

Représentation auto-duale d'une image en lignes de niveau

Pascal Monasse

IMAGINE, École des Ponts ParisTech

Journée "Morphologie mathématique: structures et connexions"
à l'occasion du 70ème anniversaire de Jean Serra - 2 avril 2010

Topographie

Pour représenter la topographie sur une carte, on utilise les **lignes de niveau**

$$\{x | f(x) = \lambda\}, \lambda \in \mathbb{R}$$



Topographie

Pour représenter la topographie sur une carte, on utilise les **lignes de niveau**

$$\{x | f(x) = \lambda\}, \lambda \in \mathbb{R}$$

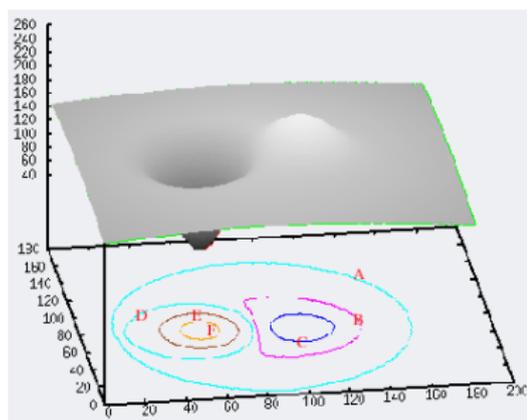


En fait, ces “lignes de niveau” peuvent être des ensembles arbitrairement complexes, il sera plus simple de s’intéresser aux **ensembles de niveau**

$$\{x | f(x) \geq \lambda\}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Arbre d'inclusion

- Supposons que les lignes de niveau sont des courbes de Jordan
- Celles-ci ayant un **intérieur** et un **extérieur**, nous pouvons les ordonner par inclusion
- Nous retrouverons cette structure d'arbre pour des images (quasi) quelconques



Ensembles de niveau

- **Définition** : si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on définit $[u \geq \lambda] := \mathcal{X}^\lambda u$, $[u \leq \lambda] := \mathcal{X}_\lambda u$
- **Monotonie** : $\lambda \rightarrow \mathcal{X}^\lambda u$ est décroissante et $\lambda \rightarrow \mathcal{X}_\lambda u$ est croissante de $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow (\mathcal{P}(\Omega), \subset)$
- **Complétude** : reconstruction de u à partir de ses ensembles de niveau

$$u(x) = \sup\{\lambda \mid x \in \mathcal{X}^\lambda\} = \inf\{\lambda \mid x \in \mathcal{X}_\lambda\} \quad (1)$$

Ensembles de niveau

- **Définition** : si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on définit $[u \geq \lambda] := \mathcal{X}^\lambda u$, $[u \leq \lambda] := \mathcal{X}_\lambda u$
- **Monotonie** : $\lambda \rightarrow \mathcal{X}^\lambda u$ est décroissante et $\lambda \rightarrow \mathcal{X}_\lambda u$ est croissante de $(\mathbb{R}, \leq) \rightarrow (\mathcal{P}(\Omega), \subset)$
- **Complétude** : reconstruction de u à partir de ses ensembles de niveau

$$u(x) = \sup\{\lambda \mid x \in \mathcal{X}^\lambda\} = \inf\{\lambda \mid x \in \mathcal{X}_\lambda\} \quad (1)$$

Inversement :

Theorem (Reconstruction)

- Soit $X : \lambda \rightarrow X^\lambda$ décroissante ou $X : \lambda \rightarrow X_\lambda$ croissante, on définit u par (1)
- Alors $X^\lambda = \mathcal{X}^\lambda u$ ou $X_\lambda = \mathcal{X}_\lambda u$
- Hypothèse supplémentaire de **semi-continuité** lorsque $X(\mathbb{R})$ est infini :
 $X^\lambda = \bigcap_{\mu > \lambda} X^\mu$ ou $X_\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} X_\mu$

Min- et max-trees

- Ω étant muni d'une topologie (continue ou discrète), considérons les **composantes connexes** des ensembles de niveau : $\mathcal{CC}(\mathcal{X}^\lambda u)$ et $\mathcal{CC}(\mathcal{X}_\lambda u)$
- Alors $(\mathcal{CC}(\mathcal{X}^\lambda u), \subset)$ et $(\mathcal{CC}(\mathcal{X}_\lambda u), \subset)$ sont des **arbres de composantes** (max-tree et min-tree) : deux éléments d'un des ensembles sont soit disjoints soit emboîtés

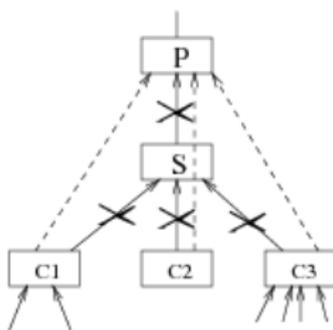
Min- et max-trees

- Ω étant muni d'une topologie (continue ou discrète), considérons les **composantes connexes** des ensembles de niveau : $\mathcal{CC}(\mathcal{X}^\lambda u)$ et $\mathcal{CC}(\mathcal{X}_\lambda u)$
- Alors $(\mathcal{CC}(\mathcal{X}^\lambda u), \subset)$ et $(\mathcal{CC}(\mathcal{X}_\lambda u), \subset)$ sont des **arbres de composantes** (max-tree et min-tree) : deux éléments d'un des ensembles sont soit disjoints soit emboîtés
- Algorithmes :
 - ① Salembier-Oliveras-Garrido (1998) : croissance de régions, $O(n \log n)$
 - ② Najman-Couprie (2004) : tri des pixels puis utilisation de Union-Find de Tarjan (path compression, union by rank), efficace quand $u(\Omega)$ est un ensemble discret petit
- Sortie : arbre avec attributs pour chaque noeud (niveau λ , aire, etc.) et un index donnant pour chaque pixel le plus petit noeud le contenant

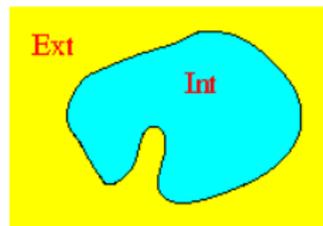
Limitations

- 2 arbres, chacun étant suffisant pour représenter complètement l'image
- Pas de relation simple entre les arbres
- Etant donné un opérateur agissant sur un arbre, son dual est donné par le même opérateur agissant sur l'autre arbre, mais comment vérifier son auto-dualité ?

Opération élémentaire sur un arbre : suppression d'un noeud, i.e. contraction d'une arête (parent, enfant)



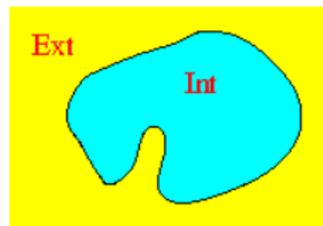
Théorème de Jordan



Theorem (de Jordan, formulation de Wikipedia)

Le complémentaire d'une courbe de Jordan S dans un plan affine réel est formé d'exactly deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe de Jordan S .

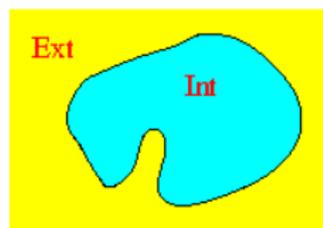
Théorème de Jordan



Theorem (de Jordan, formulation de Wikipedia)

Le *complémentaire* d'une courbe de Jordan S dans un plan affine réel est formé d'exactly *deux composantes connexes* distinctes, dont l'une est *bornée* et l'autre *non*. Toutes deux ont pour frontière la courbe de Jordan S .

Théorème de Jordan



Theorem (de Jordan, formulation de Wikipedia)

Le *complémentaire* d'une courbe de Jordan S dans un plan affine réel est formé d'exactement *deux composantes connexes* distinctes, dont l'une est *bornée* et l'autre *non*. Toutes deux ont pour frontière la courbe de Jordan S .

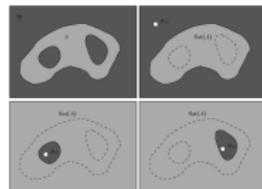
En fait, nous n'avons pas besoin de toutes ces propriétés. Nous nous contentons de ceci :

Le complémentaire de S a une unique composante connexe non bornée.

Opérateur de saturation

Pour un ensemble borné S on définit :

- **extérieur** : composante connexe non bornée de S^c
- **trous** : autres composantes connexes de S^c
- **saturation** : union de S et de ses trous



Propriétés de l'opérateur de saturation :

- préserve la topologie (ouvert \rightarrow ouvert, fermé \rightarrow fermé, connexe \rightarrow connexe)
- croissant pour l'inclusion
- idempotent
- Si S est fermé, $\text{Sat}(S) = \text{Sat}(\partial S)$

Arbre d'inclusion des formes

Theorem

- Appelons *formes* les saturations des composantes supérieures ($Sat(X), X \in \mathcal{CC}([u \geq \lambda])$) et des composantes inférieures strictes ($Sat(X), X \in \mathcal{CC}([u < \lambda])$)
- L'ensemble des formes a une structure d'arbre d'inclusion.

Remarques :

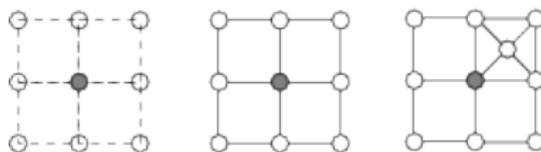
- Il faut une propriété topologique sur Ω , l'**unicohérence** (rectangle de \mathbb{R}^N , sphère, mais pas tore)
- u est supposé **semi-continue supérieurement**, ce qui assure que chaque forme est soit ouverte soit fermée
- En discret, $<$ peut être remplacé par \leq

Fast Level Set Transform

- **Détecte** successivement et **nivelle** les feuilles de l'arbre
- **Détection** : part d'un extremum local et croissance de région
- **Nivellement** : met au niveau de gris le plus proche des pixels voisins

Ceci est la version pixelisée de l'algorithme. Il existe aussi la version bilinéaire (pour l'image interpolée bilinéaire) qui est très proche :

- On rajoute les **points selles** dans le graphe de 4-adjacence des pixels
- On applique la version pixelisée sur ce nouveau graphe
- Pour une quantification donnée Λ de \mathbb{R} , on extrait l'arbre des formes de niveau dans Λ



Dilatation, érosion et principe de superposition

- Dilatation d'un ensemble X :
 - par élément structurant B , $\delta_B(X) = X + B$
 - par famille \mathcal{B} d'éléments structurants, $\delta_{\mathcal{B}}(X) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \delta_B(X)$
- Erosion : $\varepsilon_B(X) = (\delta_{-B}(X^c))^c$ et $\varepsilon_{\mathcal{B}}(X) = (\delta_{-\mathcal{B}}(X^c))^c$
- Fermeture $\varepsilon_{\mathcal{B}}\delta_{\mathcal{B}}(X)$ et ouverture $\delta_{\mathcal{B}}\varepsilon_{\mathcal{B}}(X)$ sont idempotents

Dilatation, érosion et principe de superposition

- Dilatation d'un ensemble X :
 - par élément structurant B , $\delta_B(X) = X + B$
 - par famille \mathcal{B} d'éléments structurants, $\delta_{\mathcal{B}}(X) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \delta_B(X)$
- Erosion : $\varepsilon_B(X) = (\delta_{-B}(X^c))^c$ et $\varepsilon_{\mathcal{B}}(X) = (\delta_{-\mathcal{B}}(X^c))^c$
- Fermeture $\varepsilon_{\mathcal{B}}\delta_{\mathcal{B}}(X)$ et ouverture $\delta_{\mathcal{B}}\varepsilon_{\mathcal{B}}(X)$ sont idempotents
- Principe de superposition :
 - 1 Décomposition de u en arbre des composantes
 - 2 Application d'un opérateur monotone indépendamment sur chacune des composantes
 - 3 Reconstruction de l'image



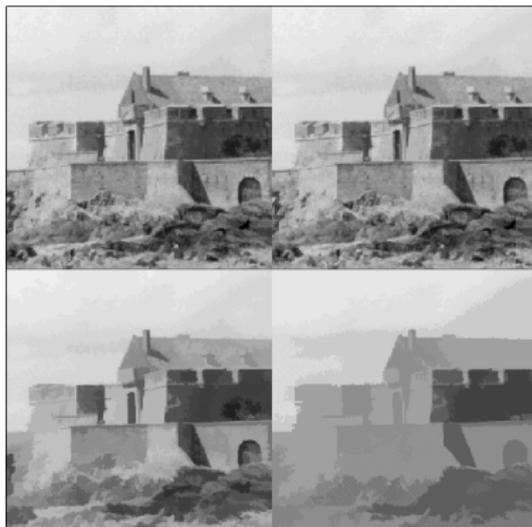
Filtres de grains

- Ouverture d'aire de Luc Vicent : ouverture avec $\mathcal{B} = \{\text{connexes d'aire } a\}$
- Concrètement, on ne garde d'un ensemble de niveau X que ses composantes connexes d'aire au moins a
- Nous pouvons faire la même chose avec l'arbre des formes (filtre de grain) : on ne garde que les formes d'aire au moins a
- Cela correspond à un élagage de l'arbre des composantes ou de l'arbre des formes



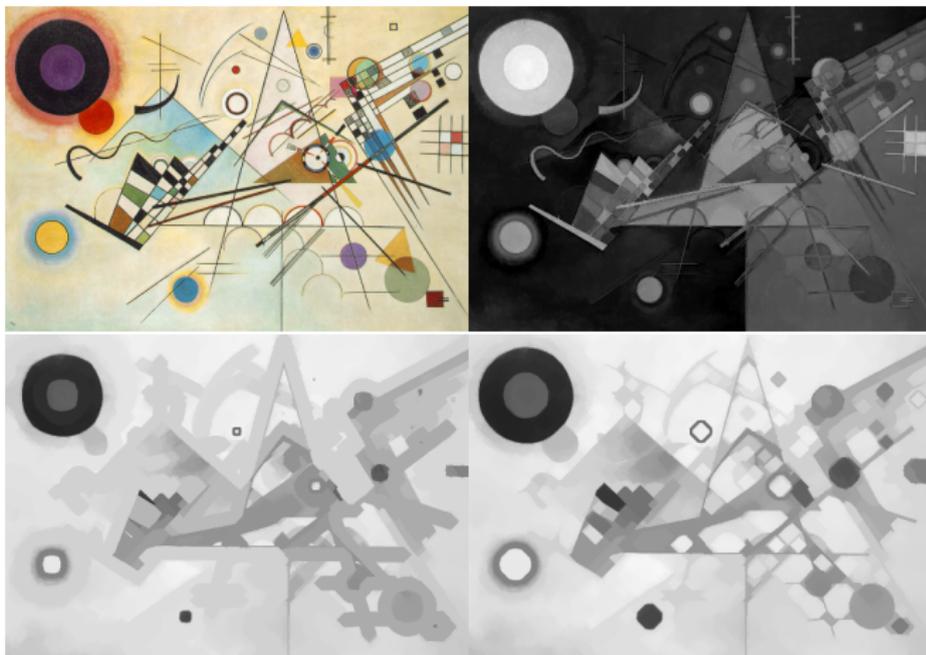
Auto-dualité

- Le filtre d'aire n'est pas son propre dual
- Pour pallier cet inconvénient, on peut alterner le filtre et son dual pour des aires croissantes (ASF) $F_a^c \circ F_a \circ \dots \circ F_1^c \circ F_1$. Ce n'est cependant toujours pas auto-dual
- Le filtre de grain est **auto-dual**



Un autre exemple : ouverture auto-duale

- Proposé par Renato Keshet (2005)
- Ouverture par élément structurant sur les formes
- Auto-dual

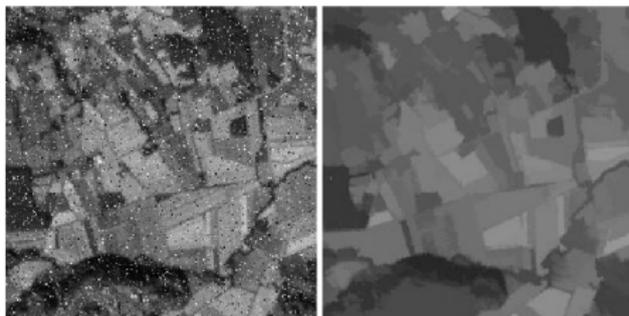
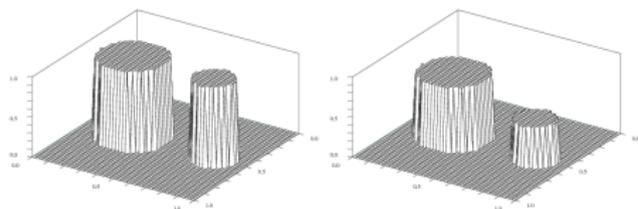


Variation totale

- Formule de la coaire :

$$TV(u) = \int \|\nabla u\| = \int \mathcal{H}^1([u = \lambda])d\lambda$$

- Le filtre de grain fait décroître la variation totale en enlevant des frontières
- Autre possibilité : réduire le contraste des lignes de niveau

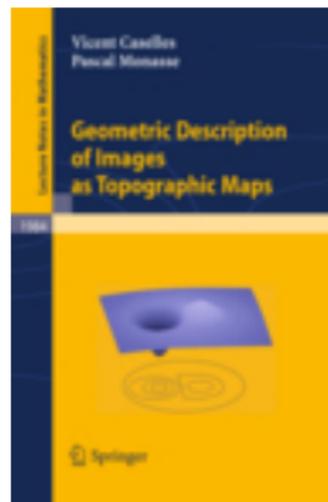


Conclusion

- L'arbre des formes est une représentation auto-duale d'une image
- Facile à utiliser pour générer une multitude de filtres auto-duaux
- Extraction efficace (FLST)

Une page de publicité

- Livre *Geometric description of images as topographic maps* (Vicent Caselles, Pascal Monasse), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1984, Jan. 2010, Springer
- Code libre de la FLST dans Megawave2 (<http://megawave.cmla.ens-cachan.fr>)
- Bientôt dans IPOL (<http://www.ipol.im>)



Merci de votre attention !

Questions ?