Segmentation par critères ensemble-fonction et opérateurs sur les partitions partielles

Christian Ronse
LSIIT UMR 7005 CNRS-UdS
Illkirch, France

2 avril 2010

Nouvelle philosophie de la segmentation d'images en morphologie mathématique. Principes de base :

- Traitement de régions locales guidé par l'image globale.

- Traitement des régions distinctes indépendamment l'une de l'autre.

- Assemblage non-contextuel de régions en partitions (partielles).

- Comparaison, sélection et traitement morphologique des partitions (partielles) selon l'ordre de raffinement.
  Ici seulement intervient le contexte inter-régions.

Racines :

- Filtrage connexe (J. Serra, P. Salembier, J. Crespo, etc.).

- Théorie des connexions et des connexions partielles (J. Serra, C. Ronse).

- Segmentation connective (J. Serra) et ses variantes séquentielle (J. Serra) et contrainte (P. Soille).

- Opérateurs sur les partitions partielles (C. Ronse).

Notations

E : espace de points.
T ensemble des valeurs (niveaux de gris, couleurs, etc.).

$\Pi(E)$: ensemble des partitions de E.
$\Pi^*(E) = \bigcup_{A \subseteq E} \Pi(A)$: ensemble des partitions partielles de E.

$\varnothing$: partition partielle vide.
$\mathbf{1}_A = \{A\}$ $(A \neq \emptyset)$, $\mathbf{1}_\emptyset = \varnothing$.
$\mathbf{0}_A = \{\{p\} \mid p \in A\}$.

$\mathsf{supp}(\pi) = \bigcup \pi$: support de la partiton partielle π, à savoir, union de ses blocs.

$\Pi(E,\mathcal{C}) = \Pi(E) \cap \mathcal{P}(\mathcal{C})$: ensemble des partitions de E dont les blocs appartiennent à $\mathcal{C}$.
$\Pi^*(E,\mathcal{C}) = \Pi^*(E) \cap \mathcal{P}(\mathcal{C})$: ensemble des partitions partielles de E dont les blocs appartiennent à $\mathcal{C}$.

σ : opérateur de scission d'ensembles, associant à chaque sous-ensemble de E une partition partielle de celui-ci :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \sigma(X) \in \Pi^*(X).$$

$\beta(\sigma)$: opérateur de scission de blocs dérivé de σ, qui transforme une partition partielle en appliquant σ à chacun de ses blocs :

$$\forall \pi \in \Pi^*(E),\ \beta(\sigma)(\pi) = \bigcup_{B \in \pi} \sigma(B).$$

$\beta(\sigma)$ est un opérateur anti-extensif sur $\Pi^*(E)$.

Une *connexion partielle* sur $\mathcal{P}(E)$ est une famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ telle que $\emptyset \in \mathcal{C}$ et pour $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{C}$.

Pour une connexion partielle $\mathcal{C}$:

$\mathsf{PC}^{\mathcal{C}}$: opérateur de scission d'ensembles associant à $X \in \mathcal{P}(E)$ la partition partielle $\mathsf{PC}^{\mathcal{C}}(X)$ de ses composantes $\mathcal{C}$-connexes.

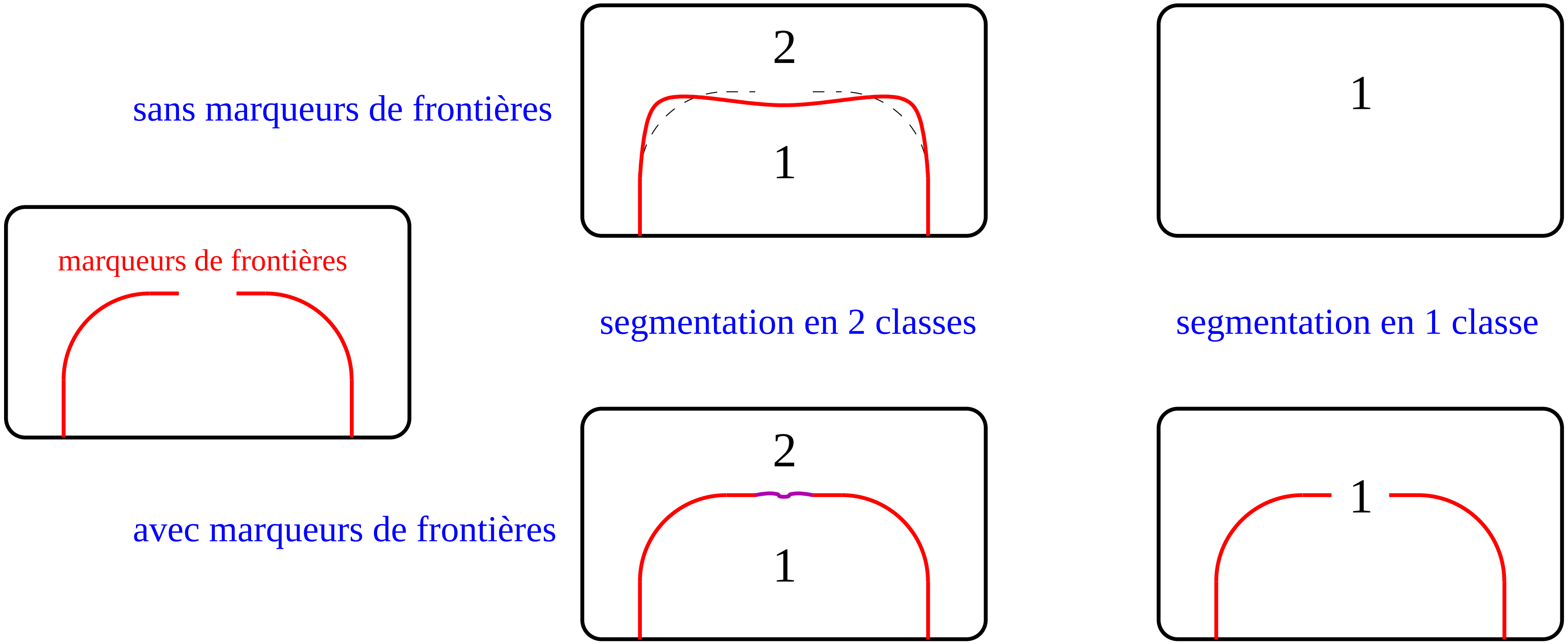
$\mathsf{CS}^{\mathcal{C}} = \beta(\mathsf{PC}^{\mathcal{C}})$: opérateur sur $\Pi^*(E)$ scindant chaque bloc d'une partition partielle en ses composantes $\mathcal{C}$-connexes.

Partitions partielles en segmentation

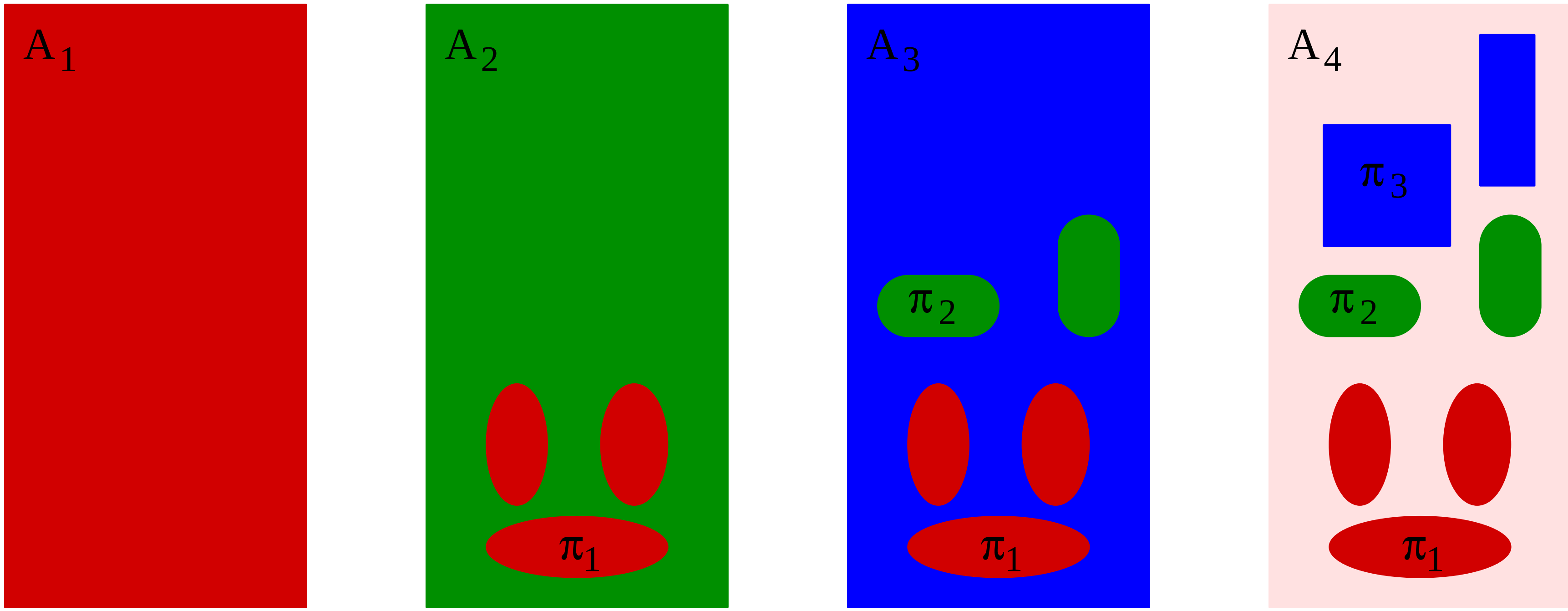
Le cadre approprié pour la création et transformation de segmentations est celui des partitions partielles plutôt que des partitions.

Raisons pratiques :

- Certains algorithmes de segmentation produisent une partition partielle : des régions disjointes, plus des frontières en dehors des régions.
- Cela permet de représenter des arêtes non-fermées et d'utiliser des marqueurs de frontières pour contraindre leur position.


sans marqueurs de frontières
2
1
1
marqueurs de frontières
segmentation en 2 classes
segmentation en 1 classe
avec marqueurs de frontières
2
1
1

- Dans la segmentation séquentielle (J. Serra), une 1ère segmentation de la fonction sur $A_1 = A$ donne une 1ère partition partielle π_1, puis une 2ème segmentation est appliquée à la fonction sur le résidu $A_2 = A_1 \setminus \text{supp}[\pi_1]$ de π_1, donnant une 2ème partition partielle π_2 de résidu $A_3 = A_2 \setminus \text{supp}[\pi_2]$, etc.



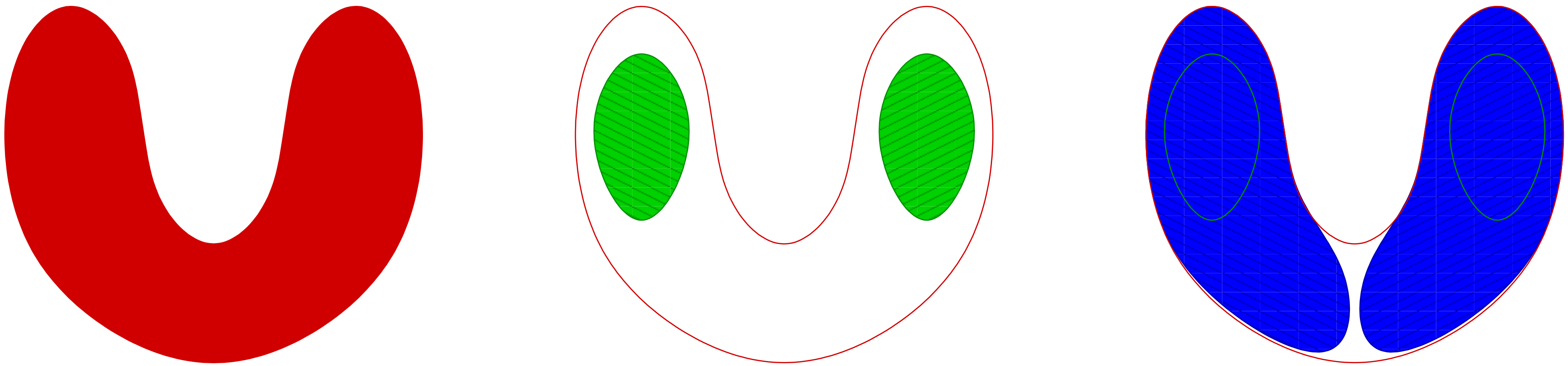
Raisons mathématiques :

- Les partitions partielles, ordonnées par raffinement, forment un treillis complet : cela permet de représenter dans un même cadre les aspects locaux et globaux.
  NB : $\Pi^*(E)$ et $\Pi^*(E)$ ont les mêmes opérations d'infimum et supremum non-vides et le même plus grand élément $\mathbf{1}_E$, mais ils diffèrent dans leur plus petit élément, $\emptyset$ pour $\Pi^*(E)$ et $\mathbf{0}_E$ pour $\Pi(E)$.

- La description des opérateurs sur les partitions est plus simple dans le cadre des partitions partielles, et la construction de connexions est plus simple dans le cadre des connexions partielles.

- Tout ensemble $A \in \mathcal{P}(E)$ correspond à la partition partielle $\mathbf{1}_A$.

Par exemple la croissance de régions dans un masque est un opérateur géodésique sur les partitions partielles.



π_{msk} $\qquad$ π_{mrq} $\qquad$ $\rho(\pi_{msk}, \pi_{mrq})$

Critère de segmentation

Les images sont des fonctions $E \to T$. Un critère est une application $\mathsf{cr} : T^E \times \mathcal{P}(E) \to \{faux, vrai\}$ (ou $\to \{0, 1\}$). Pour $F : E \to T$ et $A \subseteq E$, $\mathsf{cr}[F, A]$ vérifie si F est “homogène” sur A.
NB : on suppose $\mathsf{cr}[F, \emptyset]$ vrai pour toute fonction $F : E \to T$.

Pour une fonction $F : E \to T$ fixée, posons

$$\mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \mathsf{cr}[F, A] = vrai\} \quad .$$

Première sélection : Pour la segmentation de F sur un ensemble, toute partition partielle dont les blocs appartient à $\mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}}$ est *admissible* (selon le critère cr). Donc pour la segmentation de F sur $A \in \mathcal{P}(E)$, l'ensemble des partitions partielles admissibles est $\Pi^*(A, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}})$.

Méthode de segmentation

Une méthode de segmentation est une application

$$\mathsf{mt} : T^E \times \mathcal{P}(E) \to \Pi^*(E) : (F, A) \mapsto \mathsf{mt}[F, A] \in \Pi^*(A),$$

qui associe à $F : E \to T$ et $A \subseteq E$ la segmentation de F sur A.

La méthode mt *suit* le critère cr si les segmentations produites sont toujours admissibles selon ce critère :

$$\forall\, F \in T^E,\ \forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ \mathsf{mt}[F, A] \in \Pi^*(A, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}}),$$

c.-à-d. $\forall\, B \in \mathsf{mt}[F, A],\ \mathsf{cr}[F, B] = vrai$.

Pour une fonction $F : E \to T$ fixée, la méthode mt induit l'opérateur de scission d'ensembles

$$\sigma^F_{\mathsf{mt}} : \mathcal{P}(E) \to \Pi^*(E) : A \mapsto \mathsf{mt}[F, A]$$

et l' opérateur de scission de blocs $\Sigma^F_{\mathsf{mt}} = \beta(\sigma^F_{\mathsf{mt}})$ sur $\Pi^*(E)$.

Principe de maximalité

Quand la méthode mt suit le critère cr, pour $F \in T^E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$, la segmentation $\mathsf{mt}[F, A]$ doit être "choisie" parmi les partitions partielles *admissibles*, dans l'ensemble $\Pi^*(A, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}})$. Comment ?

Par exemple en *théorie du consensus* en sciences sociales, on choisira plutôt une partition "médiane" ou "centrale".

Ici, comme le critère cr a généralement tendance à être plus souvent vérifié par de petits ensembles, il est préférable de prendre les blocs de $\mathsf{mt}[F, A]$ les plus grands possibles.

NB : comme de toute manière $\mathsf{cr}[F, \emptyset] = vrai$ et $\mathsf{mt}[F, \emptyset] = \varnothing$ (puisque $\Pi^*(\emptyset) = \{\varnothing\}$), on peut se restreindre au cas où $A \neq \emptyset$.

Réciprocité : un ensemble sur lequel la fonction est “homogène” n’est pas scindé dans sa segmentation : $\forall F \in T^E$, $\forall A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $\mathsf{cr}[F,A] = vrai \;\Rightarrow\; \mathsf{mt}[F,A] = \{A\}$, en d’autres termes, $A \in \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}} \Rightarrow \sigma^F_{\mathsf{mt}}(A) = \mathbf{1}_A$.

On dit que la méthode mt *suit* le critère cr *réciproquement* si mt suit cr et satisfait la condition de réciprocité ci-dessus.

mt suit le critère cr réciproquement

ssi $\forall F \in T^E$, Σ^F_{mt} est idempotent et son domaine d’invariance est $\Pi^*(E, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}})$.

Donc le critère suivi est donné par la méthode : mt détermine cr.

Maximalité : la segmentation d'un ensemble donne une partition partielle admissible maximale (selon l'ordre de raffinement) de cet ensemble : $\forall\, F \in T^E$, $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$, $\mathsf{mt}[F, A]$ est un élément maximal de $\Pi^*(A, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}})$.

On dit alors que la méthode mt *suit* le critère cr *maximalement*.
La maximalité implique la réciprocité.

mt suit le critère cr maximalement

ssi $\forall\, F \in T^E$, $\forall\, \pi \in \Pi^*(E)$, $\Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi)$ est un élément maximal de $\{\pi' \in \Pi^*(E, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}}) \mid \pi' \leq \pi\}$,

ssi $\forall\, F \in T^E$, Σ^F_{mt} est idempotent, son domaine d'invariance est $\Pi^*(E, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}})$, et $\forall\, \pi_0, \pi_1 \in \Pi^*(E)$,
$\Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_0) \leq \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_1) \leq \pi_0 \;\Rightarrow\; \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_1) = \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_0)$.

Ce principe de “suivi maximal” est implicitement postulé dans les axiomes classiques de segmentation :

- Une région homogène n’est pas scindée.
- Une région non-homogène est partitionnée en régions homogènes.
- Si on fusionne des blocs de la partition, la région résultante n’est plus homogène.

Connexité

On suppose une connexion partielle "standard" $\mathcal{C}_{std}$ sur $\mathcal{P}(E)$ (p.ex. 4- ou 8-connexité sur $\mathbf{Z}^2$) et on requiert que la connexité selon $\mathcal{C}_{std}$ soit incluse dans le critère : $\mathsf{cr}[F, A] = vrai \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{C}_{std}$.

Déterminisme

L'algorithme utilisé pour construire la segmentation $\mathsf{mt}[F, A]$ doit être déterministe, le résultat ne doit pas dépendre d'un choix.

Contre-exemple : construction successive de régions par sélection et fusion aléatoire de zones plates contrôlée par un critère satisfait par les zones plates.

$\pi := \varnothing$;

répéter :

— *choisir* une zone plate $Z \subseteq E \setminus \mathsf{supp}(\pi)$ et poser $R := Z$;

— tant qu'il reste une zone plate $Z \subseteq E \setminus \mathsf{supp}(\pi)$ adjacente à R telle que $\mathsf{cr}[F, R \cup Z] = vrai$:

choisir une telle zone plate Z et poser $R := R \cup Z$;

— poser $\pi := \pi \cup \{R\}$;

jusqu'à ce qu'il ne reste plus de zone plate $Z \subseteq E \setminus \mathsf{supp}(\pi)$.

Segmentation (partiellement) connective

On dit que le critère cr est *partiellement connectif* si pour toute fonction $F : E \to T$, $\mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}}$ est une connexion partielle sur $\mathcal{P}(E)$; si $\mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}}$ est une connexion pour toute fonction F, on dit que cr est *connectif*.

Au critère partiellement connectif cr on associe la méthode mt définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $\mathsf{mt}[F, A] = \mathsf{PC}^{\mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}}}(A)$.

Exemples :

- Connectif : zones plates, zones quasi-plates.
- Partiellement connectif : seuillage, lisse (Lipschitz régional), saut.

Formulations équivalentes (J. Serra, C. Ronse) :

1. $\sqcap^*(E, \mathcal{C}_{\mathsf{cr}}^F)$ est stable sous l'opération de supremum et $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)$, $\mathsf{mt}[F, A] = \bigvee \sqcap^*(A, \mathcal{C}_{\mathsf{cr}}^F)$.

2. $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)$, $\sqcap^*(A, \mathcal{C}_{\mathsf{cr}}^F)$ a un plus grand élément et $\mathsf{mt}[F, A] = \max \sqcap^*(A, \mathcal{C}_{\mathsf{cr}}^F)$.

3. Σ_{mt}^F est une ouverture de domaine d'invariance $\sqcap^*(E, \mathcal{C}_{\mathsf{cr}}^F)$.

Donc mt suit cr maximalement, et c'est l'unique méthode qui le fait.

Ici le critère suivi donne la méthode : cr détermine mt.

Construire un critère et une méthode à partir d'une segmentation globale

Généralement un algorithme de segmentation produit, à partir d'une fonction $F : E \to T$, une segmentation globale $Seg(F)$ de F sur E. Il faut l'étendre à une segmentation de F sur A pour chaque $A \in \mathcal{P}(E)$, ce qui donnera la méthode mt.

1ère approche. La segmentation de F sur A est la segmentation de la restriction F_A de F à A : $\mathsf{mt}[F, A] = Seg(F_A)$. Si Σ_{mt}^{F} est idempotent, alors mt suit réciproquement le critère cr donné par $\mathsf{cr}[F, A] = vrai$ ssi $Seg(F_A) = \mathbf{1}_A$. On peut alors vérifier s'il le suit maximalement.

2ème approche (J. Serra, ...). On suppose que l'algorithme de segmentation est conçu pour produire des partitions (partielles) à blocs connexes selon une connexion partielle "standard" $\mathcal{C}_{std}$: $\forall F \in T^E$, $Seg(F) \in \Pi^*(E, \mathcal{C}_{std})$. On définit alors le critère cr vérifié sur toutes les parties connexes des blocs de $Seg(F)$:

$$\text{cr}[F, A] = vrai \text{ ssi } A \in \mathcal{C}_{std} \text{ et } \exists B \in Seg(F),\ A \subseteq B.$$

Le critère cr est partiellement connectif ;
si $\mathcal{C}_{std}$ est une connection (non partielle) et $Seg(F)$ est une partition (non partielle), alors cr est connectif.

3ème approche (P. Soille, communication privée). On définit le critère cr comme suit : cr$[F, A] = vrai$ ssi A est un bloc de $Seg(F)$.

Le critère cr est partiellement connectif.

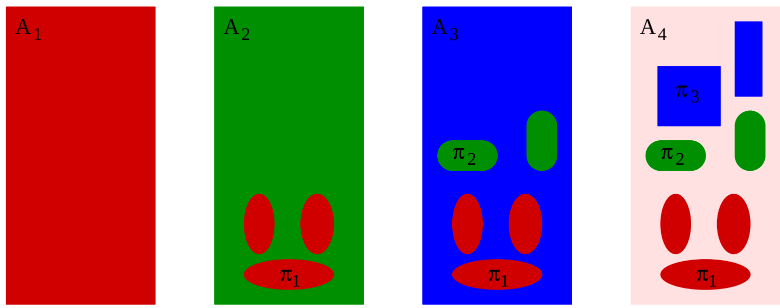
NB : On peut rendre connectif un critère partiellement connectif cr en le posant vrai sur tout les singletons : $\forall\, F \in T^E$, $\forall\, p \in E$, cr$[F, \{p\}] = vrai$.

Segmentation séquentielle

Prenons n méthodes $\mathsf{mt}^1, \ldots, \mathsf{mt}^n$ $(n \geq 2)$. Pour $F \in T^E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$, définissons :

$$\begin{array}{rlll} & A_1 = A \ , & & \pi_1 = \mathsf{mt}^1[F, A] \ , \\ i = 2, \ldots, n : & A_i = A_{i-1} \setminus \mathsf{supp}(\pi_{i-1}) \ , & & \pi_i = \mathsf{mt}^i[F, A_i] \ . \end{array}$$

Cf. plus haut.
Les partitions partielles $\pi_1, \ldots, \pi_n$ ont des supports disjoints.



On définit la *combinaison séquentielle* $\mathsf{mt}^{[1,\ldots,n]}$ des méthodes par

$$\mathsf{mt}^{[1,\ldots,n]}[F, A] = \pi_1 \cup \cdots \cup \pi_n.$$

La méthode séquentielle a été utilisée dans la thèse de C. Gomila pour la segmentation de séquences video.

Soit $\mathsf{cr}^{[1,\ldots,n]}$ la *combinaison séquentielle* des critères $\mathsf{cr}^1,\ldots,\mathsf{cr}^n$, définie par

$$\mathsf{cr}^{[1,\ldots,n]}[F,A] = vrai \text{ ssi } \exists\, i \in \{1,\ldots,n\} \text{ tel que}$$
$$\mathsf{cr}^i[F,A] = vrai \text{ et } \forall\, j < i,\ \forall\, B \subseteq A,\ \mathsf{cr}^j[F,B] = faux.$$

Si pour $i = 1,\ldots,n$, mt^i suit cr^i maximalement, alors $\mathsf{mt}^{[1,\ldots,n]}$ suit $\mathsf{cr}^{[1,\ldots,n]}$ maximalement.

Segmentation contrainte

Soit mt une méthode et cn un critère supplémentaire de *contrainte* sur les blocs de la segmentation. On en déduit la méthode contrainte $\mathsf{mt}_{\mathsf{cn}}$ qui élimine de la segmentation les blocs ne satisfaisant pas la contrainte :

$$\mathsf{mt}_{\mathsf{cn}}[F, A] = \{B \in \mathsf{mt}[F, A] \mid \mathsf{cn}[F, B] = vrai\} \quad .$$

Si mt suit cr réciproquement, alors $\mathsf{mt}_{\mathsf{cn}}$ suit $\mathsf{cr} \wedge \mathsf{cn}$ réciproquement.

Le suivi n'est généralement pas maximal.

Algorithme de Soille : étant donnée une séquence croissante $\mathsf{mt}^1, \ldots, \mathsf{mt}^n$ de méthodes connectives correspondant aux critères connectifs croissants $\mathsf{cr}^1, \ldots, \mathsf{cr}^n$, et un critère de contrainte cn, on prend la méthode $\mathsf{mt}^1_{\mathsf{cn}} \vee \cdots \vee \mathsf{mt}^n_{\mathsf{cn}}$.

Classification algébrique des méthodes

Méthode connective : mt suit maximalement un critère connectif, c.-à-d. Σ^F_{mt} est une ouverture.

Méthode condensante : Σ^F_{mt} est une condensation-ouverte : $\Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_0) \leq \pi_1 \leq \pi_0 \Rightarrow \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_1) = \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_0)$.

Méthode maximale : mt suit maximalement un critère, c.-à-d. Σ^F_{mt} est idempotent et $\Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_0) \leq \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_1) \leq \pi_0 \Rightarrow \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_1) = \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_0)$.

Méthode surcondensante : Σ^F_{mt} est une surcondensation-ouverte : $\Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_0) \leq \pi_1 \leq \pi_0 \Rightarrow \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_1) \geq \Sigma^F_{\mathsf{mt}}(\pi_0)$.

Méthode réciproque : mt suit réciproquement un critère, c.-à-d. Σ_{mt}^{F} est idempotent.

Soient $CONN, COND, MAX, SURC, REC$ les classes respectivement des méthodes connectives, condensantes, maximales, sur-condensantes et réciproques. On a

$$CONN \subseteq COND \subseteq \left\{ \begin{array}{c} MAX \\ SURC \end{array} \right\} \subseteq REC \quad .$$

Stabilité : $CONN$, $COND$ et $SURC$ sont stables par supremum.
$COND$ et MAX sont stables par combinaison séquentielle.
REC est stable par contrainte.
Si mt $\in CONN$, alors $\mathsf{mt}_{\mathsf{cn}} \in SURC$.

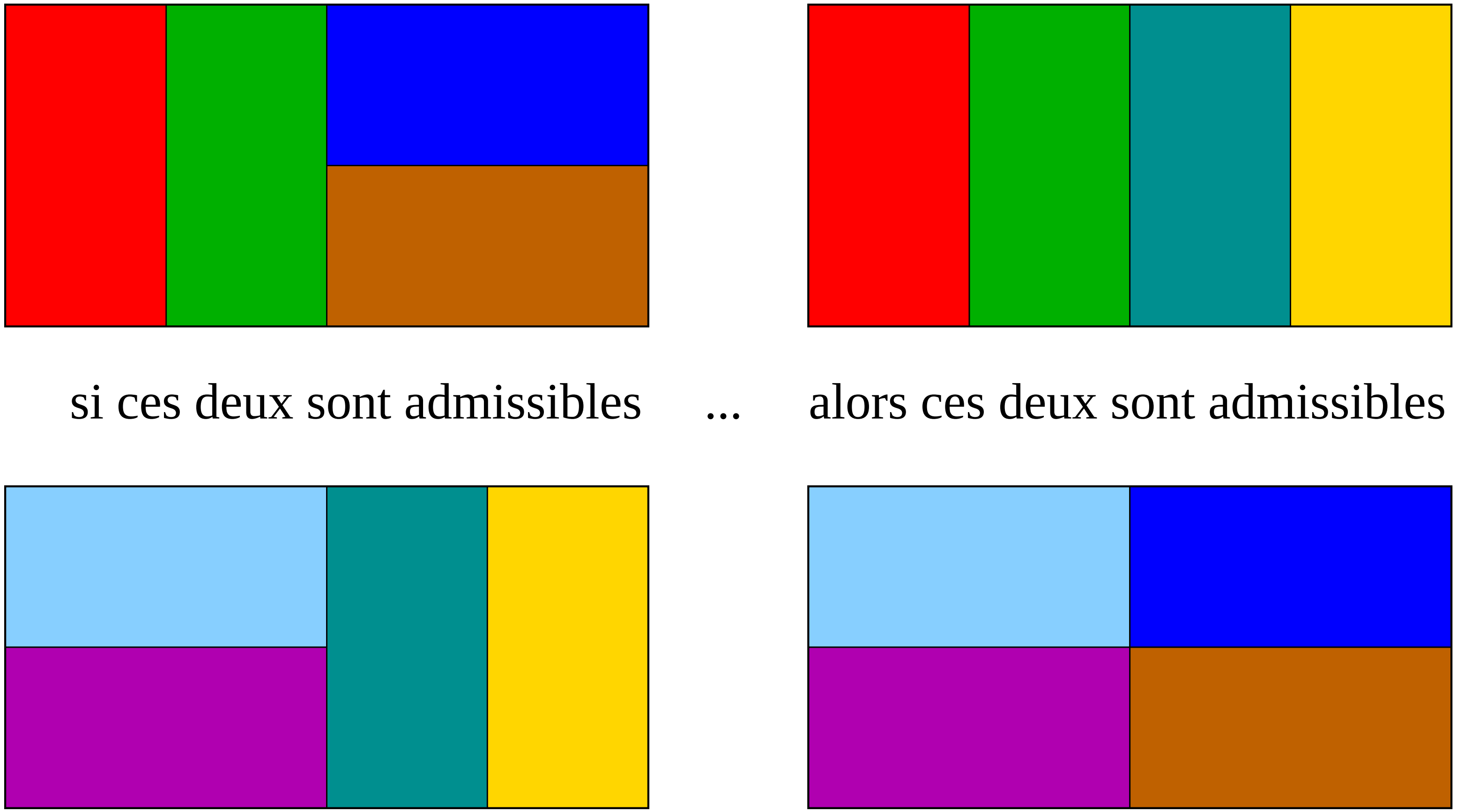
Ces méthodes sont-elles locales ?

La vérification de cr$[F, A]$ requiert généralement plus que la connaissance de la restriction de F à un voisinage local de A.

Exemple extrême : On pose cr$[F, A] = vrai$ ssi A est une union connexe de zones plates, et la variance de la restriction de F à A est au plus 10% de la variance totale de F. Ici la vérification de cr$[F, A]$ utilise F dans sa totalité.

Pour les méthodes existantes de segmentation connective, le degré de localité dépend souvent de la représentation de l'image. Par exemple, dans le critère de *saut*, cr$[F, A]$ dépend des valeurs de F sur les voisinages de toutes les zones plates intersectant A (pour déterminer si ces zones plates sont des minima régionaux) ; donc si on représente F par le graphe pondéré de ses zones plates, cr$[F, A]$ dépend du voisinage à distance 2 de A.

Par contre le critère d'admissibilité d'une partition partielle, à savoir appartenir à $\Pi^*(A, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}})$, est non-contextuel.



Généralement, $\mathsf{mt}[F, A]$ est construit à partir de $\Pi^*(A, \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}})$ par des opérations dans le treillis des partitions partielles (supremum, combinaison séquentielle, etc.). Le contexte inter-régions n'intervient qu'à travers ces opérations.

Donc la méthode sera faiblement contextuelle comparé entre autres aux approches basées sur la minimisation d'une fonctionnelle (de type "énergie").

Traitement post-segmentation : Pour améliorer la segmentation, on appliquera à celle-ci un opérateur sur les partitions partielles. Selon l'approche "faiblement contextuelle", celui-ci sera construit en appliquant un opérateur à chaque bloc séparément, puis en combinant les résultats.

Champ de vision

Questions à poser pour chaque couple critère-méthode.

1ère question : Sur quelle étendue faut-il connaître F pour la segmentation de A ?
Pour $B \in \mathcal{P}(E)$, soit F_B la restriction de F à B.

- Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, existe-t-il $V(A) \supseteq A$ tel que pour $V(A) \subseteq B \subseteq E$ on ait : $\text{cr}[F, A] = \text{cr}[F_B, A]$ pour tout $F : E \to T$?

- Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, existe-t-il $W(A) \supseteq A$ tel que pour $W(A) \subseteq B \subseteq E$ on ait : $\text{mt}[F, A] = \text{mt}[F_B, A]$ pour tout $F : E \to T$?

2ème question : Sur quel champ faut-il segmenter F pour obtenir A comme bloc ?

- Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, existe-t-il $N(A) \supseteq A$ tel que pour $N(A) \subseteq B \subseteq E$ on ait : $A \in \mathrm{mt}[F, B] \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathrm{mt}[F, E]$ pour tout $F : E \rightarrow T$?

Des réponses ont été proposées avant que les questions ne soient clairement posées.

Contraintes photométriques, topologiques, géométriques ou combinées

On suppose une connexion partielle “standard” $\mathcal{C}_{std}$ sur $\mathcal{P}(E)$. P.ex. sur $\mathbf{Z}^2$, $\mathcal{C}_{std}$ est la famille des ensembles 4- (resp., 8-) connexes.

On veut définir un critère partiellement connectif cr en fonction de certaines contraintes. Stratégie : pour une fonction F, $\mathcal{C}_{\mathsf{cr}}^{F}$ sera construite à partir d’une famille $\mathcal{G}_{\mathsf{cr}}^{F}$ de germes.

Contraintes photométriques : La fonction “ne varie pas trop” sur chaque germe. Deux exemples :

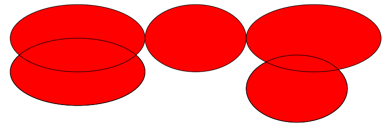
- Contrainte de saut (J. Serra) : On prend un paramètre h de hauteur. Le germe G est associé à un minimum régional M de F, tel que $G \cap M \neq \emptyset$ et $F(G) \subseteq [F(M), F(M) + h[$, où $F(X) = \{F(x) \mid x \in X\}$. *Comme elle requiert une intersection non-vide avec M, cette contrainte n'est pas héréditaire, une partie H de G peut ne pas la satisfaire.*

- Contrainte de Lipschitz (F. Meyer, ...) : On prend un paramètre s de pente. La restriction F_G de F sur le germe G satisfait la condition de Lipschitz d'ordre s, c.-à-d. pour $x, y \in G$, $|F(x) - F(y)| \leq s \cdot d(x, y)$, où d est une métrique sur E. *Cette contrainte est héréditaire, elle est satisfaite par toute partie H de G.*

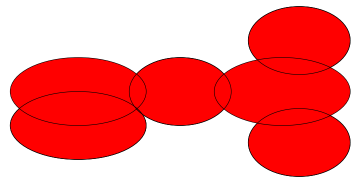
Contraintes de connexité : Tout d'abord, $\mathcal{G}^F_{\text{cr}} \subseteq \mathcal{C}_{std}$.

Ensuite, deux choix pour $\mathcal{C}^F_{\text{cr}}$:

1. $\mathcal{C}^F_{\text{cr}}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}_{std}$ qui sont unions d'éléments de $\mathcal{G}^F_{\text{cr}}$.



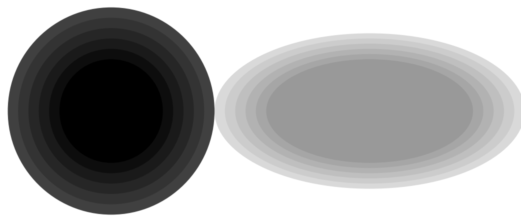
2. $\mathcal{C}^F_{\text{cr}}$ est la connexion partielle engendrée par $\mathcal{G}^F_{\text{cr}}$, c.-à-d. l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}_{std}$ qui sont chaînages d'éléments de $\mathcal{G}^F_{\text{cr}}$.



Le choix 2 est fait pour les zones quasi-plates, en prenant pour germes tous les connexes où la fonction satisfait la condition de Lipschitz d'ordre s.

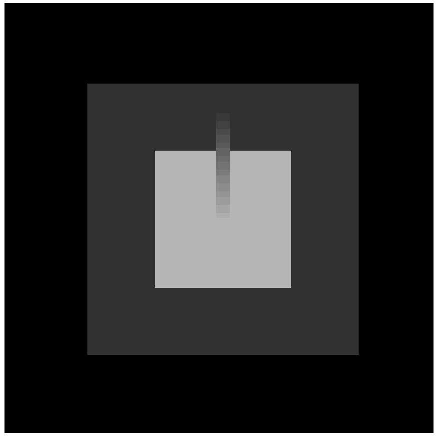
Le choix 1 est parfois fait (cf. saut, Lipschitz régional par ouverture), mais il a un défaut, il permet de mettre dans une même région des germes de niveaux très différents.

Deux germes adjacents satisfaisant chacun les critères de Lipschitz et de saut, mais dont les niveaux sont très différents.



Contraintes géométriques : Forme, longueur et épaisseur des germes. Par exemple, éviter les transitions étroites entre zones de niveaux différents :

Le carré central est séparée de la zone grise l'entourant par une marche abrupte, excepté sur un étroit passage satisfaisant la condition de Lipschitz ; ils sont donc tous deux inclus dans la même zone quasi-plate (J. Serra).



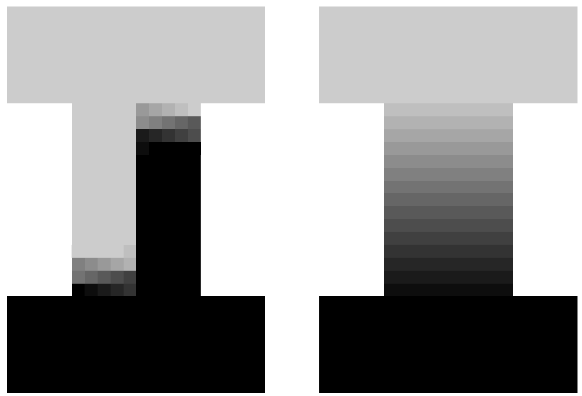
On prend une famille $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}_{std}$ de formes, et tout germe doit être un translaté d'une forme dans $\mathcal{B}$: $\mathcal{G}^F_{\mathsf{cr}} \subseteq \{B_p \mid B \in \mathcal{B},\ p \in E\}$.

Exemple : Lipschitz régional par ouverture. B est une boule de rayon r, et la restriction de F au germe B_p satisfait la contrainte de Lipschitz d'ordre s.

Une alternative serait de ne pas poser de conditions sur les germes, mais uniquement sur les zones résultantes, qui devront appartenir à la connexion partielle $\{C \in \mathcal{C}_{std} \mid C \circ B = C\}$ des "zones épaisses" (pour un $B \in \mathcal{C}_{std}$), en d'autres termes en restreignant $\mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}}$ à $\{C \in \mathcal{C}^F_{\mathsf{cr}} \mid C \circ B = C\}$.

Mais le résultat est moins bon.

P.ex. pour le critère de Lipschitz, on obtient des *chemins lisses serpentant dans une zone épaisse* au lieu d'une *transition lisse épaisse*.



Contrainte combinée géométrique et photométrique : Ouverture en tout ou rien à niveaux de gris. On considère des couples (B^i, R^i), où $B^i \in \mathcal{C}_{std}$ est un élément structurant *d'objet* et R^i un élément structurant *de fond*. Au point p on prend le germe B^i_p si

$$\min_{x \in B^i_p} F(x) \geq \max_{x \in R^i_p} F(x) + h \quad , \text{ c. à-d. } (F \ominus B^i)(p) \geq (F \oplus \check{R}^i)(p) + h \quad .$$

Il y a la variante “floue” avec

$$((F \oplus H) \ominus B^i)(p) \geq ((F \ominus H) \oplus \check{R}^i)(p) + h$$

pour un élément structurant de lissage H symétrique ($H = \check{H}$).

Très utile en segmentation vasculaire (B. Bouraoui, B. Naegel, N. Passat, C. Ronse). On prend ici pour les B^i des boules de rayons variables et pour les R^i des anneaux de rayons et orientations variables.

Hyperconnexion

Soit $B \in \mathcal{C}_{std}$, et soit $S^F = \{p \in E \mid B_p \in \mathcal{G}^F_{\mathsf{cr}}\}$. On peut prendre $\mathsf{mt}[F, A] = \mathsf{PC}^{\mathcal{C}_{std}}(S^F \cap A)$: la segmentation de F sur A est formée des composantes $\mathcal{C}_{std}$-connexes de l'ensemble des points de A marquant des germes.

P.ex. Lipschitz régional par érosion : ici $B_p \in \mathcal{G}^F_{\mathsf{cr}}$ ssi la restriction de F à B_p satisfait la condition de Lipschitz d'ordre s.

Cette approche tend à dilater les contours séparant les régions.

On pourrait prendre comme “région” toute union maximale de germes inclus dans A dont les marqueurs forment un ensemble $\mathcal{C}_{std}$-connexe, c.-à-d. la “segmentation” de A serait

$$\{C \oplus B \mid C \in \mathsf{PC}^{\mathcal{C}_{std}}(S^F \cap (A \ominus B))\} \ ,$$

mais ce n’est plus une partition partielle. Cela s’apparente plutôt à une décomposition en composantes hyperconnexes.