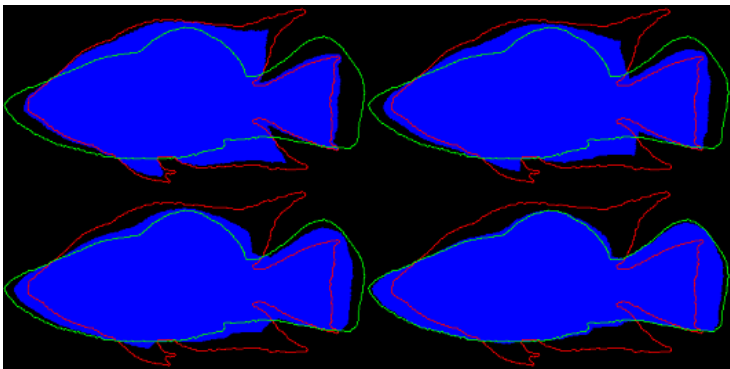
La proportion $\frac{d_X^Y(x)}{d_X^Y(x) + d_Y^X(x)} = \text{Interp}_X^Y(x)$ donne là encore la proportion de trajet de Y à X sur ce plus court chemin.



Construction d'un interpolé quelconque

La proportion $\frac{d_X^Y(x)}{d_X^Y(x) + d_Y^X(x)} = \text{Interp}_X^Y(x)$ donne là encore la proportion de trajet de Y à X sur ce plus court chemin.

En suivant la fonction $\text{Interp}_X^Y(x)$ à la valeur λ , on obtient un ensemble $V_\lambda = \{x \mid \text{Interp}_X^Y(x) \leq \lambda\}$ à ajouter à X/Y et retrancher de Y/X pour obtenir l'interpolé de valeur λ de Y vers X . Ces deux opérations se combinent en une seule par $Y \triangle V_\lambda$ où \triangle représente la différence symétrique.



Interpolation pondérée entre X et Y

On peut donner des poids Π_X et Π_Y aux deux ensembles X et Y à interpoler, en considérant que le front de propagation entre Y et X avance à une vitesse égale à $\frac{\Pi_X}{\Pi_Y}$ la vitesse de propagation entre X et Y (si $\Pi_Y = 3$ et $\Pi_X = 1$, l'ensemble Y doit peser 3 fois l'ensemble X , et l'interpolé $\frac{1}{2}$ doit se trouver au tiers de la distance en allant de Y vers X). On obtient ce résultat en pondérant les fonctions distance

$$\text{Interp}_X^Y(x; \Pi_X, \Pi_Y) = \frac{\Pi_Y d_X^Y}{\Pi_Y d_X^Y + \Pi_X d_Y^X}$$

On vérifie que si $\Pi_Y = 3, \Pi_X = 1$, on obtient bien $\text{Interp}_X^Y(x; \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$ pour $\frac{d_Y^X}{d_X^Y} = 3$

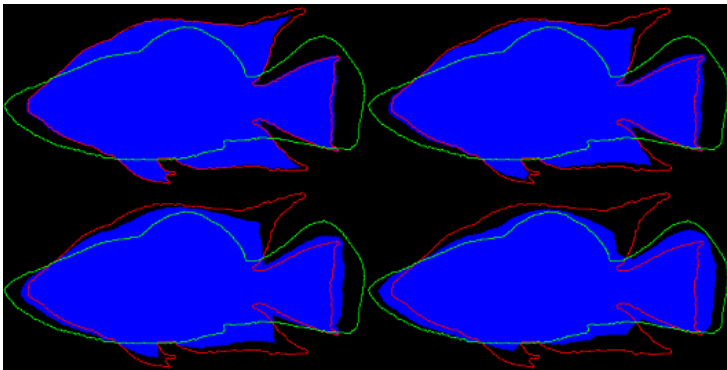


Figure: Interpolé 20, 40, 60, 80 avec des poids 1 et 3

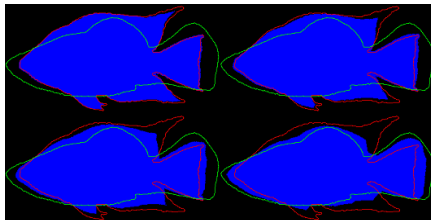
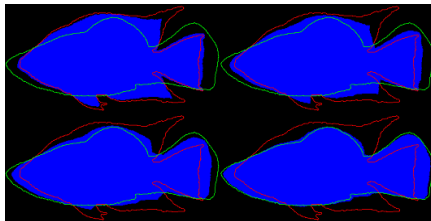


Figure: Haut : Interpolé 20, 40, 60, 80 avec des poids 1 et 1
 Bas : Interpolé 20, 40, 60, 80 avec des poids 1 et 3

Construction du centre de gravité entre X , Y et Z

On calcule l'interpolé $\frac{1}{2}$ entre X et Y , ce qui produit un ensemble W ; puis on calcule l'interpolé $\frac{1}{2}$ entre W comptant avec un poids de 2 et Z comptant avec un poids de 1.

Le résultat dépend néanmoins de l'ordre de traitement.

Toutefois, les résultats obtenus sont très proches en pratique, quel que soit l'ordre du traitement.

Construction du centre de gravité entre X, Y et Z

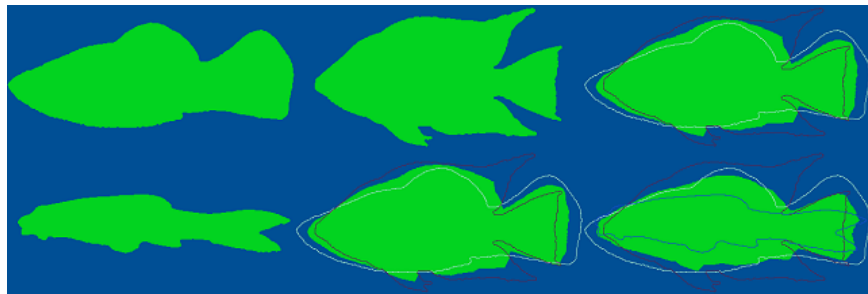


Figure: Haut : poisson 1, 2 puis interpolé 1-2

Bas : poisson3, interpolé 1-2, gravité 123

Construction du centre de gravité entre X, Y et Z

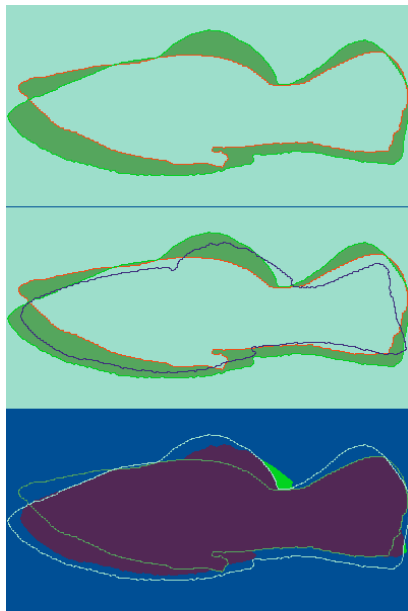


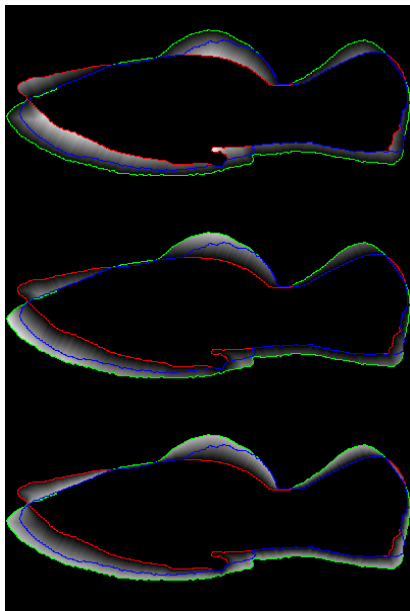
Comment une forme Z se situe par rapport à 2 formes X et Y

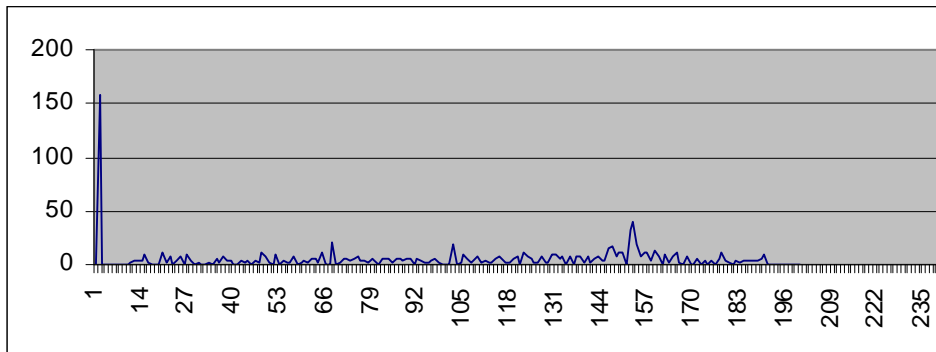
On "projette" Z dans $Inter(X, Y)$

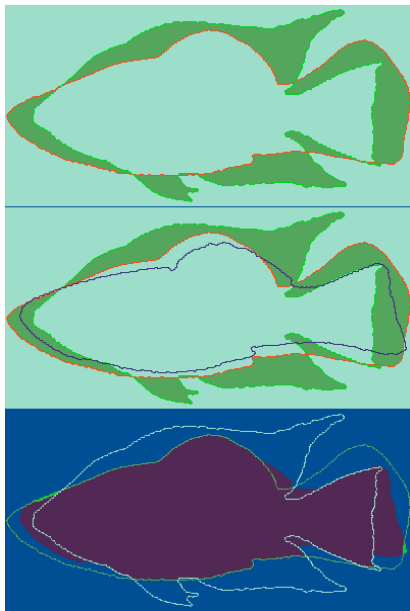
$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \text{centre morphologique de } X \text{ et de } Y \\ &= [Z \wedge (X \vee Y)] \vee (X \wedge Y) \\ &= [Z \vee (X \wedge Y)] \wedge (X \vee Y) = X \wedge_Z Y\end{aligned}$$

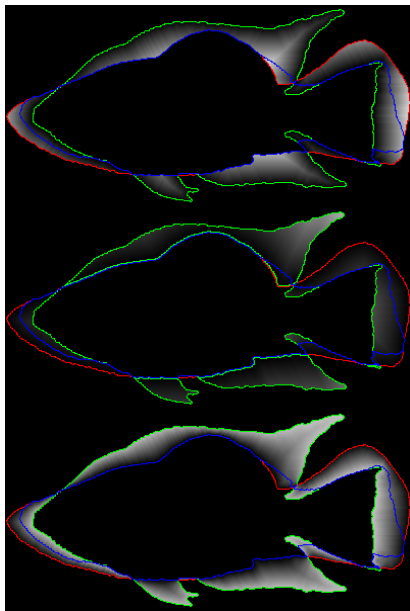
On peut mesurer ensuite l'écart entre Z et \tilde{Z} en considérant Z/\tilde{Z} , le morceau enlevé à Z et \tilde{Z}/Z , le morceau ajouté à Z . On peut par exemple mesurer la somme de leurs surfaces, rapportée à la surface de Z .

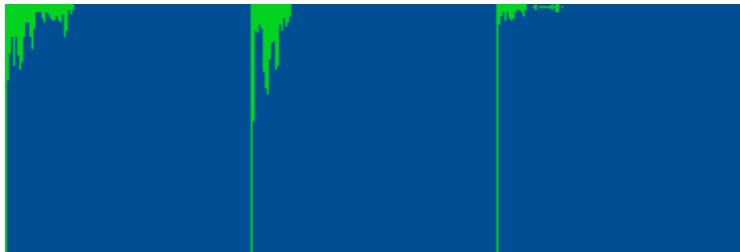












Moyenne d'un nombre quelconque de formes d'intersection non vide

Considérons une droite horizontale sur laquelle sont disposés une famille de points d'abscisse x_i .

Le centre de gravité de ces points est le point d'abscisse m réalisant le minimum de la fonctionnelle $\sum (x - x_i)^2$

Sur le même principe, on va construire une fonctionnelle du même genre pour une famille de formes d'intersection non vide. Pour ceci on calcule le carré de la fonction distance au contour de chacune des formes ; puis on fait la somme de toutes ces fonctions distances.

On cherche ensuite la forme moyenne comme ligne de thalweg de toutes ces formes, ou comme ligne de partage des eaux de l'inverse de cette fonctionnelle

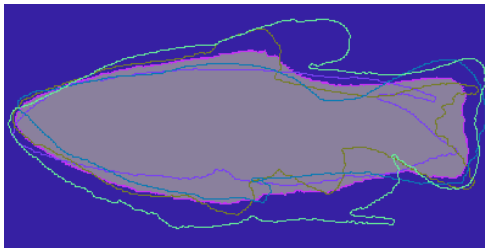


Figure: 4 contours de poissons et leur moyenne



Figure: Inf et sup de tous les poissons fournissent marqueurs interieur et extérieur



Figure: Inverse de la somme des fonctions distance



Figure: forme moyenne

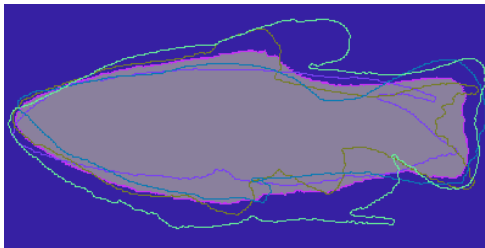


Figure: 4 contours de poissons et leur moyenne

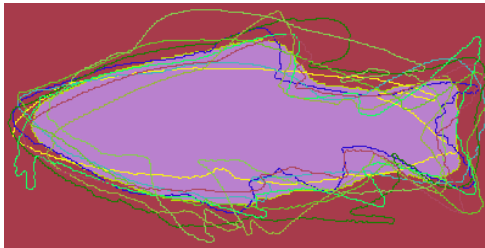


Figure: Moyenne de 9 poissons



Figure: Marqueurs interne et externe

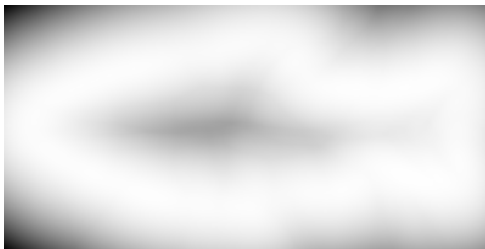


Figure: Inverse de la somme des carrés des distances aux contours

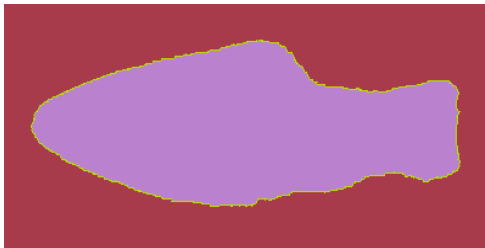


Figure: Forme moyenne

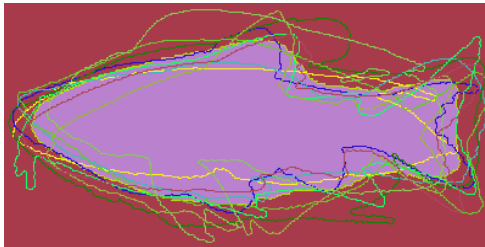


Figure: Moyenne de 9 poissons

Médiane d'un nombre quelconque de formes d'intersection non vide

Considérons une droite horizontale sur laquelle sont disposés une famille de points d'abscisse x_i .

La médiane de ces points est le point d'abscisse m réalisant le minimum de la fonctionnelle $\sum |x - x_i|$

Sur le même principe, on va construire une fonctionnelle du même genre pour une famille de formes d'intersection non vide. Pour ceci on calcule la fonction distance au contour de chacune des formes ; puis on fait la somme de toutes ces fonctions distances.

On cherche ensuite la forme moyenne comme ligne de thalweg de toutes ces formes, ou comme ligne de partage des eaux de l'inverse de cette fonctionnelle



Figure: Marqueurs interne et externe



Figure: Inverse de la somme des distances aux contours



Figure: Forme médiane

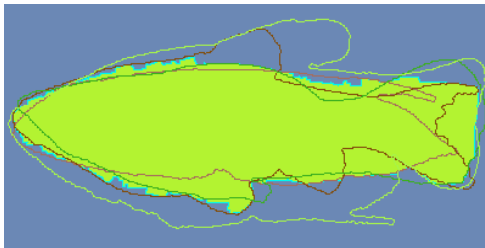


Figure: Forme médiane

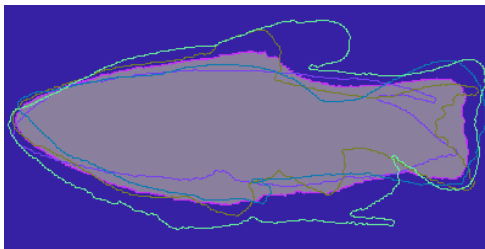


Figure: 4 contours de poissons et leur moyenne

