

A3SI - ESIEE
2, avril 2010

Colloque
Structures et
connexions

Hiérarchies *et* *ordre de la construction*

Jean Serra

UPE CCIP
LIGM ESIEE

A3SI

Introduction

Lorsqu'on parcourt des études récentes de segmentation dans la perspective morphologique, comme

- **Salembier P., Garrido, L.**, Binary partition tree...Segmentation, and information Retrieval IEEE Trans. Image. Processing. , 2000
- **Serra J. , Mlynarczuk M.**, Morphological merging of multidimensional data, Proc. STERMAT'2000, Cracow, Sept. 2000, pp.385-390
- **Soille, P.:** Constrained connectivity for hierarchical image partitioning and simplification. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 30 (2008)1132-1145
- **Noyel G., Angulo J., et Jeulin D.**, On distances, paths and connections for hyperspectral image segmentation, Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology, Rio de Janeiro, Brazil, Oct. 10 --13, 2007, MCT/INPE, v. 1, p. 399--410.
- **Angulo J., Serra, J.:** Modeling and segmentation of colour images in polar representations Image and Vision Computing 25 (2007) 475-495.
- **Meyer, F. et Najman, L.** Segmentation, arbres de poids minimum et hiérarchies, Ch 7 in Morphologie mathématique, Vol I Najman Talbot Eds 2009

...trois traits apparaissent régulièrement

Introduction

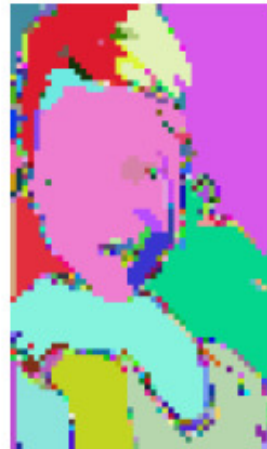
- 1 - L 'algorithme de segmentation dépend d'un paramètre qui hiérarchise les partitions;
- 2 - On a du mal avec de petites classes parasites, e.g.



$f_{\lambda_{61}}$
($45 \times 76 \times 61$)



λ -FZ
 $\lambda = 0.003$



λ -FZ
 $\lambda = 0.004$



λ -FZ
 $\lambda = 0.005$



λ -FZ
 $\lambda = 0.006$

Segmentations par zones quasi-plates de paramètres λ , (G. Noyel, J. Angulo et D. Jeulin)

Introduction

3 - On combine des partitions venues de bandes spectrales différentes, ou ici, de polarisations tournantes.



Morphological merging of multidimensional data, ISS 2000 (J. Serra, M. Mlynarczuk),

Plan

1 - Le passage d'une hiérarchie à une *partition significative* relève de

l'optimisation de fonctionnelles dans une hiérarchie.

2- La question des *petites classes* et celle des *partitions synthétiques* relèvent d'une même approche, celle de

l'ordre de la construction.

Première partie

Segmentation

**dans une hiérarchie par
optimisation de fonctionnelles.**

Famille des coupes

- On appelle hiérarchie de partitions toute chaîne **finie**

$$H = \{ \pi_i, 0 \leq i \leq n \} \quad \text{avec} \quad i \leq j \Rightarrow \pi_i \leq \pi_j$$

dans l'espace des partitions de E , **fini**, pour l'ordre \leq .

- Associons à H la famille \mathcal{S} de toutes les classes $S_i(x)$ de ses partitions

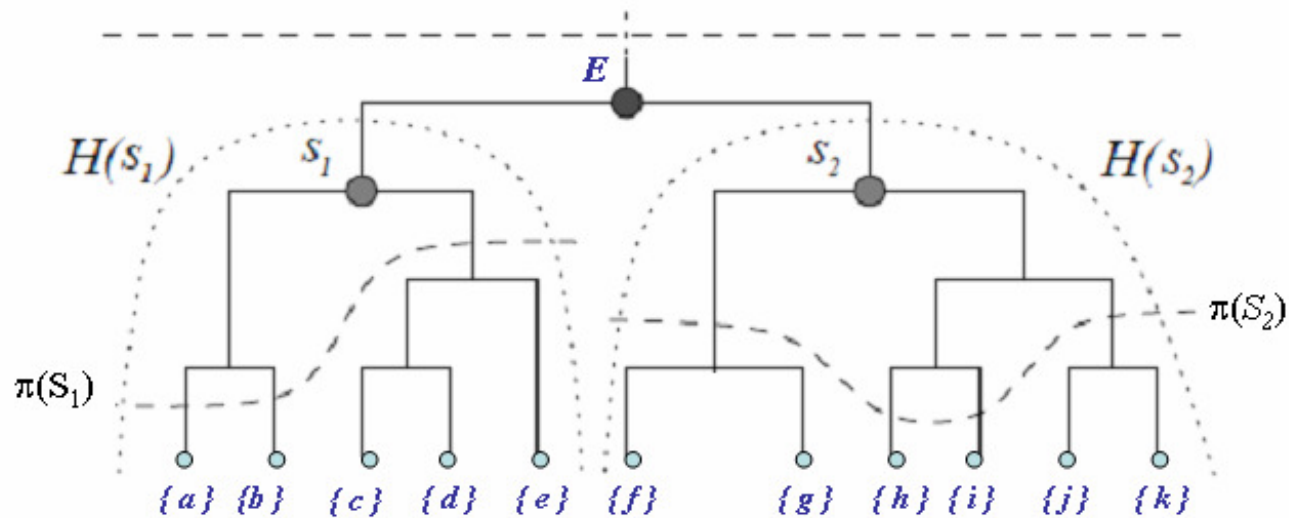
$$\mathcal{S} = \{ S_i(x), x \in E, 0 \leq i \leq n \}$$



Coupes ondulantes

A partir de la hiérarchie initiale H , on peut construire beaucoup de partitions dont les classes sont dans \mathcal{S}

On les appelle des coupes π :



Treillis Π des coupes

L'ensemble $\Pi(E)$ des coupes π_i de H , de classes dans \mathcal{S} vérifie une bonne propriété :

- $\Pi(E)$ est un treillis pour l'ordre défini sur les partitions;
- où les classes de ***l'infimum et du supremum*** en x sont donnés par ***l'intersection et la réunion*** des classes;
- Cela signifie que même si au départ, l'ordre sur toutes les partitions de E n'engendre pas de treillis, celles de $\Pi(E)$ en sont, et de structure très simple.

Ultramétrie, connexion et hiérarchie

Relativement à la famille \mathcal{S} , les trois énoncés suivants sont équivalents:

1. H est une hiérarchie,
2. l'ensemble \mathcal{S} des classes des partitions π_i de H est un espace ultramétrique, de distance l'indexation de la hiérarchie,
3. L'ensemble $\mathcal{S} \cup \emptyset$ est une connexion, et pour toute fonction F , tout critère binaire σ

$$\sigma: (F, \mathcal{S} \cup \emptyset) \rightarrow \{0, 1\}$$

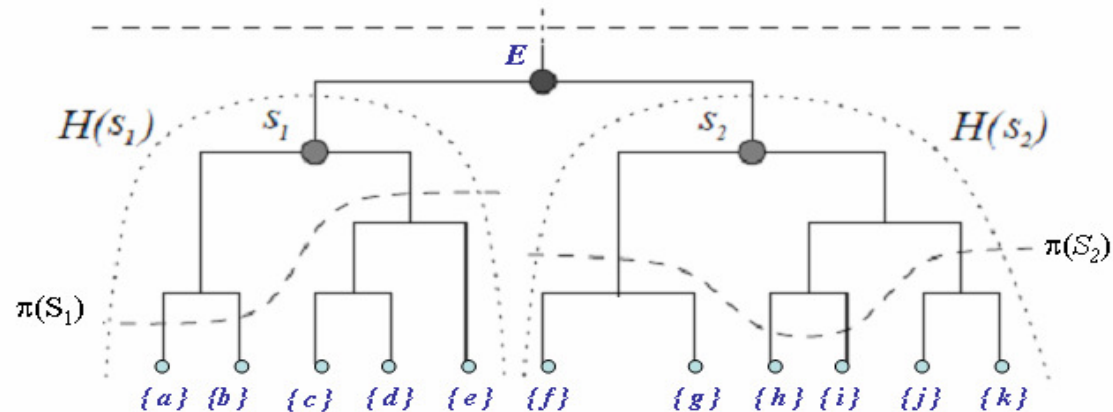
est connectif.

Ensemble des coupes

De même que $\Pi(E)$ est la famille des coupes π_i de E ,
de même, $\Pi(S)$ est celle des coupes π_i de S

Tout cela forme l'ensemble

$$\Pi^* = \{ \Pi(S), S \in \mathcal{S} \}$$



Croissance hiérarchique

- Associons une énergie aux coupes de Π^* i.e. une fonction positive

$$\omega : \Pi^* \rightarrow \mathbb{R}$$

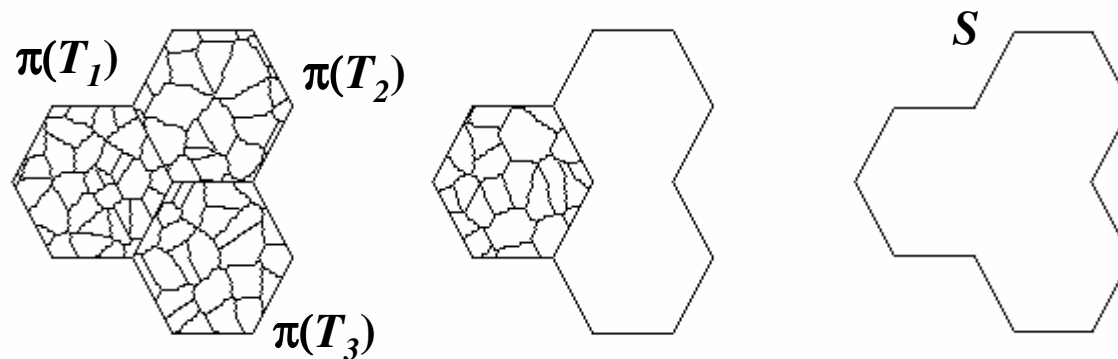
- La recherche des coupes minimales se simplifie quand on relie les énergies des couples père/fils S et T, comme la ***croissance hiérarchique*** :

$$\omega(\pi_1(T)) \leq \omega(\pi_2(T)) \Rightarrow \omega[\pi_1(T) \sqcup \pi(S \setminus T)] \leq \omega[(\pi_2(T) \sqcup \pi(S \setminus T))],$$

Récurrance entre coupes minimales

Quand l'énergie est croissante, la coupe minimale de S est

soit $[\pi(T_1) \sqcup \pi(T_2) \sqcup \pi(T_3)]$, soit S lui-même



d'où une montée des coupes minimales des singletons vers celle(s) de E . L'algorithme de L. Guigues en résulte.

Treillis des coupes minimales

- A chaque comparaison S on peut avoir égalité. D'où ***beaucoup de coupes minimales.***
 - Celles-ci forment un treillis pour l'ordre des partitions, qui peut servir à classer selon une deuxième énergie.
- (voir les exemples de Soille et de Zanoguera ci-dessous)

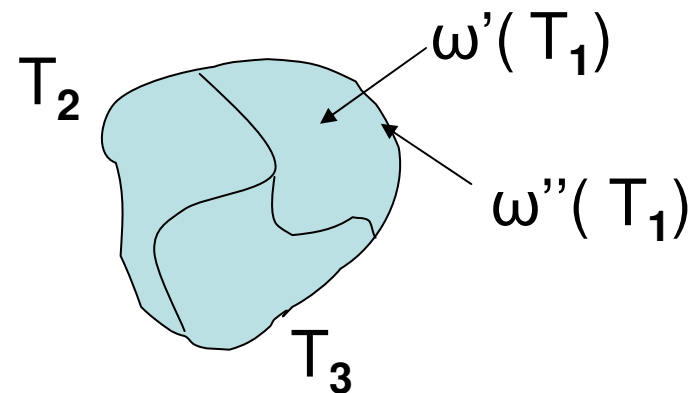
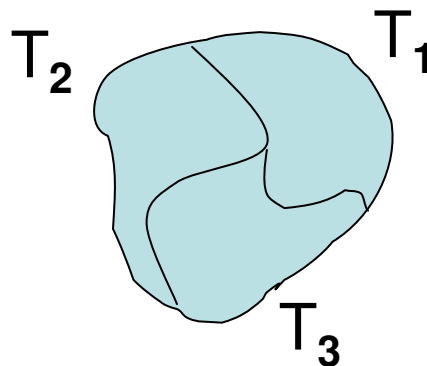
Exemple I : énergie additive

Modèles séparables de Guigues et Al.

Pour chaque classe fille T_k , somme de ω' dans la classe et ω'' sur ses bord, puis pour S

$$\omega(S) = \sum_{1 \leq k \leq p} \omega'(T_k) + \omega''(\partial T_k),$$

l'archétype en est la fonctionnelle de Mumford et Shah.



Exemple II : énergie additive

Imagettes de Salembier et Garrido

- Dans chaque classe T , la fonction f est remplacée par sa moyenne, et l'approximation est estimée par

$$\omega'(T) = \sum_{x \in R} \|f(x) - m(T)\|^2$$

- Si le codage d'un élément de frontière est k , celui de T vaut

$$\omega''(T) = 24 + 0.5 k |\partial T|$$

- Calcul d'une coupe minimale $\pi(E)$, pour l'énergie $\omega' = \omega' + \omega''$, puis minimisation en λ de l'énergie $\omega'(T) + \omega''(T)$

Exemple III : suprema d'énergie

Segmentation sous contrainte de Soille et Grazzini

- On prend pour énergie pour les classes

$$\omega(S) = 0 \quad \text{si } \sup\{ f(x), x \in S \} - \inf\{ f(x), x \in S \} \leq \omega_0$$

$$\omega(S) = 1 \quad \text{sinon,}$$

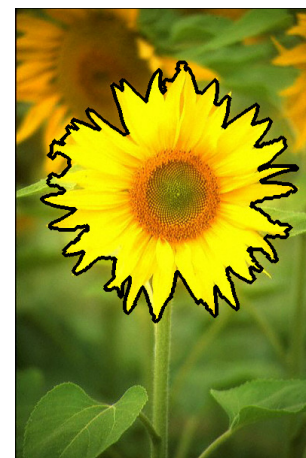
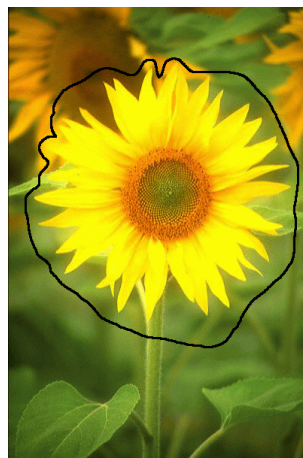
où ω_0 est un seuil d'énergie donné;

- On étend aux partitions par V-composition;
- On prend la plus grande partition d'énergie minimale.

Exemple IV : suprema d'énergie

Lasso de Zanoguera et Al.

- On prend pour énergie pour les classes
 $\omega(S) = 0$ si $S \subseteq A$; $S \in \mathcal{S}$
 $\omega(S) = 1$ sinon,
- On étend aux partitions par V-composition;
- On prend la plus grande partition d'énergie minimale.



Deuxième partie

Ordre de la construction et combinaisons de partitions

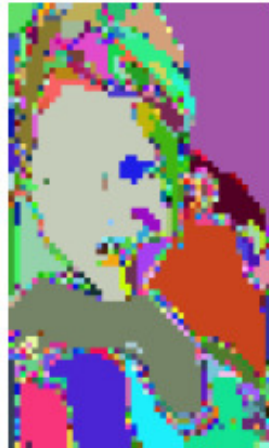
Introduction

Comment réduire les petites classes ?

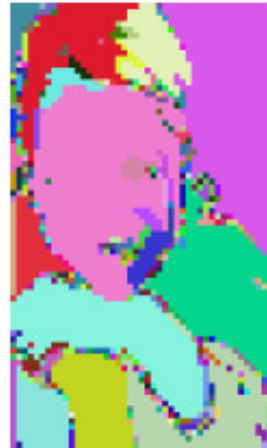
Elles parasitent toute la hiérarchie



$f_{\lambda_{61}}$
(45 × 76 × 61)



λ-FZ
λ = 0.003



λ-FZ
λ = 0.004

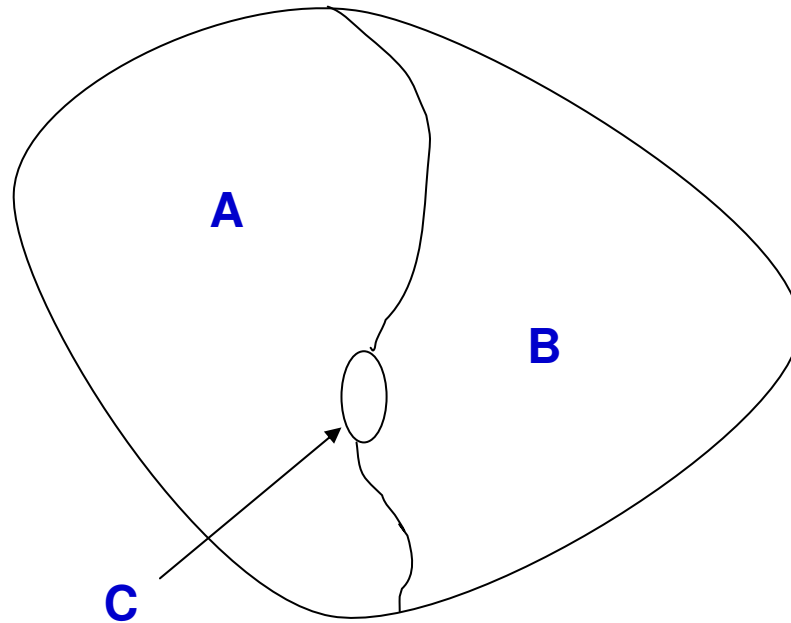


λ-FZ
λ = 0.005



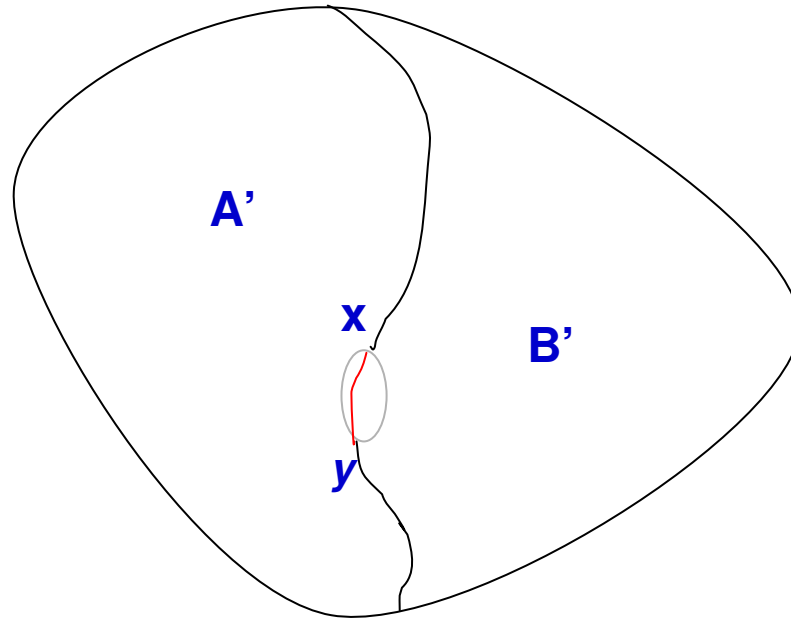
λ-FZ
λ = 0.006

Petites classes: ce qu'on a



- Le petit grain **C** est jugé de trop,
- et il n'y a aucune raison de le fusionner avec **A** plutôt que **B**

Ce qu'on voudrait avoir



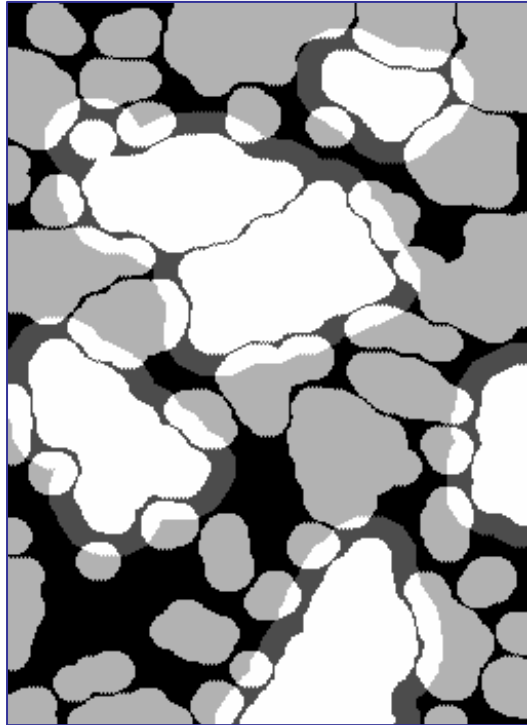
On voudrait réduire à deux ensembles A' et B' :

- qui contiennent A et B ;
- qui soient séparés par un arc simple de x à y .

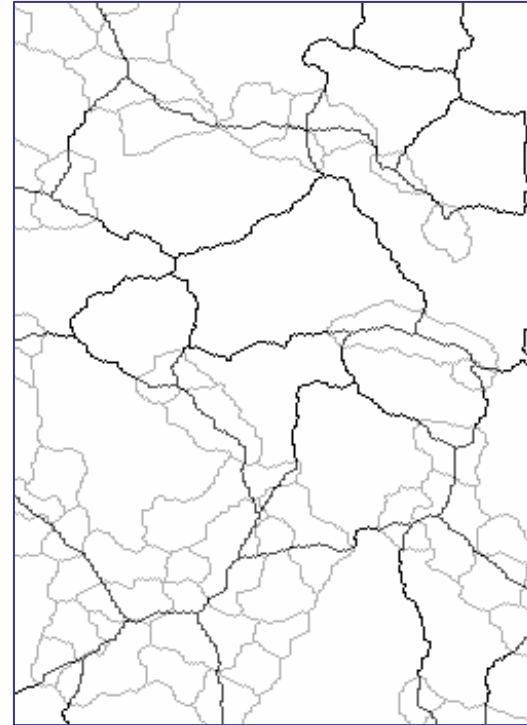
L'ordre de la construction

- L'ordre de l'inclusion porte sur les points. Ici nous construisons un ordre sur les **composantes connexes**
- Soit C^* une connexion sur $\mathcal{P}(E)$, de composantes A^* , B^* etc..
- La condition:
 $A \preccurlyeq B$ ssi tout $B^* \subseteq B$ contient au moins un $A^* \subseteq A$
définit un ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$, appelé
« **ordre de la construction** » (Les grains de A construisent B),
- qui s'étend aux partitions via leurs classes.

Ordre de la construction



Pour deux ensembles



Pour deux partitions

Exemple



a)

b)

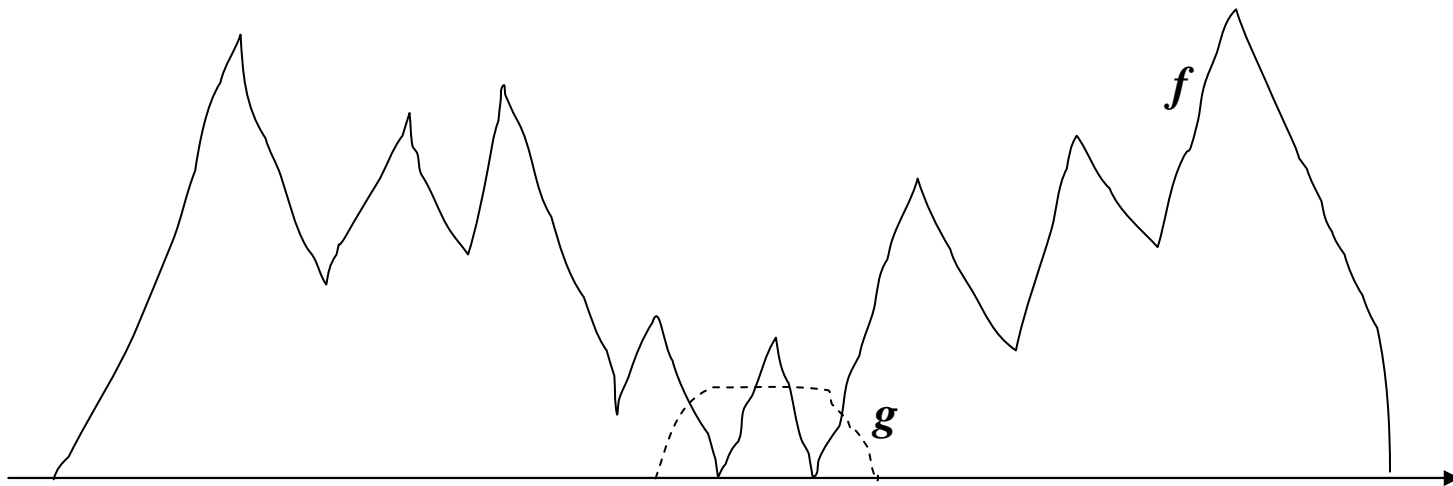
L'empire ottoman : a) en 1878 ; b) en 1913.

On a $b) \supseteq a)$ mais pas $b) \geq a)$

Ordre pour les fonctions

- L'ordre de la construction s'étend aux fonctions :

$f \preceq g$ ssi chaque section de f reconstruit celle de g de même niveau.



Propriétés de \preceq

- Cet ordre ***ne préserve pas la connexion*** :
quand $A \preceq B$ des cc de A peuvent être en dehors de B
- Pour les ensembles, il n'est ***pas comparable avec l'inclusion***; pour les partitions on a

$$D \leq D' \quad \Rightarrow \quad D \preceq D' , \quad D, D' \in \mathcal{D}(E).$$

- Il n'engendre ***pas de treillis***:
(Deux composantes A^* et A'^* de A sont l'une et l'autre des \preceq -majorants de A , mais ils n'admettent pas de plus petit majorant).
- Par passage au complément, on a un ***autre*** ordre de la construction, à la différence de l'ordre de l'inclusion.

Opérations permise: ouvertures connexes

- Pas de treillis \Rightarrow pas de dilatation
- En revanche, les ouvertures connexes sont permises.
- Une **ouverture connexe** γ relative à la connexion C^* , est une opération croissante pour \preceq et idempotent, qui ne peut que supprimer des cc.
- On a toujours: $\gamma \leq I$ and $\gamma \succeq I$

Opérations permises:

\preceq -épaississements

- L' **épaississement** ψ est une opération \preceq - extensive et idempotente.

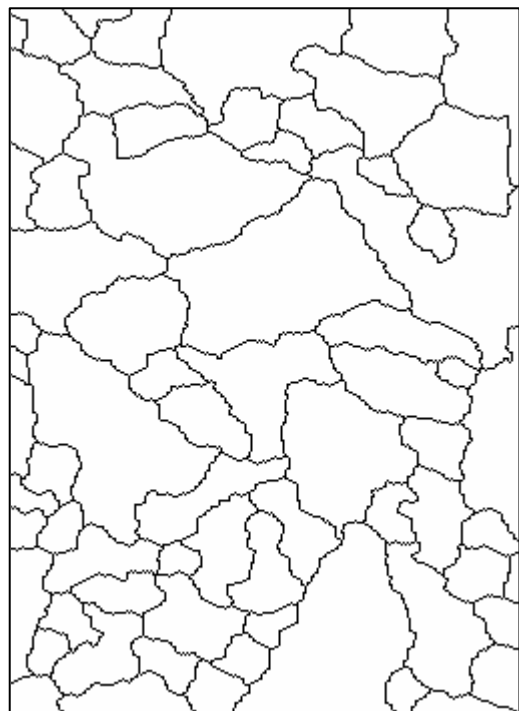
En plus, on demande ici qu'elle ne crée pas de cc.

- Les deux opérateurs γ et ψ suffisent pour nos problèmes
- Soit un \subseteq -épaississement ψ et une ouverture connexe γ sur $\mathcal{P}(E)$, on a

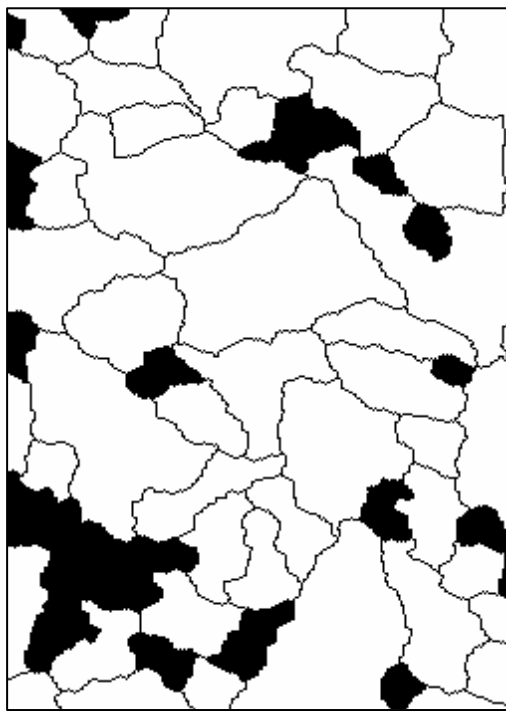
$$I \preceq \psi \gamma = \gamma \psi \gamma = (\psi \gamma)^2 \quad \text{and} \quad I \preceq \psi \gamma \psi = (\gamma \psi)^2$$

i.e. **les deux produits de composition sont des \preceq -épaississements**

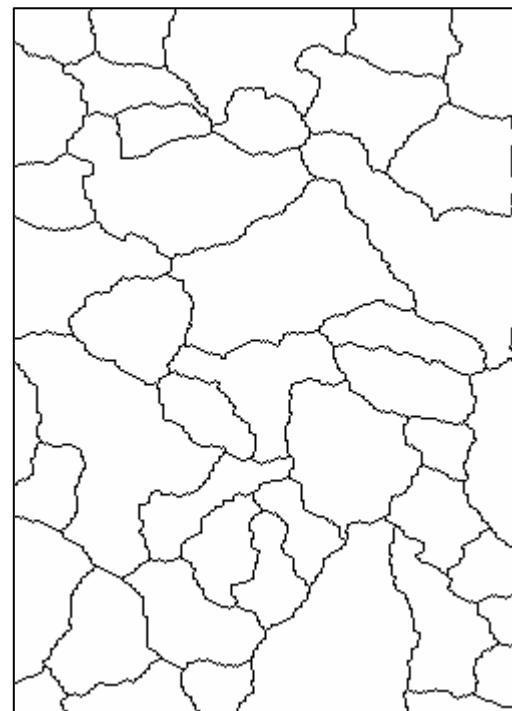
Exemple de \preceq -épaississement



a)



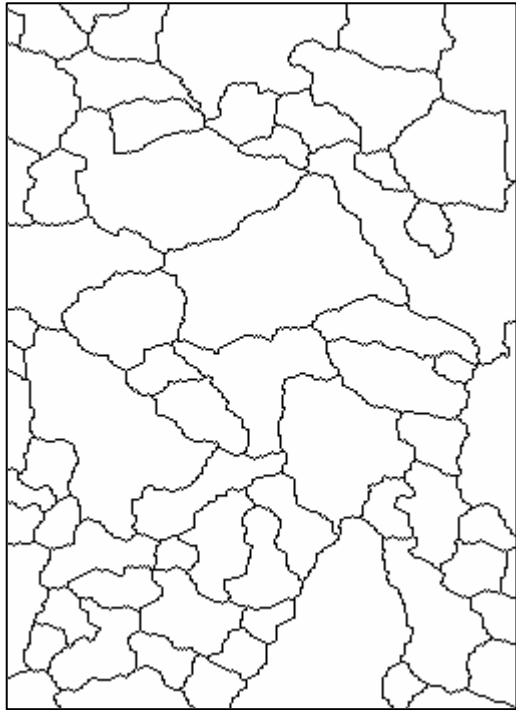
b)



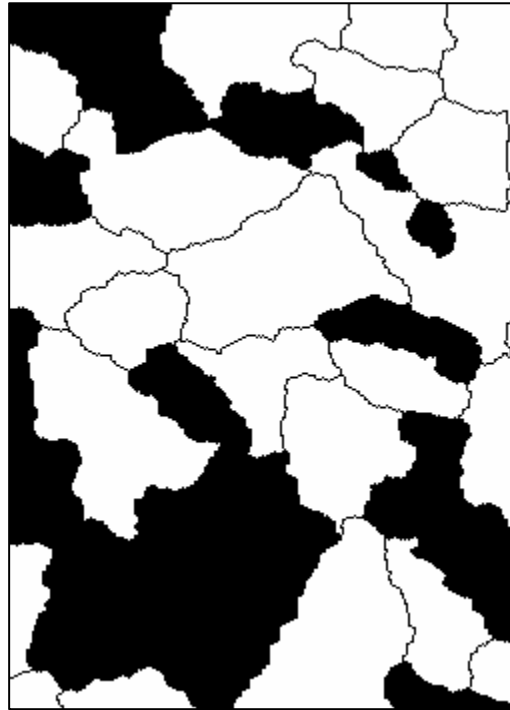
c)

- a) partition Initiale A (ou plutôt « tessellation »)
- b) $\gamma_{10}(A)$ enlève les classes de disque inscrit $r < 10$
- c) $\psi \gamma_{10}(A)$, où ψ l'opération de skiz, ou de Voronoï
(N.B. l'idempotence est atteinte au premier coup)

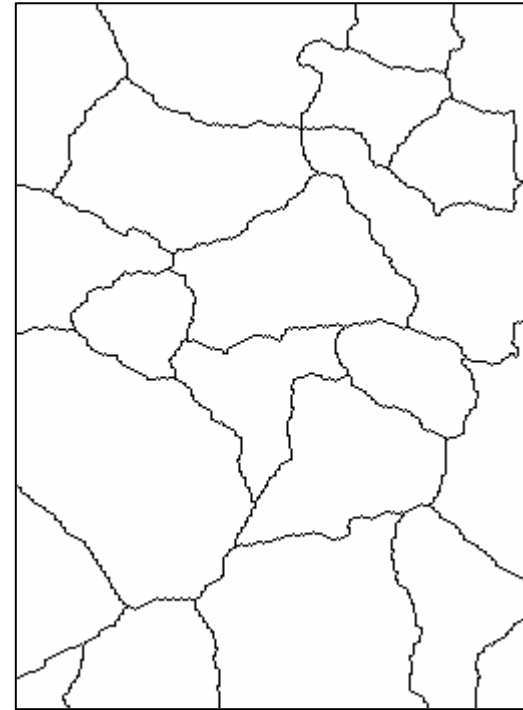
Exemple de \llcorner -épaississement



a)



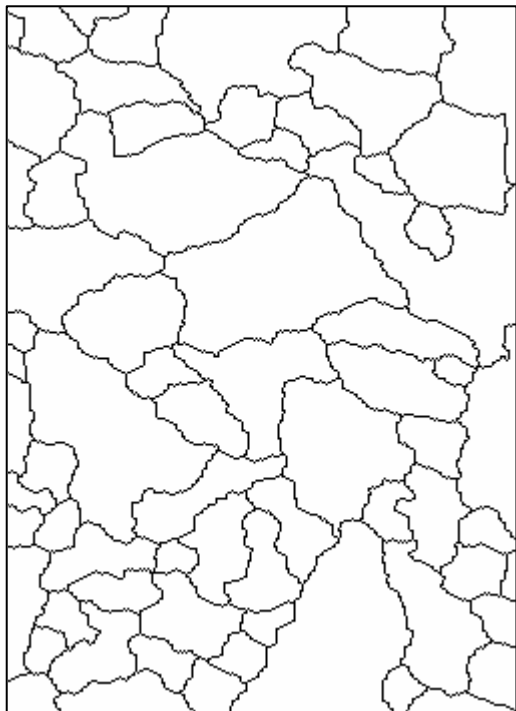
b)



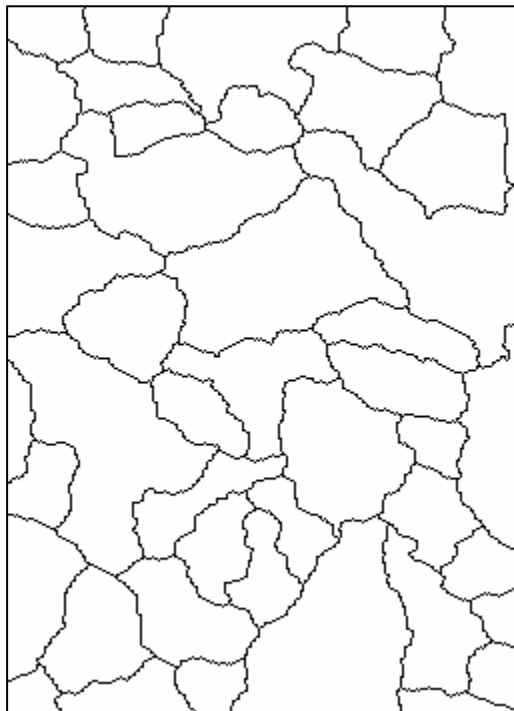
c)

- a) même tessellation initiale A ,
- b) $\gamma_{15}(A)$ enlève toutes les classes de disque inscrit $r < 15$,
- c) $\Psi \gamma_{15}(A)$.

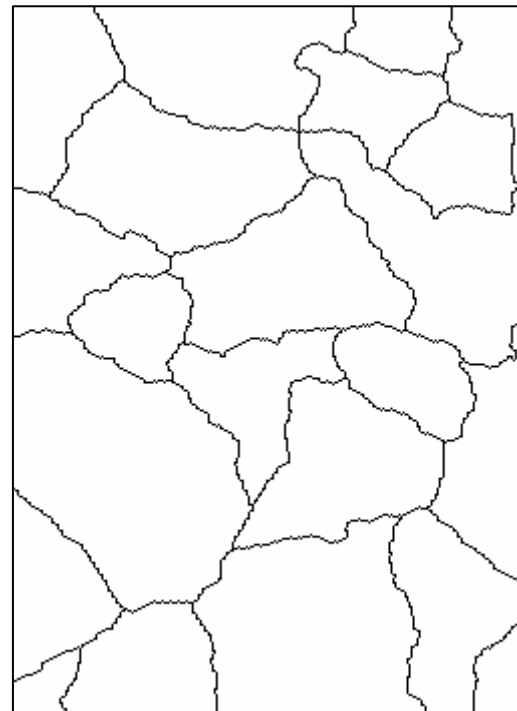
↵ croissance avec r



Tessellation initiale A

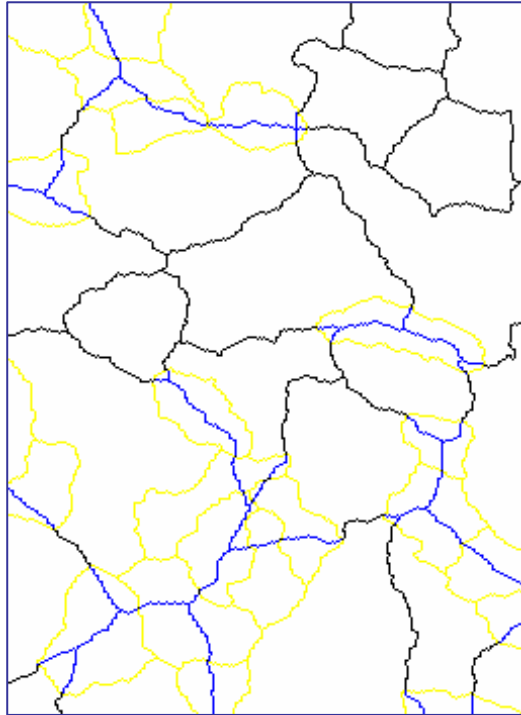


$\Psi \gamma_{10} (A)$

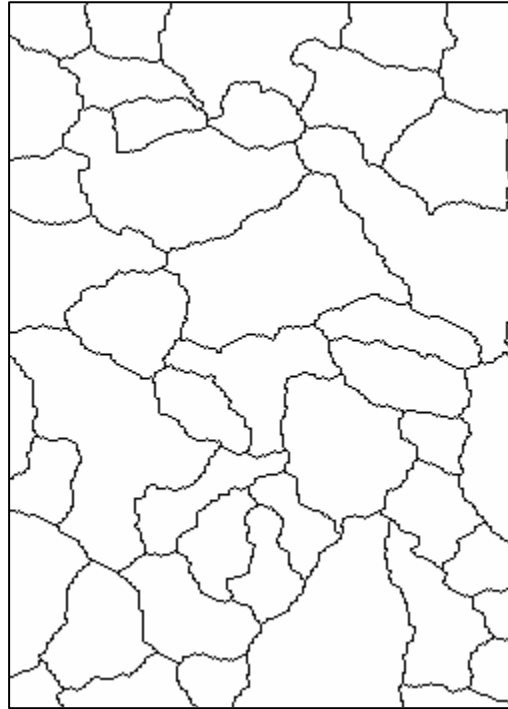


$\Psi \gamma_{15} (A)$

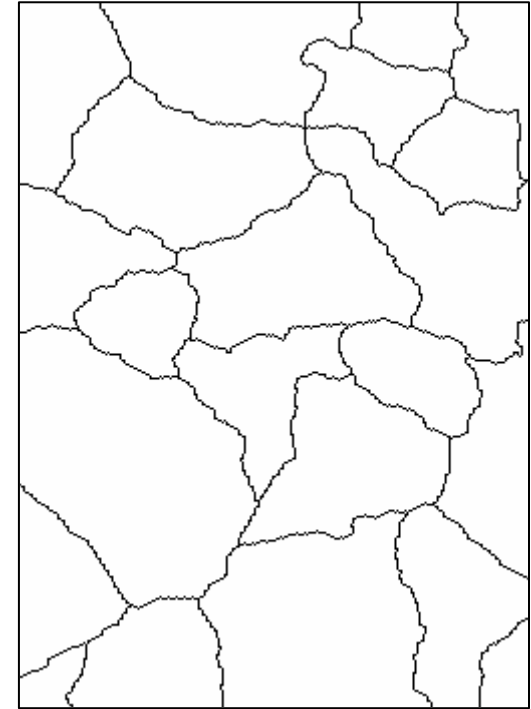
↗- croissance avec r



Comparaison



$\Psi \gamma_{10}(A)$



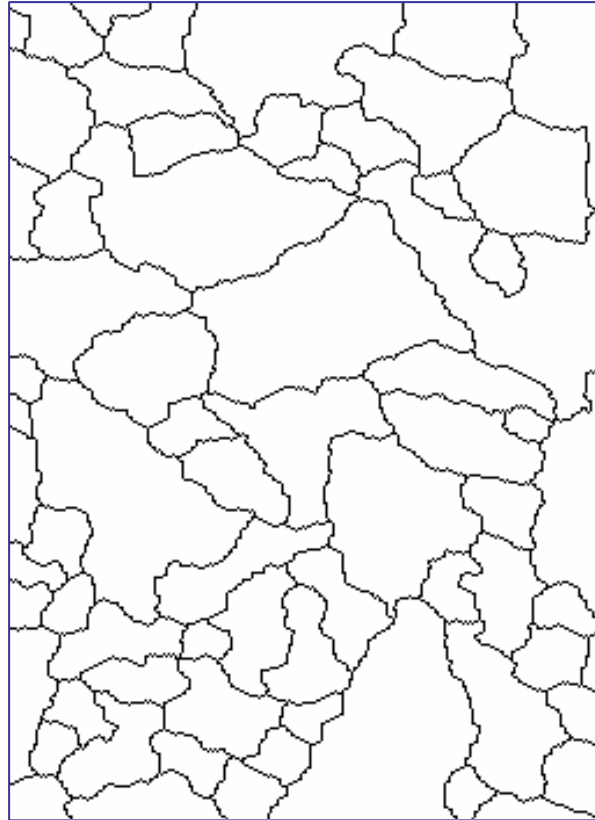
$\Psi \gamma_{15}(A)$

- Quand r croît, les $\Psi \gamma_r$ forment une chaîne, ou hiérarchie d'opérations,
- Mais pas un semi-groupe de Matheron

Semi-groupes de Matheron

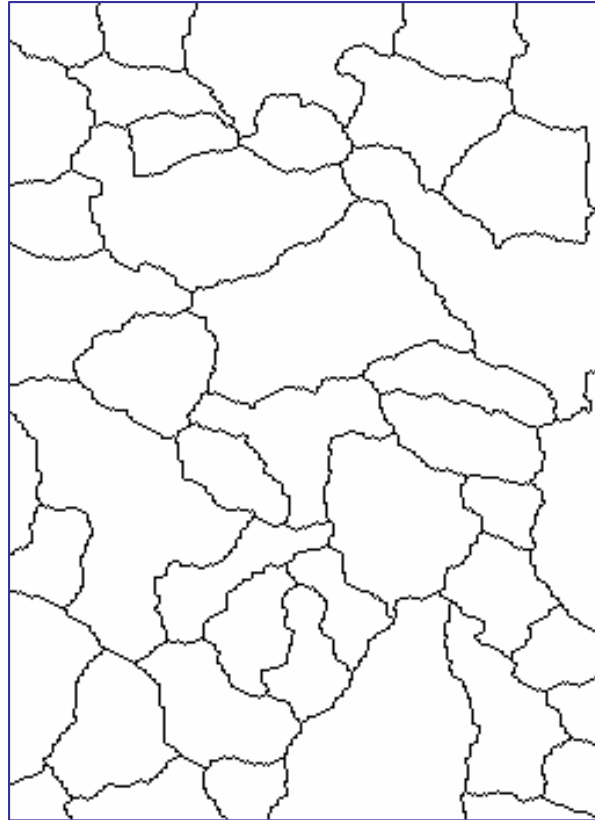
- Ils ont été introduits pour axiomatiser les granulométries, mais les opérateurs mis en jeu n'ont pas besoin d'être croissants ni anti-extensifs.
 - Pour les hiérarchies, ce sont les opérateurs les plus cohérents: la hiérarchie ne change pas, d'où qu'on parte.
 - Posons $M_n = (\psi \gamma_n) \dots (\psi \gamma_2)(\psi \gamma_1)$,
 - On a alors $M_n M_p = M_p M_n = M_{\max(n,p)}$
- (Ce sont les **séquences** d'épaississements qui vérifient le semi groupe).

Hiérarchie par semi-groupe



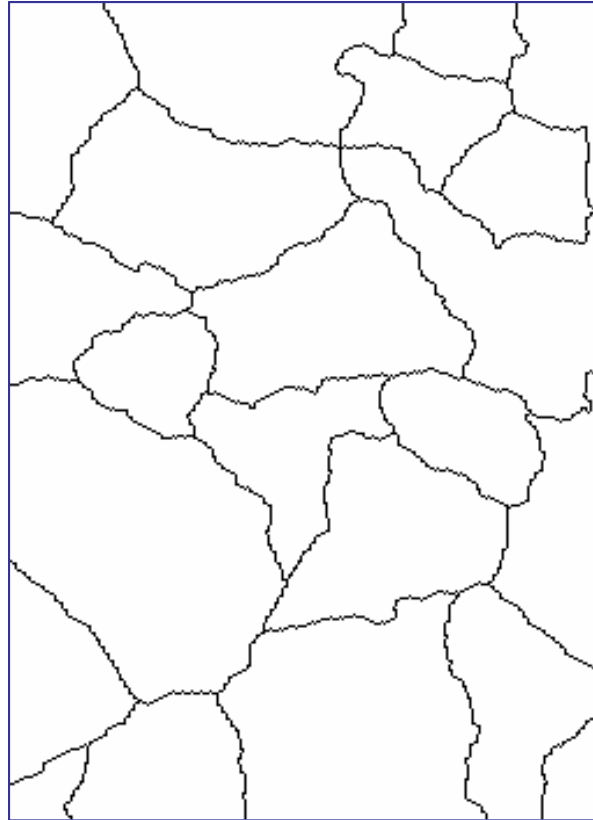
A Initial

Hiérarchie par semi-groupe



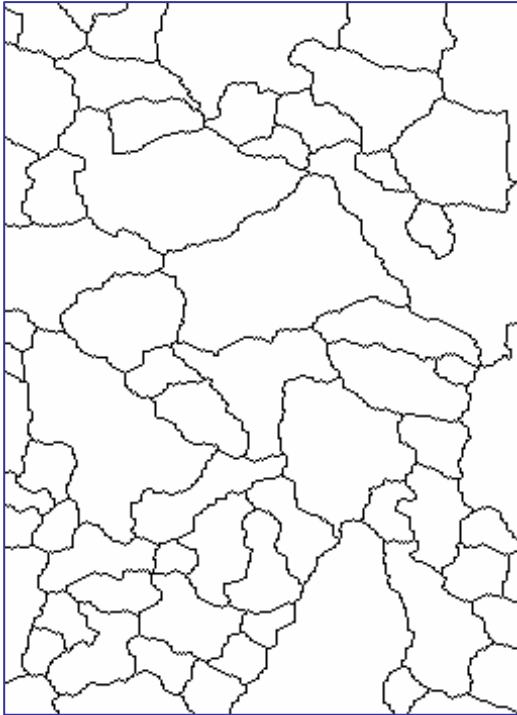
$$M_{10} = \psi \gamma_{10} (A)$$

Hiérarchie par semi-groupe

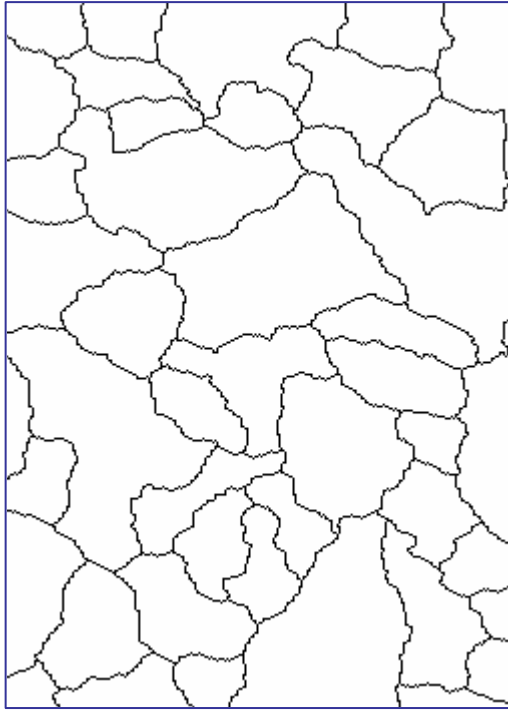


$$\begin{aligned} M_{15} &= \Psi \gamma_{15} (A) \\ &= \Psi \gamma_{15} [\Psi \gamma_{10} (A)] \end{aligned}$$

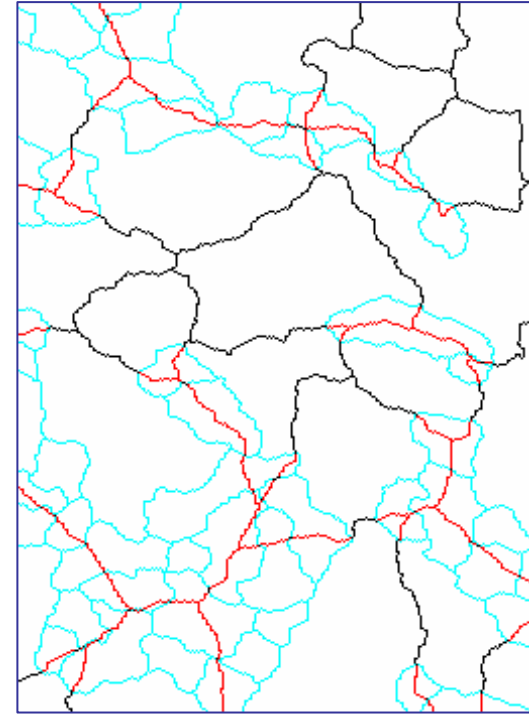
Saillance et création de frontières



A Initial



$\psi_{\gamma_{10}}(A)$

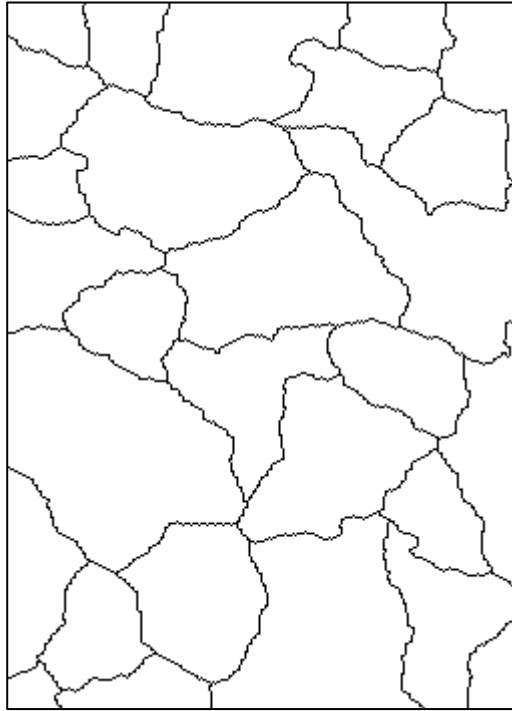


$\psi_{\gamma_{15}}[\psi_{\gamma_{10}}(A)]$

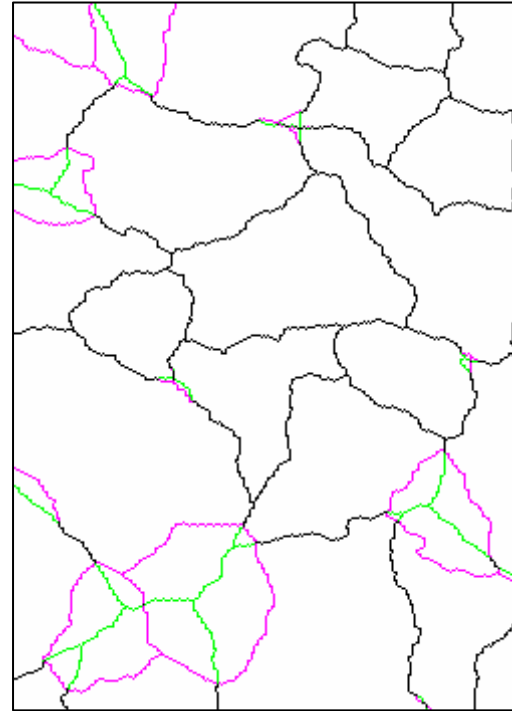
Applications

1. Amendement de partitions
2. Suppression de petites classes
3. Médiane de partitions translatées
4. Combinaison de partitions

Amendements de partitions



Tessélation Initiale

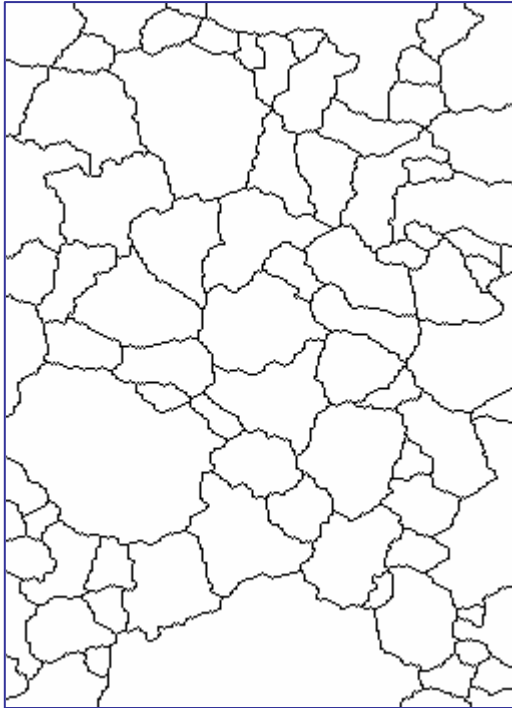


Modifications

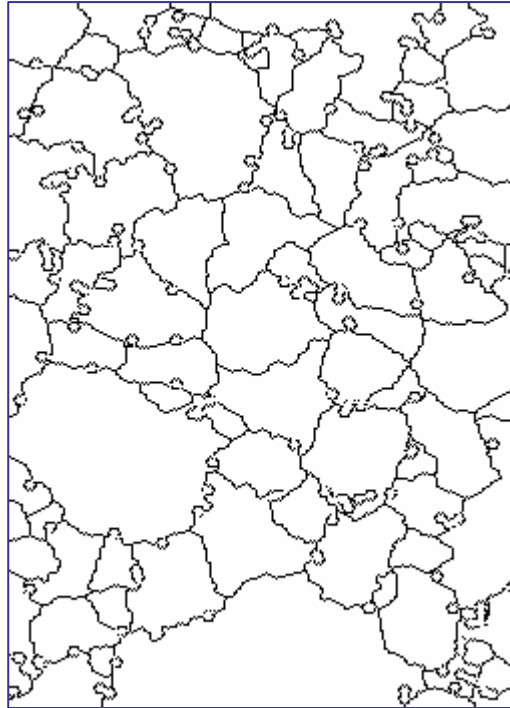
On se donne une tessélation dont on veut ôter certaines classes:

- En rose, les classes à exclure,
- En vert les frontières nouvelles.

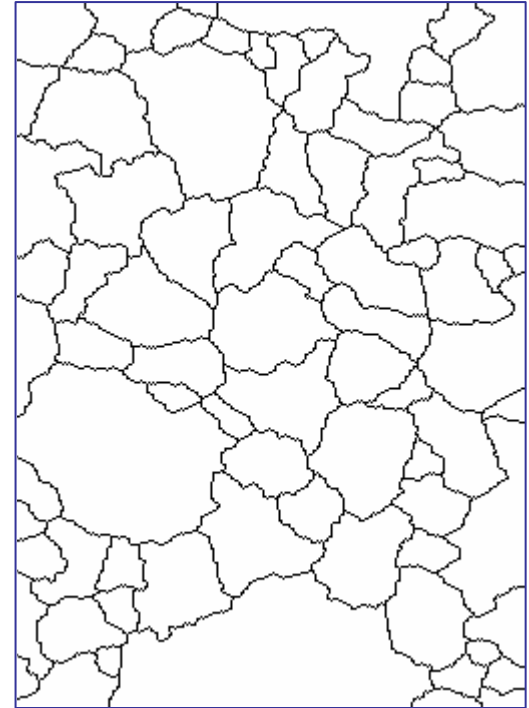
Suppression des petites classes



A

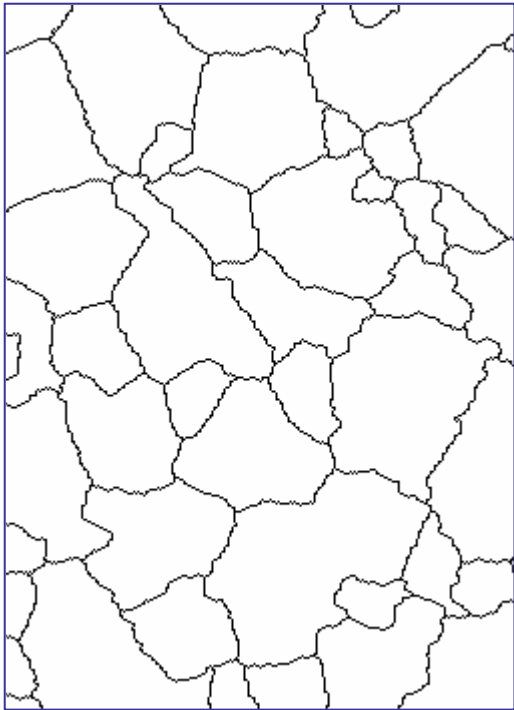


A + des petites classes

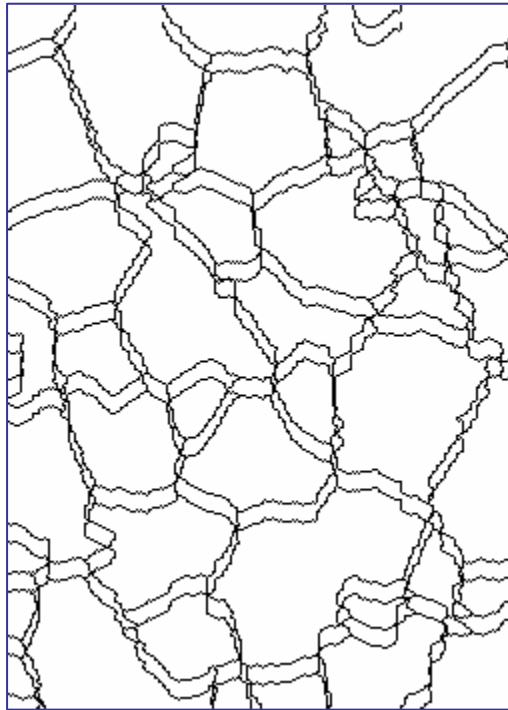


$\Psi \gamma_5 (A)$

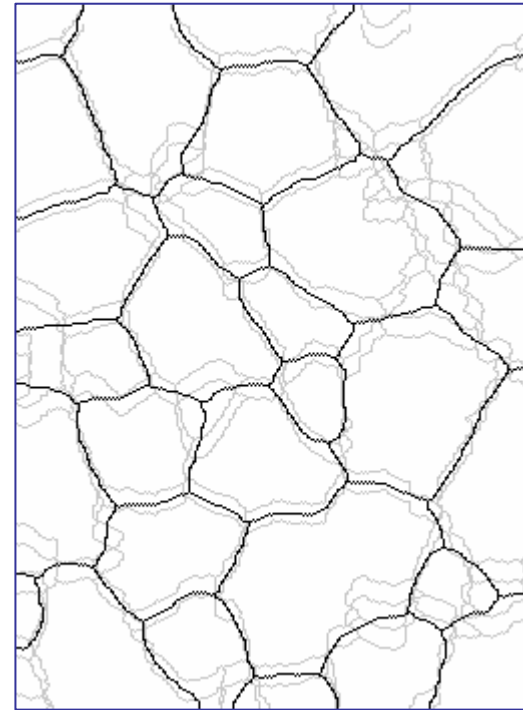
Translation



Initial A

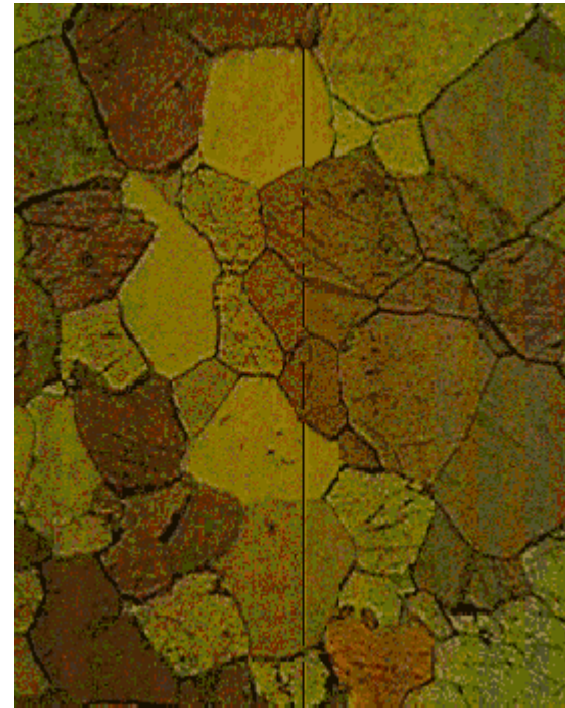


$A' = \text{Initial } A \text{ et son translaté}$



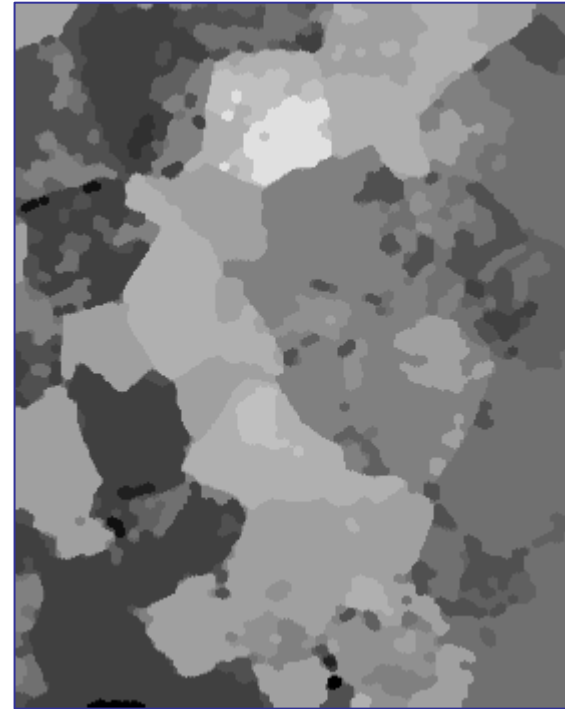
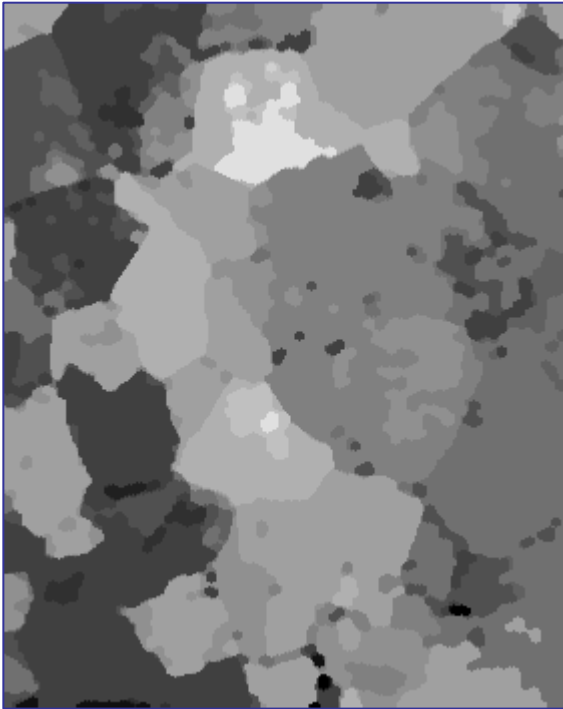
$\Psi \gamma_7 (A)$

Application à la synthèse de partitions



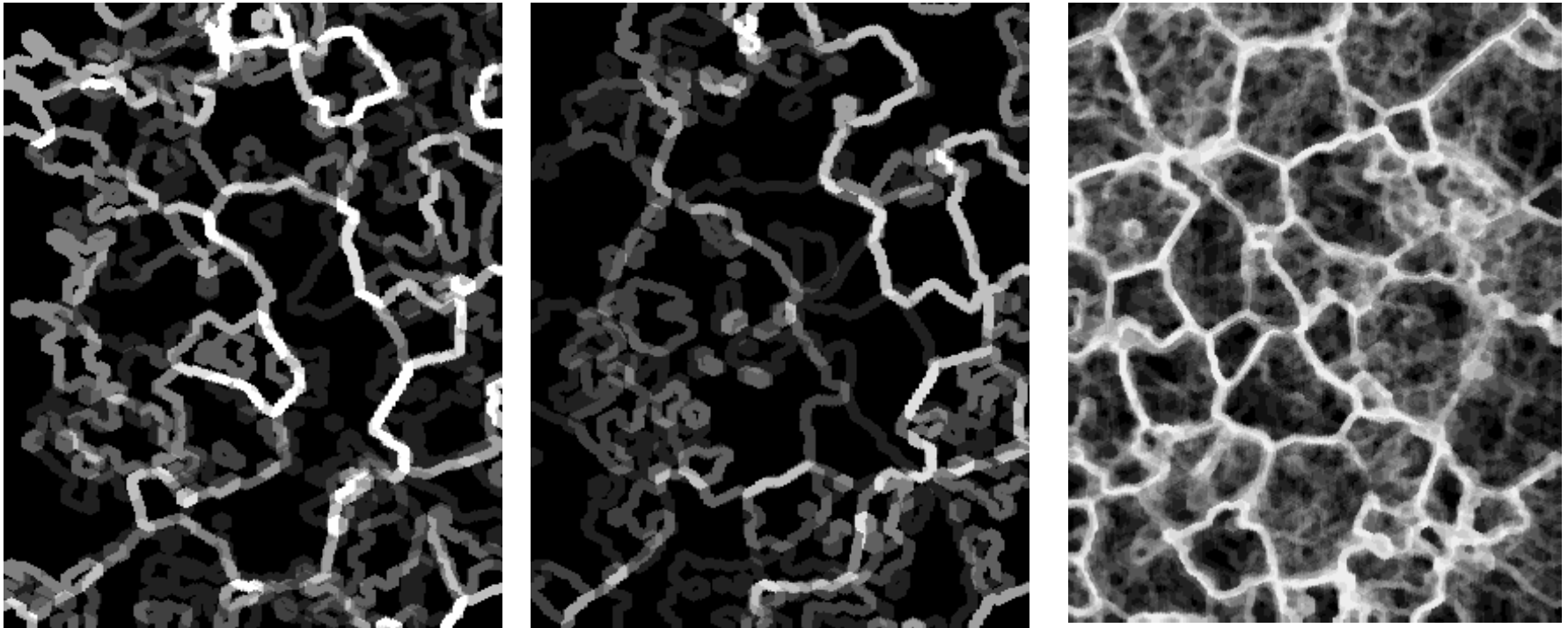
- Lame mince de dolérite, vue en lumière polarisée.
- Le prisme de polarisation tourne 15 fois de 12 degrés, produisant une séquence de 15 images

Exemple avec 2 dolérites



Segmentation par zones plates des deux images témoin

Gradients épais des dolérites



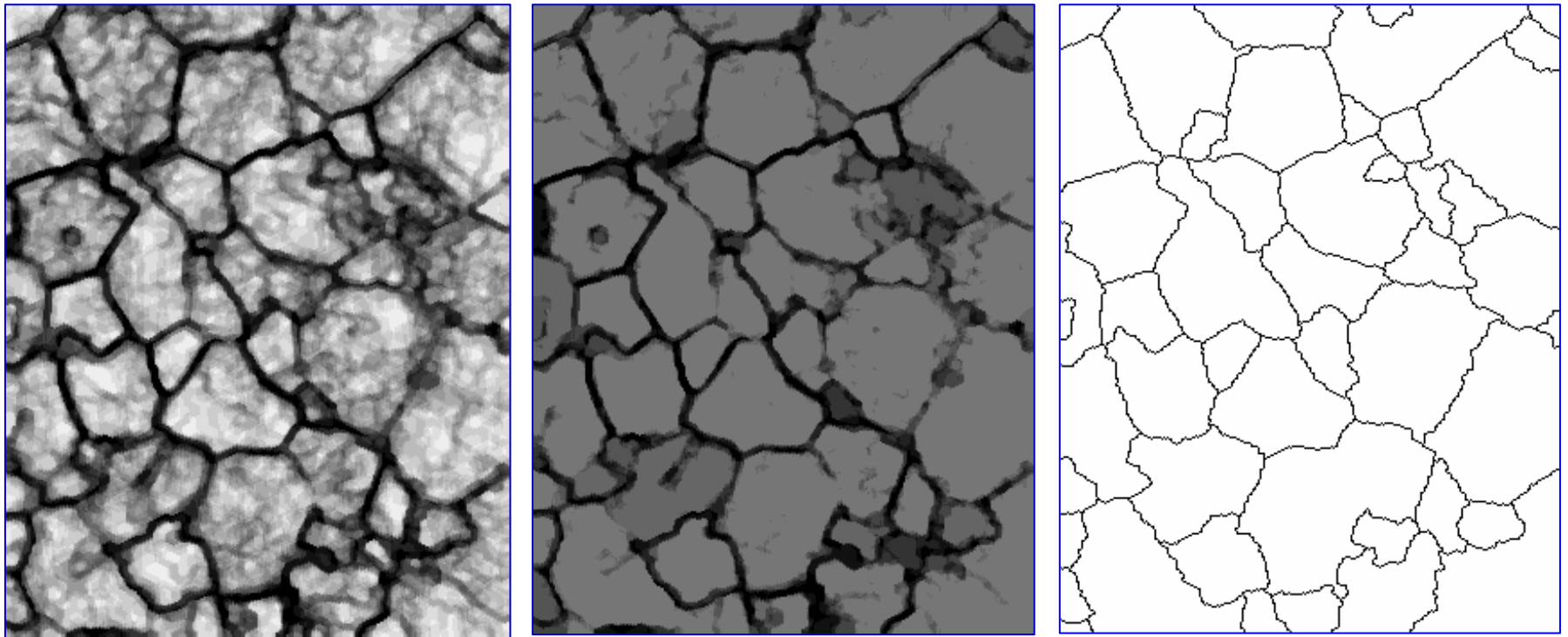
a)

b)

c)

a) et b) gradient épais de taille 3 des images témoin;
c) moyenne des gradients épais des 15 sections.

\preceq -épaississement de 15 dolérites



a)

b)

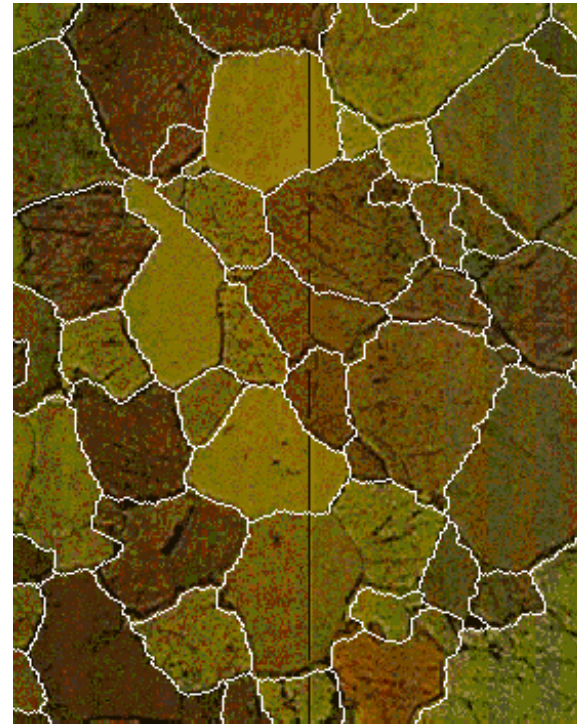
c)

a) Négatif g de la moyenne des gradients;

b) ouverture connexe $\gamma(g)$ (par dynamique, puis horizontale);

c) \preceq – épaississement $\psi \gamma(g)$ par LPE topologique.

Synthèse des 15 dolérites



\preceq - épaulement $\psi \gamma(g)$ final
superposé aux 2 des images témoin

Conclusions

Deux idées:

- la croissance hiérarchique,
- et l'ordre de la construction.

L'étude des hiérarchies de mêmes classes que H est en cours, avec L. Najman et J. Cousty;

L'usage de l'ordre de la construction pour des hiérarchies n'est pas encore passé dans les mœurs...

**En vous remerciant de votre
attention**

Questions ? ...

Références

Angulo J., Serra, J.: Modeling and segmentation of colour images in polar representations
Image and Vision Computing 25 (2007) 475-495.

Guigues L., Cocquerez J.P., Le Men H., Scale-Sets Image Analysis, *Int. Journal of Computer Vision*
68(3), 289-317, 2006.

Guigues L., *Modèles multi-échelles pour la segmentation d'images.* Thèse doctorale Université de
Cergy-Pontoise, décembre 2003.

Meyer, F. et Najman, L. Segmentation, arbres de poids minimum et hiérarchies, Ch 7 in *Morphologie
mathématique, Vol I* Najman Talbot Eds 2009

Noyel G., Angulo J., et Jeulin D., On distances, paths and connections for hyperspectral
image segmentation, *Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical
Morphology, Rio de Janeiro, Brazil, Oct. 10 --13, 2007, MCT/INPE, v. 1, p. 399--410.*

Salembier P., Garrido, L., Binary partition tree...Segmentation, and information Retrieval
IEEE Trans. Image. Processing. , 2000

Serra J. , Mlynarczuk M., Morphological merging of multidimensional data, *Proc.
STERMAT'2000, Cracow, Sept. 2000, pp.385-390*

Soille, P., Constrained connectivity for hierarchical image partitioning and simplification. *IEEE
Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 30 (2008)1132-1145