

Ce qui est, à mon sens, pure miséricorde en ce monde, c'est l'incapacité de l'esprit humain à mettre en corrélation tout ce qu'il renferme. Nous vivons sur une île de placide ignorance, au sein des noirs océans de l'infini, et nous n'avons pas été destiné à de longs voyages. Les sciences, dont chacune tend dans une direction particulière, ne nous ont pas fait trop de mal jusqu'à présent; mais un jour viendra où la synthèse de connaissances dissociées nous ouvrira des perspectives terrifiantes sur la réalité et la place que nous y occupons...

H. P. LOVECRAFT.

L'appel de Cthulhu, ©Denoël 1991, Weird Tales 1928.

AVANT-PROPOS

MES PREMIERS pas en recherche ont été guidés par Bernard LUMEAU, Professeur des Universités et chercheur au Laboratoire des Signaux et Systèmes. D'abord au cours d'un stage de Maîtrise, puis d'un stage de DEA prolongé, il m'a initié à ses thèmes de recherche, fait profiter de son expérience et de ses motivations. Nos sujets d'intérêt étaient alors l'analyse spectrale et le traitement d'antenne, avec comme application privilégiée la cartographie cérébrale. Bernard LUMEAU a été victime d'un grave accident cérébral qui a remis en cause la thèse que je m'apprêtais à débiter sous sa direction. Guy DEMOMENT m'a alors proposé de me confier un sujet le moins éloigné possible des préoccupations de Bernard LUMEAU, et de m'intégrer à l'action « synthèse d'ouverture en astronomie » proposée par André LANNES, du Laboratoire d'astrophysique de Toulouse dans le cadre du Groupe de recherche en traitement du signal et de l'image.

Il s'agit de dresser une carte de la distribution d'intensité émise dans une zone étendue à partir de signaux recueillis par un réseau de télescopes. L'utilisation d'un réseau de télescope permet de synthétiser une ouverture de dimension très supérieure à l'ouverture d'un télescope élémentaire, et de dépasser ainsi les limites de résolution d'un télescope isolé. Le problème de synthèse d'ouverture présente deux facettes : d'une part un problème inverse sévèrement mal posé — le problème qui consiste à remonter des signaux recueillis à la distribution d'intensité — et d'autre part un problème de calibration de phase rendu nécessaire par les distorsions de phase introduites par les turbulences atmosphériques.

L'analogie entre les techniques de clôture de phase utilisées en astronomie interférométrique et les techniques bispectrales développées en traitement du signal m'offrait la possibilité d'évoluer de l'analyse spectrale à l'analyse bispectrale. Au sein du groupe problèmes inverses, GPI, animé par Guy DEMOMENT, un travail de thèse avait déjà été entrepris par Guy LE BESNERAIS dans le cadre du projet synthèse d'ouverture. Il s'agissait de la résolution du problème inverse à l'aide d'une méthode proposée en 1985 par Jorge NAVAZA en cristallographie, et étudiée au département de statistiques de l'université Paris-Sud.

J'ai donc débuté mon travail de thèse par l'analyse du problème de synthèse d'ouverture, avec une vision de type traitement d'antenne issue de ma formation initiale, puis par l'étude des relations entre les techniques de clôture de phase de l'astronomie et les méthodes polyspectrales. J'ai abordé l'étude des méthodes polyspectrales avec une orientation un peu différente des préoccupations de la communauté du traitement du signal. Alors que la majorité des recherches étaient fondées sur l'utilisation de propriétés asymptotiques fines, je me suis plutôt intéressé, dans la lignée des travaux débutés avec Bernard LUMEAU, aux questions relatives à l'estimation des polyspectres et à la robustesse des méthodes proposées. Ceci m'a conduit à proposer une méthode d'estimation polyspectrale, et à interpréter d'autres résultats en terme de méthode d'estimation. J'ai également mis en évidence une structure matricielle particulière qui m'a conduit à développer un algorithme de factorisation bispectrale. Le souci de robustesse des méthodes m'a conduit au sentiment qu'une étude approfondie de cette question déboucherait difficilement à court terme sur des résultats intéressants.

Parallèlement à ce travail, j'avais commencé à m'intéresser aux méthodes utilisées et développées par Guy LE BESNERAIS. J'ai alors entrepris de poursuivre et prolonger son travail au delà de sa soutenance de thèse. Nombre des résultats présentés ici sont le fruit de discussions et de travaux communs. Nous avons cheminé vers une vision plus nette et plus claire de la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne, accompagnée d'un effort de diffusion et d'application à des problèmes inverses généraux. Cette étude nous a conduit à utiliser cette méthode comme cadre à une structure générale de résolution de problèmes inverses linéaires, fondée sur l'utilisation de *critères de nature entropique*. La méthode a été enrichie par une procédure de prise en compte des caractéristiques statistiques du bruit d'observation, par une analyse de la sensibilité de la solution obtenue, et par des liens avec certains résultats mathématiques. La structure proposée offre un cadre constructif, et permet une présentation unifiée et explicative de nombre des méthodes utilisées pour la résolution de problèmes inverses.

Le plan du manuscrit reflète le déroulement historique de cette thèse et les différents thèmes auxquels j'ai été amené à m'intéresser, avec comme fil directeur le problème initial de synthèse d'ouverture. Un premier chapitre permet d'introduire dans un premier temps les notions essentielles sur les problèmes inverses. Le second chapitre propose ensuite une analyse générale du problème de la synthèse d'ouverture en astronomie, en tant que problème inverse, et ses liens avec les techniques de traitement d'antenne sont clarifiés. Le problème spécifique de synthèse d'ouverture est poursuivi dans le chapitre suivant (chapitre III), où sont abordées les problèmes de clôture de phase et d'analyse bispectrale. Les deux chapitres suivants détaillent l'intervention de l'entropie dans la résolution de problèmes inverses, et la construction de critères entropique. Le chapitre IV constitue une présentation progressive et une argumentation de l'utilisation de l'entropie et de l'information de KULLBACK-LEIBLER, à la lumière de résultats de théorie de l'information, d'exemples physiques, et de premiers exemples de méthodes de résolution déjà employées en reconstruction d'image et en analyse spectrale. La méthode du maximum d'entropie sur la moyenne, ses extensions et les critères de nature entropiques pour la résolution de problèmes inverses sont ensuite présentés au chapitre V. J'espère que ce travail m'a permis d'aller un peu au-delà de ce que nous concède H. P. LOVECRAFT, et que les circonstances me permettront, malgré tout, de persévérer dans cette voie.

L'exploitation des idées entropiques que nous présentons n'est pas achevée avec cette soutenance de thèse et ce manuscrit. L'extension de certains de ces résultats à des problèmes inverses non linéaires est possible, notamment en nous appuyant sur des résultats de grandes déviations — mais au prix vraisemblablement de la perte de propriétés agréables de nos critères. L'étude et l'exploitation de liens entre nos critères et une géométrie de l'inférence a débuté, voir par exemple (KASS 1989). Nous avons également en projet d'étudier la substitution de l'entropie « informationnelle » que nous utilisons par l'entropie de VON NEUMANN utilisée en mécanique quantique ; l'état du système est alors défini par un opérateur densité qui pourrait permettre de prendre en compte des corrélations. Ce travail nous demandera d'acquérir de nouveaux outils, en particulier en algèbre tensorielle. L'application des « entropies de niveau 1 » comme mesure d'information sur des problèmes de communication, de codage ou de quantification est également envisageable. Enfin, il est maintenant particulièrement important de mettre en œuvre nos algorithmes et méthodes sur des problèmes réels afin de quantifier les résultats et la sensibilité de la méthode. Concernant cet aspect pratique, une solution permettant de déterminer automatiquement une valeur ou une plage de valeurs admissibles pour le paramètre de régularisation est indispensable et devra être apportée. Ce travail débute sur des données de tomographie en collaboration avec Christian HEINRICH qui commence à son tour une thèse sur le thème de l'entropie dans le Groupe Problèmes Inverses.

Le travail présenté ici a été effectué au sein du Groupe Problèmes Inverses du Laboratoire des signaux et systèmes. Il convient de remercier tout d'abord l'ensemble des personnes qui font la vie et nourrissent l'activité scientifique du laboratoire. Parmi ceux ci, je voudrais mentionner l'équipe informatique, dont la compétence et la diligence sont remarquables. Sur un autre plan, je veux remercier tout particulièrement Pierre BRÉMAUD, dont la faculté à toujours fournir *la* référence juste, issue de sa bibliothèque personnelle, est étonnante, et pour son humour grinçant.

Les membres de l'équipe ont tous contribué à l'ambiance dans laquelle s'est déroulé mon travail. Ils ont aussi souvent contribué à son contenu scientifique, au travers de toutes les conversations menées dans le couloir Est-Ouest, ou autour du café rituel de 12h15, de 16h10, pris au tripot du Laboratoire. Que trouvent donc ici mes remerciements écrits Ali, Reza, Asghar et Mohammed DJAFARI, Hervé CARFANTAN, Jérôme IDIER, Stéphane BRETTE, Stéphane GAUTIER, Mila NIKOLOVA, Thierry MARTIN, Maï NGUYEN, Christian HEINRICH et Frédéric CHAMPAGNAT. Un remerciement spécial pour J.-F. GIOVANNELLI pour les heures de discussion, le tri des dossiers de candidature, et les théories fumeuses montées ensemble.

Guy LE BESNERAIS m'a précédé dans l'analyse et l'utilisation de la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne. Une large part du travail et des interprétations présentées dans ce mémoire est le fruit de nos discussions, de la confrontation de nos idées et de calculs communs. En dépit de ses nouvelles fonctions à l'ONERA, il a su prendre le temps de relire très attentivement le manuscrit. Merci donc pour tout cela.

Guy DEMOMENT coordonne l'activité du Groupe Problèmes Inverses. La thématique de recherche du groupe, l'ambiance particulière qui y règne doivent beaucoup à sa personnalité. Le fait qu'il m'ait « recueilli » après l'accident de Bernard LUMEAU et dirigé ce travail sont un premier motif de remerciement. Son esprit ouvert, la disponibilité dont il a fait preuve, malgré ses nombreuses activités constituent un second motif. Enfin, je suis très heureux qu'il préside ce jury. Merci, Grand Chef.

André LANNES est à l'origine de ce travail, et en a suivi les différentes étapes. Il a également accepté d'analyser ce manuscrit et de rédiger un rapport. Je sais qu'il a fait une lecture très attentive du mémoire, et je veux qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

Joël LE ROUX, Professeur à l'université de Nice, a aimablement accepté d'être rapporteur de cette thèse. Je le remercie vivement d'avoir consacré une partie de son temps à la critique de ce travail.

Cette thèse n'aurait pas été sans le travail important réalisé par F. GAMBOA, É. GASSIAT, et D. DACUNHA-CASTELLE. Je veux les remercier ici pour la diffusion de leurs travaux, et en particulier des articles en cours de publication. Je suis très heureux qu'Élisabeth GASSIAT ait accepté de faire partie de ce jury.

Michèle BASSEVILLE a également très gentiment accepté de faire partie de ce jury. Je tiens à la remercier tout spécialement pour sa lecture très scrupuleuse du mémoire et les nombreuses remarques, références bibliographiques dont elle m'a fait part avant la soutenance.

Je tiens aussi à citer ici des personnes qui auraient pu appartenir à ce jury. Je regrette que W. J. FITZGERALD n'ait pu se libérer, en raison d'un emploi du temps très chargé, pour participer à ce jury. Sa présence aurait certainement apporté un éclairage intéressant. Je regrette également que J.-F. CARDOSO, dont les compétences en traitement d'antenne, en statistiques d'ordre supérieur sont reconnues, et dont je sais l'intérêt grandissant pour « l'entropie », n'ait pu être sur le continent européen pour se joindre au jury.

CHAPITRE I

INTRODUCTION AUX PROBLÈMES INVERSES

L'OBJET de ce bref chapitre est de présenter la notion de problème inverse, et plus particulièrement celle de problème inverse mal-posé, qui est au cœur de ce travail. Nous n'évoquerons ici que les caractéristiques d'un problème inverse et les difficultés qui lui confèrent un caractère mal-posé. Les méthodes de résolution « déterministes » les plus classiques, et le concept de régularisation seront également abordés.

Les notions introduites ici seront utilisées et illustrées au chapitre II par le biais d'un exemple concret : le problème de synthèse d'ouverture en imagerie interférométrique. Les méthodes de résolution qui s'appuient sur une modélisation probabiliste seront quant-à-elles présentées au chapitre IV, où l'on abordera l'approche bayésienne de la régularisation, et où nous rencontrerons pour la première fois le concept d'entropie.

1 Généralités

En physique, il est rare qu'on puisse accéder directement à la grandeur d'intérêt. En fait, les mesures sont souvent recueillies par l'intermédiaire d'un instrument (au sens large de « dispositif expérimental »), qui fournit une « image » distordue par la réponse du système de mesure de la grandeur initiale. Par ailleurs, ces mesures sont souvent corrompues par un bruit d'observation, modélisé par un terme additif $b(\mathbf{r})$. Si on note $y(\mathbf{r})$ la mesure et $x(\mathbf{r})$ la grandeur d'entrée, ces deux quantités sont reliées, dans le cas d'une distorsion linéaire, par l'équation intégrale

$$y(\mathbf{r}) = \int a(\mathbf{r}, \mathbf{r}')x(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' + b(\mathbf{r}), \quad (\text{I.1})$$

où $a(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est la réponse impulsionnelle, qui ne dépend que de la géométrie du problème et est indépendante de l'entrée $x(\mathbf{r})$ en raison de l'hypothèse de linéarité, et $b(\mathbf{r})$ représente le bruit d'observation.

Si le système est en outre invariant, ou stationnaire, ceci se réduit à l'équation de convolution

$$y(\mathbf{r}) = \int a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')x(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' + b(\mathbf{r}).$$

Le problème qui consiste à résoudre ces équations intégrales pour retrouver, ou restaurer l'entrée à partir de sa sortie est un problème inverse, qui se rencontre dans de nombreux domaines de la physique appliquée où l'on cherche à étudier une quantité indirectement accessible, comme, sans être exhaustif, les mesures tomographiques, sismiques, optiques, radio-astronomiques, ... Les problèmes inverses ne se limitent pas au problème de déconvolution ; dans l'application présentée

au chapitre II, nous montrerons que la relation entrée-sortie mise en jeu est une transformation de FOURIER, c'est-à-dire une relation de la forme (I.1). La résolution effective d'un problème inverse est nécessairement numérique. Il est donc nécessaire de procéder à une étape de discrétisation du problème. Cette étape de discrétisation est importante — nous la retrouverons dans notre exemple de problème physique au Chapitre II — et nous nous permettons d'en dire ici quelques mots. La discrétisation de (I.1) se fait en décomposant $x(\mathbf{r})$ sur un nombre fini N de fonctions de quadrature $\psi_j(\mathbf{r})$:

$$x(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N x_j \psi_j(\mathbf{r}) + e(\mathbf{r}),$$

où e est un terme d'erreur de quadrature. Si les observations sont acquises en nombre fini, par exemple lorsque le dispositif expérimental procède à un échantillonnage, $\mathbf{y}(\mathbf{r}_1), \dots, \mathbf{y}(\mathbf{r}_K)$ on a

$$y_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j + e_i, \text{ pour } i = 1 \dots K$$

avec $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(\mathbf{r}_i)$ et $a_{ij} = \int a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$. On obtient alors la forme linéaire matricielle

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

où \mathbf{y} est le vecteur d'observations de dimension K , \mathbf{x} le vecteur de paramètres inconnus, de dimension N , \mathbf{A} la matrice de transfert du système d'éléments a_{ij} et \mathbf{b} un vecteur d'erreurs, qui mêle les erreurs de discrétisation et un bruit d'observation. C'est typiquement ce type de discrétisation que nous rencontrerons dans l'exemple de la synthèse d'ouverture. Une discrétisation fréquente consiste à utiliser comme fonctions de quadrature les indicatrices des pixels découpés par une grille cartésienne sur le support de $x(\mathbf{r})$. Lorsque $x(\mathbf{r})$ est à bande limitée, les fonctions de quadrature correspondantes pourront être des sinus cardinaux.

2 Caractère mal-posé d'un problème

La résolution d'un problème inverse n'est pas toujours, et même rarement, simple, parce que la majorité de ces problèmes sont *mal posés*, au sens de HADAMARD, c'est-à-dire ne vérifient pas simultanément les trois conditions d'existence, d'unicité et de stabilité de la solution. On peut réécrire l'équation intégrale (I.1) sous la forme

$$y = Ax,$$

où x et y appartiennent respectivement à deux espaces fonctionnels normés X et Y , et A est un opérateur linéaire, en général compact et borné, de X dans Y . Les conditions de HADAMARD s'écrivent alors

- **existence** : pour tout $y \in Y$, il existe x tel que $Ax = y \iff y \in \text{Im}(A)$,
- **unicité** : le noyau de l'opérateur est vide $\text{Ker}(A) = \{0\}$,
- **stabilité** : la solution dépend continûment des données y , *i.e.* si les données sont faiblement perturbées, $y + \delta y$ au lieu de y , le problème reste soluble et $\delta x \rightarrow 0$ si $\delta y \rightarrow 0$. Cette dernière condition entraîne la fermeture de l'image de A : $\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)}$.

Dans le cas d'un opérateur borné, l'image n'est pas nécessairement fermée. Si l'opérateur est compact, cette image n'est en fait jamais fermée, sauf si l'espace Y est de dimension finie. Ainsi, dans la plupart des problèmes physiques, la non satisfaction de la condition de stabilité, en admettant que les conditions d'existence et d'unicité sont vérifiées, rend le problème mal-posé.

Cependant, lorsqu'on travaille dans des espaces de dimension finie, comme par exemple après la discrétisation du problème, l'existence et l'unicité étant assurées, le problème devient bien posé au sens de HADAMARD, car il se réduit simplement à l'inversion d'un système matriciel. En fait, les difficultés ont seulement changé d'aspect et le caractère mal-posé s'est mué en un caractère mal-conditionné : le problème discrétisé est numériquement instable.

3 Inverse généralisée

3.1 Définition

Un moyen de résoudre un problème inverse consiste à modifier la notion de solution, pour essayer d'obtenir une solution qui vérifie les trois conditions précédentes. Une possibilité est le concept d'inverse généralisée qui consiste à rechercher une solution approchée minimisant la norme quadratique du résidu $y - Ax$ et de *norme minimale*. La solution inverse généralisée correspond ainsi à la solution de norme minimale de l'équation normale

$$A^*y = A^*Ax,$$

où A^* est l'opérateur adjoint de A . On note A^+ et on appelle inverse généralisé l'opérateur qui appliqué à y permet d'obtenir cette solution. Dans le cadre de la dimension finie, trois cas de figure peuvent se présenter : (i) A est inversible et $A^+ = A^{-1}$, (ii) il y a une infinité de solutions et on choisit parmi ces solutions la solution de norme minimale A^+y , et enfin (iii) il n'y a pas de solution ($y \notin \text{Im}(A)$), et A^+y est la solution des moindres carrés de norme minimale (c'est la solution usuelle des moindres carrés si A^*A est régulière). Ceci correspond aussi à projeter y sur l'image de A , puis à rechercher la solution de norme minimale. On montre de plus que si le bruit d'observation b est blanc centré stationnaire, alors la solution inverse généralisée est non biaisée et à variance minimale.

3.2 Propriétés et limitations

On montre que la condition d'existence d'une solution inverse généralisée pour tout $y \in Y$ est encore $\text{Im}(A)$ fermée. Si cette condition est vérifiée, A^+ est compact et la solution est stable. Si A est compact, l'existence de la solution n'est pas plus assurée que sa stabilité.

Dans le cas de la dimension finie, l'inverse généralisée existe toujours, mais le problème de stabilité numérique de la solution reste entier : si $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ désignent respectivement les vecteurs propres de AA^* et de A^*A , et si $\{\lambda_i^2\}$ sont les valeurs propres de A^*A , on peut faire le calcul de sensibilité suivant

$$x + \delta x = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} u_i^t y \left(1 + \frac{u_i^t \delta y}{u_i^t y} \right) v_i,$$

et les erreurs δx et δy sont reliées explicitement par

$$\delta x = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} u_i^t \delta y v_i.$$

ces relations montrent que l'erreur relative commise sur chacune des composantes du développement est inversement proportionnelle au rapport signal-à-bruit $\mathbf{u}_i^t \delta \mathbf{y} / \mathbf{u}_i^t \mathbf{y}$. Ce rapport est d'autant plus important que les composantes spectrales¹ du « bruit » $\mathbf{u}_i^t \delta \mathbf{y}$ deviennent élevées devant celles du « signal » $\mathbf{u}_i^t \mathbf{y}$. D'autre part, le terme de perturbation est amplifié par l'inverse des valeurs singulières λ_i . Celles-ci décroissent avec i (effet passe bas), et par conséquent la contribution au terme d'erreur $\delta \mathbf{x}$ est d'autant plus importante que λ_i est faible devant λ_1 . L'erreur relative sur les observations est amplifiée par le rapport des valeurs singulières extrêmes, le *nombre de condition*, ou conditionnement, et peut devenir considérable. Il est facile de vérifier qu'on a en effet la relation suivante sur les erreurs relatives :

$$\frac{|\delta \mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^2} \leq \frac{\lambda_{\max}^2 |\delta \mathbf{y}|^2}{\lambda_{\min}^2 |\mathbf{y}|^2}.$$

Le conditionnement d'une matrice rend ainsi compte de la difficulté de l'inversion. Il apparaît donc que si l'existence et l'unicité de la solution inverse généralisée sont acquises, la stabilité de la solution n'est pas garantie. Pour stabiliser la solution en conservant l'idée de rechercher une solution approchée, puisque le problème n'a pas de solution au sens usuel, on introduit une information supplémentaire. Cette information est utilisée pour bâtir un régulariseur.

4 Régularisation d'un problème mal-posé

Le concept de régularisation permet d'interpréter dans un cadre unique la majorité des méthodes de résolution de problèmes inverses qui abandonnent, de fait, le désir d'obtenir la solution uniquement à partir de données imparfaites, et complètent l'énoncé du problème par une information supplémentaire. Il n'est pas question ici de développer une présentation exhaustive du sujet. Nous nous bornerons à indiquer le concept général, en soulignant les propriétés minimales du régulariseur et de la solution régularisée² puis nous restreindrons la présentation aux méthodes de minimisation d'un critère mixte.

Un régulariseur du problème $y = Ax$ est la famille d'opérateurs R_α , continue de Y dans X et indexée par le paramètre α , telle que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} |R_\alpha Ax - y| = 0.$$

Pour des données bruitées y_ε , avec $|y - y_\varepsilon| \leq \varepsilon$, on peut ainsi calculer la solution approchée, ou solution régularisée

$$x_\varepsilon = R_\alpha y_\varepsilon.$$

Désignons par x la solution exacte obtenue sans bruit : $x = A^{-1}y$. Le régulariseur doit vérifier

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |x_\varepsilon - x| = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |Ax_\varepsilon - y| = 0, \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

on a dans ces conditions

$$|x_\varepsilon - x| \leq |R_\alpha y - x| + |R_\alpha (y_\varepsilon - y)|.$$

1. La décomposition propre d'une forme quadratique $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ est appelée décomposition spectrale ; dans le cadre de la déconvolution cette matrice est une matrice de « corrélation » et la décomposition est asymptotiquement une décomposition sur une base d'exponentielles complexes.

2. Le paragraphe correspondant doit beaucoup à l'excellent (DEMOMENT 1987).

Le premier terme représente l'erreur de régularisation (biais) qui tend vers zéro avec α et le second terme représente l'amplification du bruit (variance) qui tend vers zéro, à α fixé, avec ε . Notons cependant que l'erreur due au bruit tend vers l'infini si α tend vers zéro. Le choix du régulariseur consiste ainsi à rechercher, à ε donné, le minimum de l'erreur $|x_\varepsilon - x|$, c'est-à-dire à effectuer un compromis entre l'erreur de régularisation et le bruit résiduel. Le concept de régularisation peut recouvrir de nombreuses méthodes comme les décompositions tronquées ou apodisées en valeur singulières, les algorithmes itératifs (par exemple de calcul d'une solution inverse généralisée) régularisés par arrêt des itérations avant convergence, les méthodes de projection...

5 Minimisation d'un critère mixte

Le compromis décrit précédemment apparaît également clairement dans les méthodes de régularisation fondées sur la minimisation d'un critère mixte. Ces méthodes ont été introduites avec les travaux de PHILLIPS, TWOMEY et TIKHONOV dans les années 60. Elles consistent à remplacer le problème initial mal-posé ou mal-conditionné, selon qu'on travaille en dimension infinie ou non, par la minimisation du critère

$$J_\alpha(x) = \mathcal{G}(y - Ax) + \alpha\mathcal{F}(x), \quad (\text{I.3})$$

où \mathcal{G} est une norme (définie sur Y) utilisée pour mesurer l'erreur résiduelle $y - Ax$, et \mathcal{F} est une autre norme (définie sur X) qui introduit et contrôle *a priori* sur la solution. Le coefficient α est le coefficient de régularisation. On écrit aussi souvent ce critère comme la somme pondérée des distances aux deux solutions \hat{x}_0 et \hat{x}_∞ correspondant aux valeurs extrêmes du paramètre de régularisation :

$$J_\alpha(x) = \mathcal{G}(x, \hat{x}_0) + \alpha\mathcal{F}(x, \hat{x}_\infty).$$

On choisit souvent une norme quadratique pour mesurer l'erreur résiduelle. Si \mathcal{F} est également quadratique, on obtient ainsi les moindres carrés régularisés. Un exemple classique de régularisation est la régularisation avec condition de douceur sur la solution. La douceur sur la solution est introduite en utilisant pour $\mathcal{F}(x)$ une combinaison des dérivées de la solution potentielle. En continu, on a par exemple

$$\mathcal{F}(x) = \sum_i \int p_i(t) [x^{(i)}(t)]^2 dt,$$

où les fonctions $p_i(t)$ sont des fonctions continues et positives, jouant le rôle d'une pondération de la suite des dérivées $x^{(i)}(t)$ de $x(t)$. En dimension finie, on peut prendre

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_i p_i(\mathbf{C}_i \mathbf{x})^\dagger (\mathbf{C}_i \mathbf{x}),$$

où les matrices \mathbf{C}_i sont les matrices de différences premières, secondes, etc.

Les fonctionnelles \mathcal{F} et \mathcal{G} peuvent traduire bien d'autres *a priori* que ceux mentionnés dans le paragraphe précédent. Un des objectifs de ce travail est ainsi de présenter un cadre général de construction de critères tels que (I.3) incorporant des *a priori* plus généraux, comme la positivité, un support borné, un spectre limité, ...

CHAPITRE II

SYNTHÈSE D'OUVERTURE

DANS CE CHAPITRE, nous nous attacherons maintenant à décrire plus précisément l'exemple du problème de la *synthèse d'ouverture* en astronomie. Comme nous l'avons déjà souligné, ce problème inverse spécifique est à l'origine de ce travail et nous a conduit d'une part à étudier certains aspects des méthodes polyspectrales en traitement du signal, et pour une plus large part à nous intéresser et développer la méthode du « maximum d'entropie sur la moyenne ».

L'exposé qui suit a vocation d'illustration. Partant des conditions expérimentales et des lois physiques, nous revenons sur la formulation du problème en termes de traitement de données. Le problème d'imagerie sous jacent s'avère sévèrement mal-posé, constituant ainsi une illustration claire des notions introduites précédemment au chapitre I. Les raisons qui confèrent au problème son caractère mal posé sont soulignées.

Le problème de la synthèse d'ouverture est un problème d'imagerie d'un champ de source, constituant ainsi un problème de traitement d'antenne au sens large. Les liens avec le traitement d'antenne plus conventionnel sont examinés, et en particulier avec la méthode de « *formation de voies* », ceci servant d'introduction à notre article de synthèse sur le traitement d'antenne (Annexe A).

1 Synthèse d'ouverture

Perçues de la terre, les émissions radio semblent provenir à la fois de sources diffuses et étendues, comme de sources isolées et d'extension angulaire limitée. De plus, certains objets avec une structure étendue présentent également des structures plus fines, perceptibles à une résolution très supérieure¹. En raison des longueurs d'onde radio (qui sont environ un million de fois plus importantes que dans le domaine optique), la résolution des radio-télescopes est sévèrement limitée par les dimensions de l'instrument (la résolution est dans ce cas inversement proportionnelle aux dimensions de la pupille). Afin d'observer des objets plus lointains avec une capacité de résolution accrue, on utilise des réseaux de télescopes. En effet, la direction d'arrivée et la puissance d'une onde peuvent être obtenues en calculant l'intercorrélacion, ou cohérence mutuelle, entre des signaux reçus sur des télescopes distants. En combinant ensuite l'ensemble des intercorrélacions calculées pour toutes les paires de télescopes distribués sur une large région, il est possible de reconstruire une carte, ou une image, d'une source isolée, en synthétisant de la sorte une antenne dont les dimensions sont les dimensions du réseau. Ce réseau de télescopes forme ainsi globalement une antenne. Une paire de télescopes constitue un interféromètre. La stationnarité de l'émission permet de déplacer les télescopes et de profiter de la rotation de

1. On utilise comme définition de la résolution l'inverse de la distance minimale permettant de distinguer deux objets rapprochés : plus la résolution est importante, plus il est possible de séparer deux objets proches.

la terre pour couvrir un domaine plus étendu et échantillonner plus finement le champ. On construit de la sorte une antenne synthétique.

Durant la campagne de mesure, tous les éléments de l'antenne sont orientés dans la direction de la source radio étudiée. Les intercorrélations sur chacun des $N(N - 1)/2$ interféromètres constitués à partir d'un réseau de N éléments sont calculées. Au cours de la rotation terrestre, les projections des lignes de base sur le plan du ciel varient, et l'on balaye ainsi des courbes du domaine étudié. Le théorème de VAN CITTERT-ZERNICKE indique que ces intercorrélations sont reliées à la distribution d'intensité émise, moyennant l'hypothèse d'un champ restreint et d'une source haute sur l'horizon, par une transformation de FOURIER bidimensionnelle. Les intercorrélations disponibles correspondent ainsi à un échantillonnage irrégulier et lacunaire de la fonction de corrélation. Le problème d'imagerie auquel on aboutit est alors l'inversion de la transformation à partir de ces mesures.

1.1 Cadre général

Nous reprenons ici certains des éléments de notre présentation générale du traitement d'antenne (BERCHER & LARZABAL 1994, et Annexe A). Nous reprenons en particulier le cadre général qui permet de relier les signaux émis par une source, et leurs caractéristiques statistiques et énergétiques, aux mesures obtenues par le biais d'une antenne. Ces points étant établis, nous précisons dans les paragraphes suivants les différentes hypothèses et développements qui conduisent au théorème de VAN CITTERT-ZERNICKE, c'est-à-dire à l'expression de la fonction de cohérence mutuelle des observations sous la forme d'une transformée de FOURIER de la distribution d'intensité émise.

Dans un cadre encore assez général, on suppose l'émission stationnaire, le milieu de propagation homogène et isotrope. On s'intéresse à un domaine \mathcal{D} , et on note d'une part $s(\boldsymbol{\sigma}, t)$ une des composantes du champ émis en un point de coordonnées $\boldsymbol{\sigma}$ de ce domaine, et d'autre part dS l'élément de surface sur \mathcal{D} . Le milieu se comportant comme un *filtre* linéaire, la composante $x(\mathbf{r}_i, t)$ mesurée à l'instant t et au point \mathbf{r}_i par un capteur est la convolution

$$x_i(t) = x(\mathbf{r}_i, t) = \iint h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, t - t')s(\boldsymbol{\sigma}, t') dS dt', \quad (\text{II.1})$$

où h_i inclut à la fois les caractéristiques de la propagation et les caractéristiques du capteur (gain, directivité).

Notons que ces relations sont valides pour un modèle très général, puisque l'on n'a pour le moment précisé ni le modèle de propagation, ni les caractéristiques spectrales et statistiques des signaux.

En traitement d'antenne, on effectue en général une hypothèse fondamentale : l'*hypothèse bande étroite*. Cette hypothèse permet en effet, comme nous allons le voir, de séparer les contributions énergétiques du champ des effets de la propagation. Considérons l'intercorrélacion entre deux signaux mesurés respectivement aux points \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j

$$\gamma_{ij}(\tau) = \gamma(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; t, t - \tau) = \text{E} \{x(\mathbf{r}_i, t)x^*(\mathbf{r}_j, t - \tau)\}.$$

En utilisant (II.1), cette intercorrélacion peut être évaluée par la moyenne temporelle

$$\gamma_{ij}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T \iint h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, t - t')s(\boldsymbol{\sigma}, t')dS dt' \iint h_j^*(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{r}_j, t - t'' - \tau)s^*(\boldsymbol{\sigma}', t'')dS' dt'' dt,$$

soit encore

$$\gamma_{ij}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T \int h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, t - t') h_j^*(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{r}_j, t - t'' - \tau) s(\boldsymbol{\sigma}, t') s^*(\boldsymbol{\sigma}', t'') dS dS' dt' dt'' dt.$$

Les signaux émis par la source sont en général supposés incohérents. Il s'agit là d'une hypothèse de blancheur spatiale, qui signifie simplement que les signaux provenant d'éléments de source distincts sont décorrélés. En notant $B(\boldsymbol{\sigma}, \tau)$ l'autocorrélation du signal émis en $\boldsymbol{\sigma}$, l'hypothèse d'incohérence entraîne

$$\int s(\boldsymbol{\sigma}, t') s^*(\boldsymbol{\sigma}', t'') dS = B(\boldsymbol{\sigma}, t'' - t') \delta(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}').$$

Il vient alors

$$\gamma_{ij}(\tau) = \frac{1}{T} \int h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, t - t') h_j^*(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j, t - t'' - \tau) B(\boldsymbol{\sigma}, t'' - t') dS dt' dt''.$$

Il suffit maintenant de définir par $I_h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \tau - v)$ l'intercorrélacion entre h_i et h_j

$$I_h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \tau - v) = \frac{1}{T} \int h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, u) h_j^*(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j, u + v - \tau) du$$

pour aboutir, avec un changement de variable immédiat, au produit de convolution

$$\gamma_{ij}(\tau) = \int I_h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \tau - v) B(\boldsymbol{\sigma}, v) dv dS.$$

L'intercorrélacion des signaux reçus en deux points \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j est ainsi une fonction de l'autocorrélacion des signaux sources, du milieu de propagation et des caractéristiques des capteurs. Après une transformation de FOURIER, la composante à une fréquence ν_0 s'exprime comme

$$\Gamma_{ij}(\nu_0) = \int \gamma_{ij}(\tau) \exp(-j2\pi\nu_0\tau) d\tau = \int I_h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \tau - v) B(\boldsymbol{\sigma}, v) \exp(-j2\pi\nu_0\tau) dS dv d\tau.$$

Lorsque les signaux sont à bande étroite, c'est-à-dire lorsque la fréquence varie peu autour d'une fréquence porteuse ν_0 ,

$$\gamma_{ij}(\tau) \approx \Gamma_{ij}(\nu_0) \exp(-j2\pi\nu_0\tau),$$

et la convolution précédente se réduit au produit des coefficients de FOURIER à la fréquence considérée :

$$\gamma_{ij}(\tau, \nu_0) = \exp(-j2\pi\nu_0\tau) \int I_h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \nu_0) B(\boldsymbol{\sigma}, \nu_0) dS.$$

On observe alors un *découplage* entre les caractéristiques énergétiques de la source $B(\boldsymbol{\sigma}, \nu_0)$ et les modalités de recueil des données (propagation, capteurs) $I_h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \nu_0)$. Lorsque l'hypothèse bande étroite n'est pas vérifiée, on peut effectuer un filtrage préalable des données par un filtre à bande étroite, ou travailler avec des données obtenues après transformation de FOURIER. Notons maintenant que le facteur $I_h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \nu_0)$ peut encore se mettre sous la forme du produit des transformées de FOURIER des gains H :

$$I_h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \nu_0) = H(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0) H^*(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j, \nu_0).$$

Il est intéressant de faire apparaître le *temps de propagation* $T(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}, \nu_0)$ entre l'élément de champ situé en $\boldsymbol{\sigma}$ et le capteur positionné en \mathbf{r} . Le facteur $H(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}, \nu_0)$ se met alors sous la forme

$$H(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}, \nu_0) = G(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}, \nu_0) \exp(-j2\pi\nu_0 T(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}, \nu_0)),$$

où $G(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}, \nu_0)$ est un coefficient complexe qui comprend l'atténuation de l'onde lors de sa propagation, sa phase initiale, et le gain du capteur placé en \mathbf{r} . L'expression de l'intercorrélacion devient alors

$$\Gamma_{ij}(\nu_0) = \int I_g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \nu_0) B(\boldsymbol{\sigma}, \nu_0) \exp(-j2\pi\nu_0\tau_{ij}) dS,$$

où τ_{ij} est le *retard de propagation* entre \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j , et I_g l'intercorrélacion des gains complexes G .

1.2 Spécification du modèle de propagation

Pour aller plus avant, il nous faut maintenant spécifier le modèle de propagation, pour en déduire les expressions de τ_{ij} et I_g . Du fait de l'éloignement des sources étudiées, le modèle de propagation généralement utilisé est un modèle de propagation par ondes planes. C'est en outre le modèle qui conduit aux expressions les plus simples à manipuler. Pour notre part, nous préférons adopter une modélisation plus fine en utilisant un modèle de propagation sphérique (pour un milieu homogène et non dispersif, la propagation *est* sphérique), et retrouver le modèle de propagation par onde plane comme limite de ce modèle lorsque le rayon ($\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}$) devient très grand devant les dimensions du réseau (le front d'onde apparent est alors plan). Le développement que nous proposons dans la suite diffère de chacune des présentations que nous avons consultées sur le sujet. BORN et WOLF (BORN & WOLF 1978) montrent le théorème de VAN CITTERT-ZERNICKE en utilisant un modèle de propagation circulaire, mais se restreignent à un problème plan. En trois dimensions, il apparaît deux facteurs correctifs, sur l'amplitude et la phase respectivement. THOMPSON (THOMPSON *et al.* 1984) utilise quant à lui un modèle d'ondes planes et néglige alors un facteur lié à la courbure de l'onde. De nombreux résultats « intermédiaires » entre ces deux formulations sont donnés dans la littérature, en général sans indication ni justification.

Pour un modèle de propagation sphérique, l'intensité émise décroît en $(1/R^2)$ et le temps de propagation est simplement $T(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}, \nu) = \frac{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}|}{c(\nu)}$, si $c(\nu)$ est la vitesse de propagation à la fréquence ν , et où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne. Le signal mesuré en \mathbf{r} s'écrit ainsi

$$x(\mathbf{r}, t) = \int k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}, \nu) \frac{1}{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}|} \exp(-j2\pi\nu(t - \frac{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}|}{c(\nu)})) s(\boldsymbol{\sigma}, \nu) dS d\nu,$$

où $k(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}, \nu)$ est le gain du capteur dans la direction définie par $\boldsymbol{\sigma}$. Avec cette spécification du modèle, il est alors facile d'obtenir l'intercorrélacion

$$\Gamma_{ij}(\nu_0) = \int \frac{I_k(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \boldsymbol{\sigma}, \nu_0)}{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i||\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j|} B(\boldsymbol{\sigma}, \nu_0) \exp\left[j2\pi\nu_0 \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i| - |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j|}{c(\nu_0)}\right)\right] dS; \quad (\text{II.2})$$

ou, dans le domaine temporel :

$$\gamma_{ij}(\tau) = \int \frac{I_k(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \boldsymbol{\sigma}, \nu)}{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i||\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j|} B(\boldsymbol{\sigma}, \nu) \exp\left[-j2\pi\nu \left(\tau - \frac{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i| - |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j|}{c(\nu)}\right)\right] d\nu dS. \quad (\text{II.3})$$

Nous préférons, par analogie avec les résultats obtenus en optique, et pour la simplicité des résultats que nous obtiendrons plus loin, normaliser cette intercorrélacion par les intensités recueillies en \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j , pour obtenir un coefficient d'intercorrélacion, ou coefficient de cohérence :

$$\mu(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \nu_0) = \frac{\Gamma_{ij}(\nu_0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(\nu_0)\Gamma_{jj}(\nu_0)}}. \quad (\text{II.4})$$

En optique, le module du coefficient de cohérence est égal à la *visibilité* \mathcal{V} des franges d'une figure d'interférence associée à la superposition de deux ondes de même puissance (la visibilité d'une figure d'interférence est le nombre $\mathcal{V} = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}$ compris entre 0 et 1, où I_M et I_m sont respectivement les amplitudes des parties sombres et brillantes de la figure). Notons que le degré de cohérence $\Gamma_{ij}(\nu)$, quantité complexe, prend également le nom de *visibilité complexe*.

1.3 Exploitation du modèle de propagation, théorème de VAN CITTERT-ZERNICKE

Considérons pour le moment le cadre défini par la figure II.1. On s'intéresse à deux antennes A_i et A_j imageant un domaine \mathcal{D} de la voûte céleste. On suppose par ailleurs que le domaine \mathcal{D} est porté par une portion de sphère de rayon R . On définit un repère orthonormé $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tel que le « centre » S de la région étudiée ait pour coordonnées $R\mathbf{k}$. Il nous faut alors exprimer les distances $|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i|$ et $|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j|$ dans ce repère. Dans le repère précédent, on note donc

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}, \quad \text{et } \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.5})$$

Afin d'alléger les notations, on notera également $R_0 = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$, et $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ la « ligne de base » avec pour coordonnées $\mathbf{r}_{ij}^\dagger = [x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]$. Dans ces conditions, la distance $|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i|$ par exemple, s'exprime comme

$$|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i|^2 = (u - x_i)^2 + (v - y_i)^2 + (R_0 - z_i)^2.$$

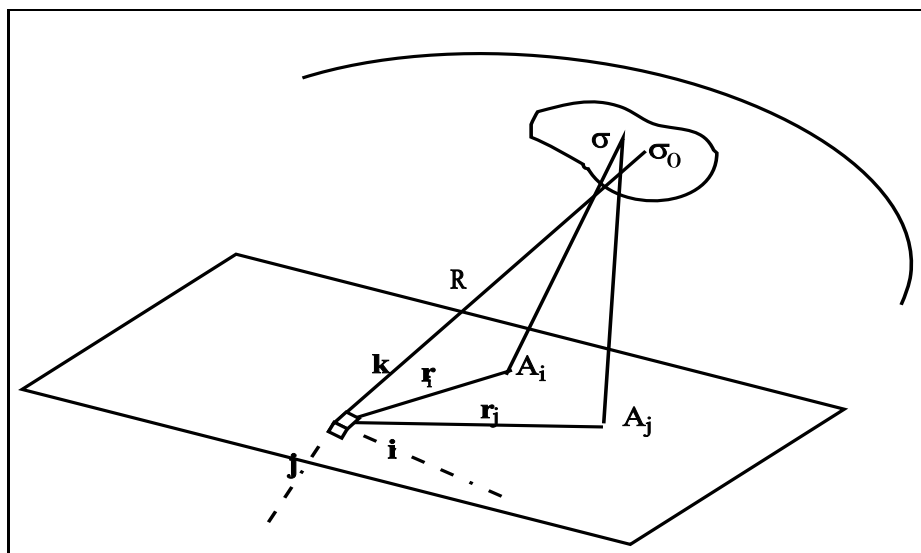


FIG. II.1 - Relations géométriques entre la source observée parcourue par $\boldsymbol{\sigma}$, la paire d'antennes A_1, A_2 , et le repère $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Il est intéressant de comparer cette distance à la distance moyenne R de la source étudiée.

En développant le terme $(R_0 - z_i)^2$ et en factorisant R^2 , il vient alors :

$$|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i| = R \sqrt{1 + \frac{(u - x_i)^2}{R^2} + \frac{(v - y_i)^2}{R^2} - \frac{(v^2 + u^2)}{R^2} - \frac{2R_0 z_i}{R^2} + \frac{z_i^2}{R^2}},$$

R étant supposé ici très grand devant toutes les autres dimensions du système — nous reviendrons plus loin sur cette approximation — un développement au premier ordre de l'expression précédente conduit alors à

$$|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i| = R \left(1 + \frac{(u - x_i)^2}{2R^2} + \frac{(v - y_i)^2}{2R^2} - \frac{(v^2 + u^2)}{2R^2} - \frac{2R_0 z_i}{2R^2} + \frac{z_i^2}{2R^2} \right).$$

Il nous reste alors à calculer la différence $|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i| - |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j|$ contribuant au retard de propagation τ_{ij} . À partir de l'expression précédente, il vient facilement

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i| - |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j| = & \frac{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)}{2R} + \frac{u(x_j - x_i) + v(y_j - y_i) + R_0(z_j - z_i)}{R}, \end{aligned}$$

une expression que l'on peut également écrire sous forme vectorielle :

$$|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i| - |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j| = \frac{|\mathbf{r}_i|^2 - |\mathbf{r}_j|^2}{2R} - \frac{\boldsymbol{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{R}.$$

L'expression de l'intercorrélacion (II.3) devient ainsi

$$\gamma_{ij}(\tau) = \int \frac{I_{k_{ij}}(\boldsymbol{\sigma}, \nu) e^{j\pi\phi_{ij}(\nu)}}{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i| |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j|} B(\boldsymbol{\sigma}, \nu) \exp \left[-j2\pi\nu \left(\tau + \frac{\boldsymbol{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{Rc(\nu)} \right) \right] d\nu dS.$$

Cette relation appelle quelques commentaires. Tout d'abord, le terme $\exp[j\pi\phi_{ij}(\nu)]$, avec $\phi_{ij}(\nu) = (|\mathbf{r}_i|^2 - |\mathbf{r}_j|^2)/(\lambda(\nu)R)$, est un terme de phase qui résulte de la courbure des fronts d'onde au niveau de chacune des deux antennes. Ce terme peut être négligé lorsque $|\mathbf{r}_i|^2 - |\mathbf{r}_j|^2 \ll R\lambda(\nu_0)$, ce qui est généralement le cas aux longueurs d'onde considérées et lorsque la source est en « champ lointain ». La seconde composante du retard de propagation, $\boldsymbol{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)/(Rc(\nu))$ correspond quant-à-elle au terme « plan », c'est-à-dire au retard « géométrique » obtenu avec une approximation plane des fronts d'onde. En faisant apparaître le vecteur unitaire $\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}/R$, avec $\eta = u/R$ et $\xi = v/R$, ce retard géométrique s'écrit

$$\tau_g = \frac{\mathbf{n}^\dagger \mathbf{r}_{ij}}{c(\nu)} = \frac{\xi(x_i - x_j) + \eta(y_i - y_j) + \sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}(z_i - z_j)}{c(\nu)}.$$

Il reste à préciser l'expression prise par l'élément de surface dS dans notre système de coordonnées. Il s'agit de la projection sur le plan tangent à la sphère de rayon R de l'élément de surface $dudv$. On obtient alors

$$dS = \frac{dudv}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}} = \frac{R^2 d\eta d\xi}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}}. \quad (\text{II.6})$$

Enfin, on peut approcher les distances $|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i|$ et $|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_j|$ par R dans l'expression de l'intercorrélacion (II.3) et de la cohérence mutuelle (II.4). Il est alors possible de simplifier les facteurs R^2 dus au modèle de propagation sphérique avec ceux qui apparaissent dans (II.6), et l'on parvient à

$$\gamma_{ij}(\tau) = \int I_{k_{ij}}(\mathbf{n}, \nu) B(\xi, \eta, \nu) \exp \left[-j2\pi \left(\nu\tau + \frac{\mathbf{n}^\dagger \mathbf{r}_{ij}}{\lambda(\nu)} \right) \right] d\nu \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}}.$$

Le retard τ est utilisé pour compenser le retard de propagation dans la direction moyenne d'observation. En effet, quand on prend comme point de référence le centre du domaine, comme c'est le cas sur la figure II.1, on désire annuler le terme d'interférences correspondant. Pour ce faire, on fait apparaître la contribution moyenne $\mathbf{n}_0^t(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ du retard de propagation en écrivant simplement $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)$, avec $\mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0/R$. En supposant ensuite que la vitesse de propagation $c(\nu)$ est relativement constante sur la bande de fréquence étudiée,² il suffit pour compenser le retard moyen de prendre $\tau = \tau_0 = \mathbf{n}_0^t \mathbf{r}_{ij}/c$. Il reste

$$\gamma_{ij}(\tau_0) = \int I_{k_{ij}}(\mathbf{n}, \nu) B(\xi, \eta, \nu) \exp \left[-\frac{j2\pi}{\lambda} \left((\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)^t \mathbf{r}_{ij} \right) \right] d\nu \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}}.$$

En fonction des coordonnées du système, il reste enfin

$$\gamma_{ij}(\nu_0, \tau) = \int \frac{I_{k_{ij}}(\mathbf{n}, \nu_0) B(\xi, \eta, \nu_0)}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}} \exp \left[-\frac{j2\pi}{\lambda} \left(x_{ij}\xi + y_{ij}\eta + z_{ij}(\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2} - 1) \right) \right] d\xi d\eta.$$

Une relation de transformée de FOURIER est obtenue lorsque l'on peut négliger le terme $z_{ij}(\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2} - 1)$. Ceci impose que le champ observé soit à la fois d'extension faible ($\eta^2 + \xi^2$ petit devant 1) et « haut sur l'horizon » (z_{ij} faible devant la longueur totale de la ligne de base). Si les mesures étaient effectuées par deux antennes placées dans un plan orthogonal à la direction d'observation \mathbf{n}_0 , la relation précédente serait exactement une transformée de FOURIER bidimensionnelle. Ceci n'est certainement pas la situation générale et cette approximation introduit une erreur en phase de l'ordre de $z_{ij} \pi(\eta^2 + \xi^2)/\lambda$. En notant maintenant

$$B_e(\xi, \eta, \nu_0) = \frac{I_{k_{ij}}(\mathbf{n}, \nu_0) B(\xi, \eta, \nu_0)}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}}$$

la distribution de brillance *expérimentale*, on obtient enfin la relation de transformée de FOURIER entre les intercorrélations et la distribution de brillance expérimentale, relation qui constitue le théorème de VAN CITTERT-ZERNICKE³

$$\gamma_{ij}(\nu_0, \tau) = \int B_e(\xi, \eta, \nu_0) \exp \left[-\frac{j2\pi}{\lambda} (x_{ij}\xi + y_{ij}\eta) \right] d\xi d\eta. \quad (\text{II.7})$$

Cette équation d'observation est le fondement de la plupart des méthodes de reconstruction de la distribution de brillance. Il faut cependant garder à l'esprit, comme nous avons tenté de le souligner, qu'elle lie les mesures à une version pondérée de la distribution de brillance, et par conséquent qu'il peut être nécessaire d'apporter une correction après une reconstruction obtenue à partir de (II.7). Pour ce qui concerne les gains des capteurs et leur directivité, on procède à une étape de *calibration* de sorte à obtenir $I_{k_{ij}}(\mathbf{n}, \nu_0)$ le plus proche possible de 1. On pourra consulter à ce propos (LE BESNERAIS 1994) et les publications qui y sont référencées.

2 Synthèse d'ouverture par rotation terrestre

Les données obtenues par le biais des intercorrélations calculées entre couples de télescopes constituent un échantillonnage spatial de la fonction d'intercorrélation $\Gamma(\mathbf{r}, \nu_0)$. La reconstruction de la distribution angulaire nécessite de multiplier les mesures d'intercorrélations,

2. Bien entendu, ce résultat est acquis immédiatement si on travaille en bande étroite.

3. F. ZERNICKE — publie d'importants travaux sur la cohérence en 1934. Il retrouve en 1938 de façon plus élégante un résultat établi par P.H. VAN CITTERT; ce résultat prend alors le nom de théorème de VAN CITTERT-ZERNICKE. Obtient le prix Nobel de physique en 1953.

ou de visibilité, afin d'obtenir la *couverture fréquentielle* (r/λ peut être interprété comme une fréquence spatiale) la plus complète possible. La reconstruction à partir de ces données nécessite alors de s'appuyer sur un théorème d'échantillonnage bidimensionnel, ou d'utiliser, si ces données sont *incomplètes*, une information supplémentaire.

Afin d'acquérir un grand nombre d'échantillons de la fonction d'intercorrélacion, on utilise un réseau de télescopes. Dans ces conditions, chacune des lignes de base donne accès à la fréquence spatiale définie comme la projection de la ligne de base sur le plan (x, y) du repère lié à la source utilisé dans le développement du paragraphe précédent. Un réseau de N télescopes fournit alors, au plus, $N(N - 1)/2$ fréquences spatiales distinctes. Le réseau le plus simple est un réseau linéaire où les capteurs sont uniformément espacés. Ce type de réseau est très pauvre puisque bien qu'il définisse $N(N - 1)/2$ lignes de base, seules $N - 1$ correspondent à des fréquences distinctes. On cherche au contraire à réduire cette redondance en adoptant une répartition non uniforme des télescopes. Un réseau qui donne accès à autant de fréquences spatiales distinctes que de lignes de bases est appelé réseau non redondant.

Si la source émet de façon stationnaire, une série de mesures de la même source peut être réalisée à des instants successifs en utilisant le même réseau. À nombre de télescopes fixé, — ce nombre étant bien entendu lié à des contraintes économiques, on peut accroître le nombre de mesures en variant les positions relatives des télescopes dans le repère lié à la source. Ceci peut par exemple être réalisé en employant des télescopes mobiles. Une autre manière de procéder consiste à profiter de la rotation terrestre, qui modifie sans cesse les positions relatives des télescopes et de la source observée. Chaque ligne de base « balaye » alors une suite de fréquences spatiales, et par conséquent permet de déterminer une suite de valeurs de la transformée de FOURIER de la distribution de brillance expérimentale. L'ensemble des fréquences atteintes par le réseau constitue la couverture fréquentielle liée à l'expérience. Ce principe expérimental est appelé synthèse d'ouverture par rotation terrestre.

Pour étudier la couverture fréquentielle atteinte au cours de la rotation terrestre, il est utile d'introduire un nouveau repère, lié à la terre et non plus à la source observée. On choisit en général la configuration suivante (voir la figure II.2) : on prend comme référence le centre de la terre, noté O ; le plan (O, X, Y) est le plan équatorial ; l'axe OX est dans le plan méridien — le plan défini par l'axe des pôles et un point de référence du réseau, l'axe OY est perpendiculaire à OX (à six heures angulaires) dans la direction de l'Est, et enfin OZ est porté par l'axe des pôles. On peut également utiliser dans ce repère l'angle horaire H (rotation dans le plan (O, X, Y)) et la déclinaison δ .⁴ Si l'on repère comme précédemment par $[x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]$ les coordonnées de la ligne de base r_{ij} dans le repère (O, x, y, z) (éventuellement à un décalage de l'origine près que nous ne discuterons pas), et si l'on note maintenant $[X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}]$ les coordonnées de cette même ligne de base dans le repère lié à la terre (O, X, Y, Z) , on a la relation

$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(H) & \cos(H) & 0 \\ -\sin(\delta)\cos(H) & \sin(\delta)\sin(H) & \cos(\delta) \\ \cos(\delta)\cos(H) & -\cos(\delta)\sin(H) & \sin(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{bmatrix}.$$

À partir de ces formules de changement de base, il est aisé de vérifier que le lieu des coordonnées du vecteur ligne de base décrit une ellipse lorsque l'angle horaire H varie, c'est-à-dire au cours

4. En *interférométrie à très longue ligne de base*, où les distances entre télescopes sont à l'échelle des continents, on utilise à la place du méridien local le méridien de Greenwich.

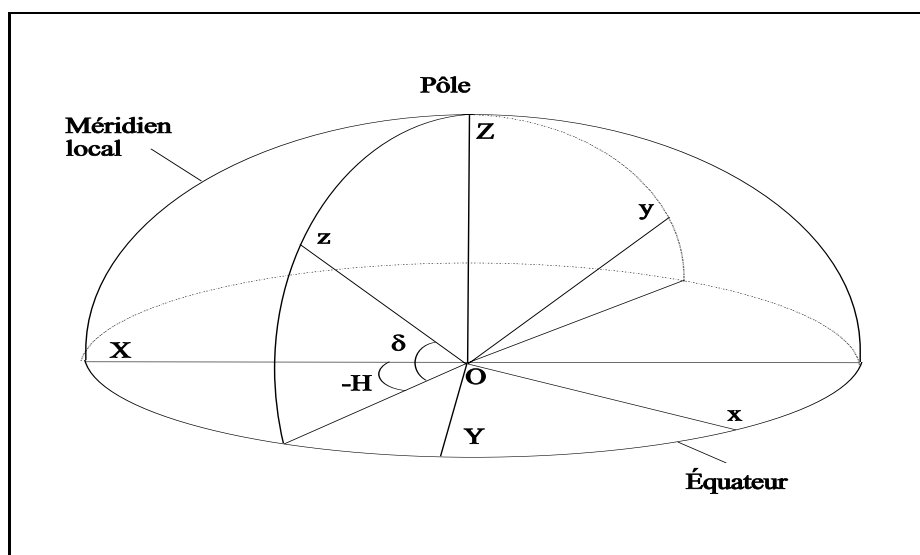


FIG. II.2 - Relations entre le repère lié à la source (O, x, y, z) et le repère lié à la terre (O, X, Y, Z) . D'après THOMPSON.

de la rotation terrestre :

$$x_{ij}^2 + \left(\frac{y_{ij} - Z_{ij} \cos(\delta)}{\sin(\delta)} \right)^2 = X_{ij}^2 + Y_{ij}^2.$$

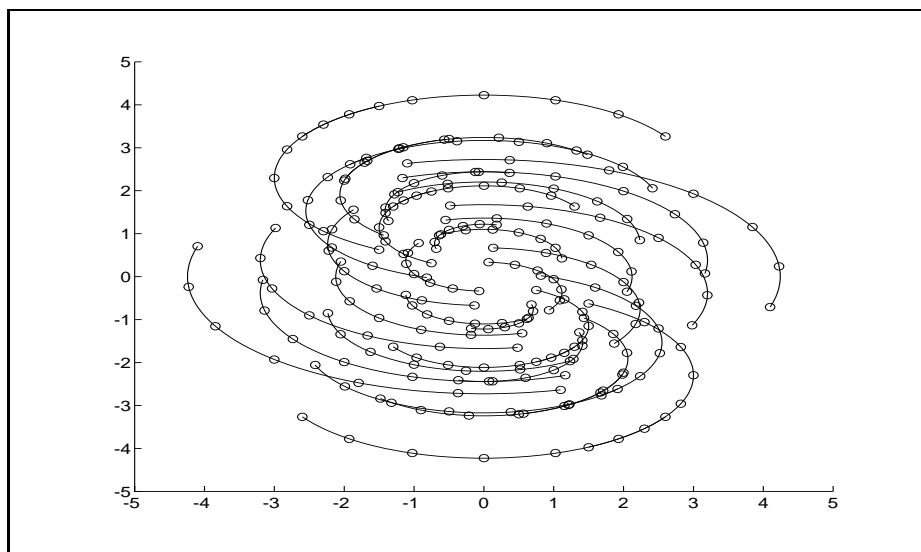
Cette ellipse a respectivement pour petit et grand axe $\sin(\delta)\sqrt{X_{ij}^2 + Y_{ij}^2}$ et $\sqrt{X_{ij}^2 + Y_{ij}^2}$, et pour centre $(0, Z_{ij} \cos(\delta))$.

Bien entendu, la longueur de ces ellipses est limitée par l'abaissement minimal des télescopes sur la ligne d'horizon. D'autre part, ces trajectoires sont échantillonnées à une cadence liée au temps de calcul de l'intercorrélacion (recueil des données en nombre suffisant ou temps d'intégration). La longueur des arcs d'ellipse est liée à l'intervalle de variation de l'angle horaire et à la longueur de la ligne de base considérée : plus la ligne de base est de faible dimension plus l'arc parcouru est de longueur faible. En général, ce sont aussi les plus proches de l'origine. Il en résulte que la densité de points décroît de l'origine vers l'extérieur du domaine. Par ailleurs, l'intercorrélacion $\Gamma(\mathbf{r}, \nu_0)$ possède une symétrie hermitienne, ce qui signifie que toute mesure fournit une information relative aux deux « fréquences » \mathbf{r}/λ et $-\mathbf{r}/\lambda$.

La figure II.3, obtenue pour une configuration à douze lignes de base (un réseau en Y avec deux capteurs par branche plus un capteur central), illustre cet état de fait. On a ici utilisé une déclinaison δ de 40 degrés et une variation de 120 degrés de l'angle horaire. L'intervalle entre deux mesures représente 20 degrés de rotation terrestre.

2.1 Reconstruction par transformée de FOURIER inverse

L'idée la plus naturelle pour reconstruire la distribution de brillance à partir des échantillons de la fonction d'intercorrélacion, ces deux quantités formant une paire de transformée de FOURIER, est d'appliquer simplement une transformée de FOURIER inverse aux données. Cependant, comme nous venons de le noter, l'échantillonnage de l'intercorrélacion est loin d'être l'échantillonnage uniforme nécessaire à l'utilisation des résultats de SHANNON concernant la reconstruction de fonctions à bande limitée.

FIG. II.3 - Exemple de couverture fréquentielle pour $\delta = 40^\circ$

La reconstruction de la distribution de brillance par transformation de FOURIER inverse s'écrit

$$B_e(\xi, \eta) = \sum_k W_k \Gamma(x_k, y_k) \exp \left[\frac{2j\pi}{\lambda} (\xi x_k + \eta y_k) \right], \quad (\text{II.8})$$

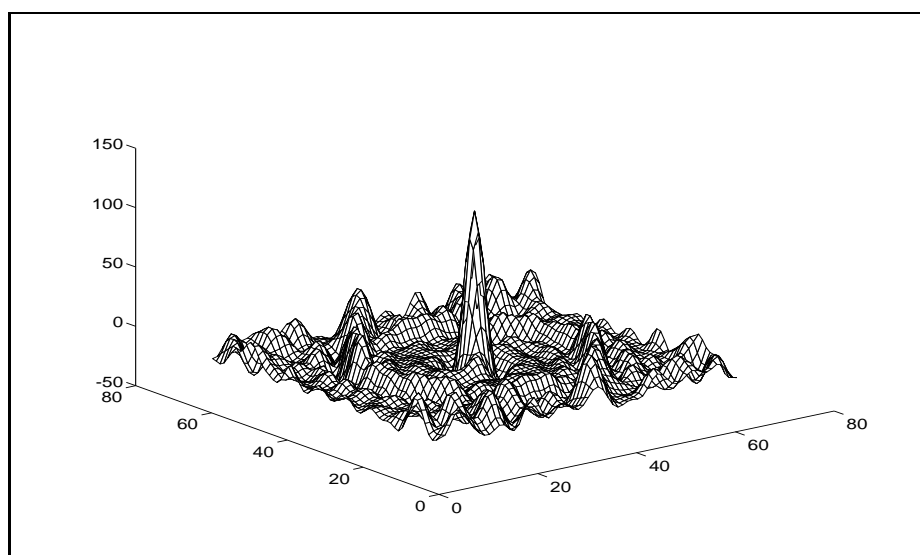
où l'on a utilisé l'indice k pour parcourir l'ensemble des projections des lignes de base dans le plan fréquentiel lors de la rotation terrestre. Le terme W_k est un terme de pondération destiné à tenir compte de la densité variable des données dans le plan fréquentiel, et éventuellement à modifier la réponse impulsionnelle du système. Dans cette relation, les données non disponibles sont implicitement prises à zéro. On conçoit aisément que cet effet de fenêtrage peut sévèrement limiter la qualité de ce type de reconstruction. Pour juger de cette qualité, on détermine la reconstruction pour une source ponctuelle située dans la direction de référence, c'est-à-dire la réponse impulsionnelle du réseau. Pour une telle source l'intercorrélacion est uniforme, et la reconstruction obtenue est

$$R(\xi, \eta) = \sum_k W_k \exp \left[\frac{2j\pi}{\lambda} (\xi x_k + \eta y_k) \right].$$

La figure II.4 donne ainsi la réponse impulsionnelle $R(\xi, \eta)$ correspondant aux données fréquentielles représentées sur la figure II.4 (ξ et η sont sans dimension – on a choisi pour l'illustration $\lambda = 20$ en unité arbitraire), et pour W_k la pondération « naturelle » $W_k = 1$. On observe en particulier que cette réponse impulsionnelle présente un lobe principal qui limite la résolution, des lobes secondaires importants et des zones où l'intensité devient négative. En fonction de cette réponse impulsionnelle, la distribution de brillance reconstruite par inversion de FOURIER peut s'exprimer comme la convolution

$$\hat{B}_e(\xi, \eta) = \int B_e(\xi', \eta') R(\xi - \xi', \eta - \eta') d\xi' d\eta'.$$

Cette relation fait ainsi apparaître une *limitation en résolution*, liée à la largeur du pic central de la réponse impulsionnelle, des structures secondaires engendrées par les lobes secondaires de la

FIG. II.4 - Réponse impulsionnelle du réseau, $W_k = 1$

réponse impulsionnelle ; et éventuellement des zones d'*intensité négative* qui sont inacceptables d'un point de vue physique (on cherche à reconstruire une distribution de puissance). La reconstruction obtenue de la sorte est appelée de façon éloquentes *dirty map* dans le vocabulaire anglo-saxon, la réponse impulsionnelle étant quant-à-elle qualifiée de *dirty beam*.

Le traitement numérique des données nous impose de chercher à reconstruire une image discrète de la distribution d'intensité. L'extension de la fonction d'intercorrélation étant limitée (ne serait-ce qu'en raison des conditions expérimentales), la discrétisation du plan image (ξ, η) , qui passe par la périodisation implicite de la fonction d'intercorrélation, ne pose pas de difficulté. Il est ainsi possible de définir une grille $\sum_{i,j} \delta_{\xi_i} \delta_{\eta_j}$ sur le plan image. L'hypothèse d'un champ restreint — nous reviendrons sur ce point plus bas, permet également de définir une grille d'échantillonnage dans le plan fréquentiel x, y . Il est cependant difficile d'appliquer la couverture fréquentielle expérimentale sans erreur sur une grille régulière de taille raisonnable.

L'évaluation directe de la transformée de FOURIER inverse des données conduit à une charge de calcul très importante : si l'image est évaluée sur N^2 points et si K est le nombre de données disponibles (qui doit être de l'ordre de ou supérieur à N^2), ce calcul requiert KN^2 multiplications complexes. On peut réduire cette charge de calcul en utilisant un algorithme de transformée de FOURIER rapide. Il faut alors utiliser deux grilles d'échantillonnage réciproques et surtout reporter les données sur une grille régulière du plan (x, y) . Un processus complexe de pondération, interpolation, lissage et rééchantillonnage des données, connu sous le nom de *gridding* est alors mis en œuvre. La méthode la plus simple consiste à convoluer ces échantillons non uniformément distribués pour obtenir une version « continue » de l'intercorrélation qui est ensuite rééchantillonnée. Le choix de ce noyau de convolution se heurte à deux exigences contradictoires. D'abord, la transformée de FOURIER de ce noyau doit être aussi uniforme que possible sur le champ observé, et s'annuler rapidement en dehors, afin d'éviter un phénomène de repliement lors de l'échantillonnage du plan (ξ, η) ; ceci assure ainsi l'hypothèse de champ restreint invoquée plus haut. Par ailleurs, le noyau de convolution doit être à support borné — et de préférence faible, pour permettre le calcul rapide de cette convolution. Ceci conduit à la recherche infructueuse d'une fonction qui serait à support

borné dans les deux domaines. Un choix attentif du noyau de convolution permet d'obtenir un compromis satisfaisant entre la compacité du noyau et le taux de repliement toléré. Cette question est étudiée dans (THOMPSON *et al.* 1984, chapitre 10) et traitée très complètement dans (LANDAU & POLLACK 1961, LANDAU & POLLACK 1962) et dans (SCHWAB 1984).

Le problème de reconstruction peut ainsi se mettre sous la forme matricielle

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}\mathbf{B},$$

où $\mathbf{\Gamma}$ et \mathbf{B} sont deux vecteurs qui collectent les échantillons de l'intercorrélacion et de la distribution de brillance, et \mathbf{A} est la matrice de FOURIER utilisée. Le caractère très lacunaire de la couverture fréquentielle initiale ne permet pas d'obtenir de remplissage complet du domaine de FOURIER. La matrice est alors rectangulaire et le problème indéterminé. La reconstruction de la distribution de brillance à partir des intercorrélacions calculées entre paires de télescopes constitue ainsi un problème inverse mal-posé.

2.2 Reconstruction par formation de voie

On distingue deux utilisations possibles de réseaux de capteurs en traitement d'antenne. La première utilisation, que nous venons de présenter, est l'utilisation en un « réseau de corrélacionteurs » qui fournit au titre de données les transformées de FOURIER de la distribution d'intérêt. La seconde utilisation est en un réseau phasé appelé « *phased array* » par les auteurs anglosaxons. La technique consiste à estimer la puissance émise par un site particulier en orientant électroniquement l'antenne, puis en sommant les signaux délivrés par celle-ci, de sorte à éliminer, par interférences destructrices, les contributions provenant d'autres directions que la direction visée. Dans (BERCHER & LARZABAL 1994, et Annexe A), nous donnons le résultat en nous appuyant sur un modèle d'ondes planes et une géométrie précise (antenne rectiligne uniforme) du dispositif de réception. Nous précisons le résultat ci-après dans le cadre que nous avons adopté — modèle de propagation sphérique et géométrie quelconque de l'antenne, et indiquons ainsi comment la technique de formation de voie peut être généralisée à des situations plus complexes.

En un point \mathbf{r} , le signal mesuré à la fréquence ν_0 (hypothèse bande étroite) est

$$x(\mathbf{r}, t) = \exp[j2\pi\nu_0 t] \int H(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r})s(\boldsymbol{\sigma})dS.$$

Afin de favoriser la contribution émise en un point $\boldsymbol{\sigma}_0$, on introduit la pondération spatiale (appelé filtre spatial dans l'Annexe A)

$$a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_0) = \frac{1}{H(\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{r})}.$$

Cette opération permet de « remettre en phase » les signaux émis en $\boldsymbol{\sigma}_0$ et mesurés en un point quelconque \mathbf{r} du réseau

$$x_{\boldsymbol{\sigma}_0}(\mathbf{r}, t) = \exp[j2\pi\nu_0 t] \int \frac{H(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r})}{H(\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{r})}s(\boldsymbol{\sigma})dS.$$

La sommation de ces signaux permet alors d'atténuer, par interférences destructrices, les composantes émises en un point différent de $\boldsymbol{\sigma}_0$. La puissance émise $P_{\boldsymbol{\sigma}_0}$ est enfin estimée à partir du carré de cette somme :

$$P_{\boldsymbol{\sigma}_0} = \left| \sum_{\mathbf{r}} x_{\boldsymbol{\sigma}_0}(\mathbf{r}, t) \right|^2.$$

Pour caractériser cette quantité, intéressons nous à la puissance moyenne $E\{P_{\sigma_0}\}$. En utilisant l'hypothèse d'incohérence du champ, il vient facilement

$$E\{P_{\sigma_0}\} = \int \left| \sum_{\mathbf{r}} \frac{H(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r})}{H(\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{r})} \right|^2 B(\boldsymbol{\sigma}) dS.$$

La spécification du modèle de propagation permet de donner l'expression de l'argument de la somme. Pour un modèle de propagation sphérique, on a

$$H(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}|} \exp(j2\pi\nu \frac{|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}|}{c(\nu)}),$$

et

$$\frac{H(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r})}{H(\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{r})} \approx \exp\left[\frac{j2\pi}{\lambda} (|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}| - |\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{r}|)\right].$$

Un calcul analogue à celui détaillé au paragraphe §1.3, et avec les mêmes notations, permet d'établir que

$$|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}| - |\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{r}| \approx ux + vy + (R_0 - R)z = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)^t \mathbf{r}.$$

La puissance estimée par formation de voie s'écrit ainsi

$$E\{P_{\sigma_0}\} = \int \left| \sum_{\mathbf{r}} \exp\left[\frac{j2\pi}{\lambda} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)^t \mathbf{r}\right] \right|^2 B(\boldsymbol{\sigma}) dS,$$

expression dans laquelle on reconnaît le produit de convolution

$$E\{P_{\sigma_0}\} = \int R(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) B(\boldsymbol{\sigma}) dS,$$

si $R(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)$ note le terme quadratique. Il s'agit de la réponse impulsionnelle liée à la technique de formation de voie. Quelques commentaires s'imposent concernant cette réponse impulsionnelle et la technique de formation de voie. D'abord, si on note $\Pi(\mathbf{r})$ la fonction indicatrice du réseau, cette réponse impulsionnelle est le module carré de la transformée de FOURIER spatiale de $\Pi(\mathbf{r})$. Pour un réseau plan et uniforme de taille $N \times N$, on a par exemple

$$R(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\sin(\pi N \sigma_x)}{N \sin(\pi \sigma_x)} \frac{\sin(\pi N \sigma_y)}{N \sin(\pi \sigma_y)} \right)^2,$$

où σ_x et σ_y sont les coordonnées de la projection du vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ sur le plan de l'antenne. Cette relation indique que la méthode présente une limitation en résolution, liée à la largeur du lobe principal de la réponse impulsionnelle, c'est-à-dire en fait aux dimensions du réseau, comme nous l'avions également noté à propos du traitement par transformée de FOURIER. Il est possible de pondérer la formation de voie pour modifier le diagramme de directivité, avec en particulier des lobes secondaires plus bas.

En utilisant la relation de PARSEVAL, on peut exprimer la puissance $E\{P_{\sigma_0}\}$ en fonction de l'intercorrélacion $\Gamma(\mathbf{r})$ plutôt qu'en fonction de la distribution de brillance :

$$E\{P_{\sigma_0}\} = \sum_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r}) \exp\left[\frac{j2\pi}{\lambda} \boldsymbol{\sigma}_0^t \mathbf{r}\right],$$

où $G(\mathbf{r})$ est la fonction d'autocorrélacion du réseau, c'est-à-dire de la fonction $\Pi(\mathbf{r})$. Il est facile de vérifier que cette autocorrélacion est l'indicatrice des lignes de base disponibles \mathbf{r}_{ij} ,

pondérée par la redondance du réseau. En mettant en regard cette dernière expression avec la reconstruction directe par transformation de FOURIER inverse (II.8), on peut alors observer que la reconstruction par formation de voie est *identique* à une reconstruction obtenue par transformation de FOURIER inverse, pour cette pondération particulière. Notons enfin que cette pondération garantit la positivité de l'image reconstruite.

En astronomie, l'utilisation des réseaux de télescopes en « réseau de corrélateurs » est privilégiée, ne serait-ce que pour la possibilité de multiplier les mesures en profitant de la rotation terrestre. Il est ainsi possible de reconstruire des images en utilisant des réseaux très lacunaires. De plus, le traitement, qui s'effectue alors nécessairement en temps différé, autorise la mise en œuvre de méthodes de reconstruction plus complexes qu'une simple transformée de FOURIER. Cependant, la méthode de formation de voie peut être employée dans les situations où la couverture fréquentielle est suffisamment dense et l'application en temps limité (phénomènes transitoires).

3 Introduction au traitement d'antenne

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté deux méthodes de reconstruction de la distribution d'intensité à partir de données recueillies sur un réseau de capteurs. Un tel réseau constitue une antenne, et les traitements des signaux mesurés, en vue de décrire et caractériser les émetteurs, relèvent du traitement d'antenne, ou traitement spatial. Deux grandes classes de méthodes sont utilisées selon qu'on s'intéresse à un modèle de source étendue — comme c'est le cas dans les problèmes précédents où l'on cherche à imager un champ continu, ou à un modèle de sources ponctuelles. Dans les deux cas, les traitements reposent sur l'établissement d'un modèle mathématique de l'observation. Nous avons explicité ce modèle dans le cas des sources étendues en soulignant les différentes hypothèses qui mènent à la formulation retenue. Deux étapes nous semblent essentielles : l'hypothèse bande étroite et la spécification et la paramétrisation du modèle de propagation. D'autres hypothèses, comme le fait de négliger la composante z du vecteur ligne de base, sont plus techniques et visent à obtenir un modèle facile à manipuler.

Dans le cadre d'une action « Calibration d'antenne » du GdR 134, coordonnée par J.-P. LE CADRE, nous nous sommes intéressés à l'établissement des modèles utilisés en traitement d'antenne, et nous avons présenté les différentes méthodes de traitement de manière unifiée. Le lecteur trouvera cette présentation dans l'Annexe A. Pour ce qui concerne l'imagerie d'un champ continu, on retrouvera, mais de façon plus concise, les deux méthodes de traitement présentées dans ce chapitre. Nous donnons également quelques indications concernant la méthode CLEAN, très utilisée en radio-astronomie. La méthode de CAPON s'apparente et pallie certains défauts de la formation de voie, mais n'est pas, à notre connaissance, utilisée en astronomie. Dans de nombreuses situations, le champ étudié peut être considéré comme un champ de sources discrètes. Ce modèle de sources ponctuelles a fait l'objet d'études très nombreuses, en particulier en raison de ses applications dans les domaines sonar et radar. Des méthodes dites « à haute résolution », fondées sur certaines propriétés géométriques de la matrice de covariance ont ainsi été développées et sont également présentées dans l'annexe A.

ANNEXE A

Traitement d'antenne avec adéquation de modèle

Traitement du Signal, numéro spécial « Calibration d'antenne », 1994.

CHAPITRE III

ANALYSE BISPECTRALE ET CLÔTURE DE PHASE

DANS LE CHAPITRE précédent, pour simplifier la présentation, nous avons délibérément ignoré les sources possibles de perturbation des données. La qualité de l'image reconstruite à partir d'un ensemble de mesures de la fonction d'intercorrélation (ou visibilité complexe) dépend du rapport signal-à-bruit et de la précision avec laquelle l'instrument peut mesurer cette visibilité. Les erreurs d'estimation (estimation des fonctions de cohérence), les imperfections du modèle (et en particulier les erreurs de quadrature), la variabilité des gains d'antenne, peuvent être globalement modélisées comme une perturbation additive, cette perturbation étant, sans information supplémentaire, prise gaussienne centrée. D'autres sources de perturbations ne peuvent être modélisées par une perturbation additive : il s'agit en particulier des effets liés à la propagation et en particulier aux conditions météorologiques et aux turbulences atmosphériques. Ces perturbations affectent essentiellement la phase des visibilités complexes et sont responsables d'aberrations de phase dans l'image reconstruite. Les turbulences atmosphériques limitent par ailleurs la durée de cohérence, c'est-à-dire le temps durant lequel les conditions expérimentales sont stables, et par conséquent les temps d'intégration. Cet effet est essentiellement gênant dans le domaine optique.

Les perturbations de phase rencontrées en interférométrie possèdent une symétrie particulière, et une relation de clôture peut être exploitée afin de construire une quantité indépendante des perturbations de phase. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à ces perturbations de phase et relierons la relation de clôture de phase aux techniques polyspectrales utilisées en traitement statistique des données et en traitement du signal. Ce chapitre sera ainsi organisé suivant deux grands axes. Nous débuterons par une présentation des relations de clôture en interférométrie et des techniques utilisées en interférométrie optique, et relèverons alors certaines analogies avec les techniques fondées sur les statistiques d'ordre supérieur utilisées en traitement du signal. Nous poursuivrons donc par une description des propriétés des cumulants et des polyspectres, puis nous nous intéresserons aux problèmes d'estimation des polyspectres, et proposerons une procédure originale d'estimation. Nous envisagerons ensuite l'application des polyspectres à l'identification et analyserons quelques méthodes d'identification. Enfin, nous proposerons une méthode de factorisation polyspectrale.

1 Relations de clôture en interférométrie

Trois techniques principales sont utilisées pour prendre en compte les erreurs en gain et en phase sur les mesures de visibilité, c'est-à-dire pour *calibrer* l'instrument (voir à ce sujet

(LE CADRE *et al* 1993)).

La première technique consiste à utiliser une source de référence pour identifier la réponse de l'interféromètre et par suite calibrer les gains (complexes). Notons que cette source de référence doit être (i) peu étendue pour apparaître comme une source ponctuelle et permettre d'identifier alors la réponse impulsionnelle du système, (ii) proche du domaine étudié, pour considérer que les conditions de propagation sont similaires, (iii) assez puissante pour que les temps de calibration soient faibles devant le temps d'observation (le temps d'intégration est inversement proportionnel au rapport signal-à-bruit).

La seconde technique consiste à mesurer toutes les variables intervenant dans les perturbations, comme le degré d'humidité, la température, la pression, *etc* et utiliser les équations physiques du modèle pour corriger les incertitudes.

Enfin, en utilisant le fait que nombre des erreurs sont liées aux signaux reçus par les capteurs individuels tandis que les visibilitées sont calculées pour des paires de capteurs, certaines de ces erreurs peuvent être éliminées en combinant les mesures de visibilité. Au paragraphe §1.3 du chapitre précédent, nous sommes parvenu à l'expression (II.7) de l'intercorrélacion mesurée entre deux capteurs i et j :

$$\Gamma_{ij}(\nu_0, \tau) = \int B_e(\xi, \eta, \nu_0) \exp \left[-\frac{j2\pi}{\lambda} (x_{ij}\xi + y_{ij}\eta) \right] d\xi d\eta.$$

avec la distribution de brillance expérimentale

$$B_e(\xi, \eta, \nu_0) = \frac{I_{k_{ij}}(\mathbf{n}, \nu_0) B(\xi, \eta, \nu_0)}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}}.$$

Rappelons que le facteur $I_{k_{ij}}(\mathbf{n}, \nu_0)$ est la transformée de FOURIER du produit de convolution entre les réponses impulsionnelles des capteurs $k_i(\mathbf{n}, t)$ et $k_j(\mathbf{n}, t)$, c'est-à-dire finalement le produit

$$I_{k_{ij}}(\mathbf{n}, \nu_0) = K_i(\mathbf{n}, \nu_0) K_j^*(\mathbf{n}, \nu_0).$$

Les expressions précédentes précisent le rôle des gains des capteurs dans l'intercorrélacion expérimentale $\Gamma_{ij}(\nu_0, \tau)$. En particulier, la dépendance en \mathbf{n} de ces gains rend compte de la directivité des capteurs. Lorsque le gain est relativement constant sur le domaine étudié, il est possible d'écrire

$$\Gamma_{ij}(\nu_0, \tau) \approx K_i(\mathbf{n}_0, \nu_0) K_j^*(\mathbf{n}_0, \nu_0) \int \frac{B(\xi, \eta, \nu_0)}{\sqrt{1 - \eta^2 - \xi^2}} \exp \left[-\frac{j2\pi}{\lambda} (x_{ij}\xi + y_{ij}\eta) \right] d\xi d\eta,$$

où le terme intégral peut être qualifié de « visibilité idéale », ou « théorique », dans le sens où elle serait obtenue avec des capteurs idéaux de gain unité. Dans ces conditions, en notant $\Gamma_{ij}^{\text{th}}(\nu_0, \tau)$ cette visibilité théorique, il reste

$$\Gamma_{ij}(\nu_0, \tau) \approx K_i(\mathbf{n}_0, \nu_0) K_j^*(\mathbf{n}_0, \nu_0) \Gamma_{ij}^{\text{th}}(\nu_0, \tau). \quad (\text{III.1})$$

Cette factorisation des gains permet de gagner un ordre de grandeur sur la calibration des quantités inconnues. En effet, sans cette factorisation, il faudrait déterminer les $N(N-1)/2$ coefficients reliant les données aux visibilitées théoriques (pour un réseau non redondant à N antennes), alors qu'il suffit ici de déterminer les N gains K_1, \dots, K_N . En considérant les visibilitées en module et en phase, et en notant α_i la phase du gain K_i , il vient

$$\frac{\Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}^{\text{th}}} = |K_i K_j^*| \exp j(\alpha_i - \alpha_j).$$

En fait, on s'aperçoit que les phases des visibilitées sont liées par une relation de *clôture de phase*. En effet, si on considère trois capteurs formant un « triangle » i, j, k et les visibilitées associées à chacune des lignes de base ij, jk et ki , les erreurs de phase intervenant sur chacun des sommets du triangle s'annulent lorsque l'on somme les phases des visibilitées le long de ce triangle. En notant $\alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$ le « vecteur » construit sur les coordonnées α_i et α_j , cette remarque n'est rien de plus que la relation de somme vectorielle

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{ki} = 0.$$

À partir de cette constatation, on peut déduire la relation globale suivante sur les gains complexes

$$\frac{\Gamma_{ij}\Gamma_{jk}\Gamma_{ki}}{\Gamma_{ij}^{\text{th}}\Gamma_{jk}^{\text{th}}\Gamma_{ki}^{\text{th}}} = |K_i|^2|K_j|^2|K_k|^2,$$

et d'autre part, en notant ϕ_{ij} la phase de la visibilité Γ_{ij} , la relation de *clôture de phase*

$$\phi_{ij} + \phi_{jk} + \phi_{ki} = \phi_{ij}^{\text{th}} + \phi_{jk}^{\text{th}} + \phi_{ki}^{\text{th}}. \quad (\text{III.2})$$

En présence d'erreurs de phase importantes, les mesures de visibilité ne fournissent pas directement les valeurs théoriques des phases, mais, pour chaque triplet de capteurs, une contrainte sur les phases théoriques. On peut déjà entrevoir l'intérêt de cette relation : si le membre de droite est connu, c'est la phase du produit $\Gamma_{ij}\Gamma_{jk}\Gamma_{ki}$, alors les phases des visibilitées sont liées et il suffit de connaître deux des phases pour déduire la troisième, indépendamment des erreurs de phase, qui sont éliminées dans la relation de clôture.

Une relation de clôture similaire existe pour ce qui concerne les gains complexes. Elle met cette fois en jeu des groupes de quatre éléments qui sont combinés de sorte à obtenir une quantité indépendante des gains complexes (en module et phase) :

$$\frac{\Gamma_{ij}\Gamma_{kl}}{\Gamma_{il}\Gamma_{kj}} = \frac{\Gamma_{ij}^{\text{th}}\Gamma_{kl}^{\text{th}}}{\Gamma_{il}^{\text{th}}\Gamma_{kj}^{\text{th}}}.$$

Cette relation de clôture est appelée clôture d'amplitude d'ordre 4.

En astronomie, on donne souvent le rapport du nombre de relations de clôture indépendantes au nombre de lignes de base pour indiquer l'efficacité d'une calibration qui serait réalisée en employant ces relations de clôture. Ce rapport croît avec le nombre d'antennes, et dès que le nombre d'antennes est supérieur à 10, il est possible de calibrer plus de 80% des gains en utilisant les relations de clôture (THOMPSON *et al.* 1984, chapitre 11).

2 Interférométrie optique

Nous avons déjà cité l'effet particulièrement néfaste des turbulences atmosphériques dans le domaine visible — les durées de cohérence sont de quelques dizaines de millisecondes. La situation est en fait assez difficile pour interdire l'utilisation de techniques analogues à celles du domaine radio. Afin de relier les techniques de clôture de phase précédentes aux techniques utilisées en optique, il est utile de revenir sur le principe de construction et d'acquisition des images en optique et sur les principales méthodes de traitement.

2.1 Principe des mesures

On considère l'ouverture du télescope comme constituée de N sous-ouvertures élémentaires. Chacune des sous-ouvertures est supposée assez petite pour que le champ soit cohérent sur sa surface. L'amplitude complexe Ψ du champ mesurée dans le plan focal du télescope (supposée monochromatique) est obtenue en sommant les contributions de chacune des sous-ouvertures :

$$|\Psi|^2 = \sum_{i=1}^N |\Psi_i|^2 + \sum_{i,j} \sum_{i \neq j} \Psi_i \Psi_j^*$$

Dans cette relation, le premier terme est simplement la somme des énergies rayonnées par chacune des sous-ouvertures, alors que le second terme est un terme d'interférences, similaire au terme retenu en imagerie radio. Cette relation montre en outre qu'il est possible de reconstituer une image d'intensité à partir de la connaissance de toutes les intercorrélations $\Psi_i \Psi_j^*$: c'est la synthèse d'ouverture. L'image globale, correspondant à l'ouverture totale, est la somme de toutes les figures d'interférence produites par chacune des paires de sous-ouvertures. Toutes les paires de sous-ouvertures de même espacement et orientation, c'est-à-dire qui engendrent une même ligne de base, dans la terminologie radio, produisent une même figure d'interférence, de fréquence spatiale \mathbf{f} . On note $N(\mathbf{f})$ le nombre de paires associées à une même ligne de base. Ce nombre, la redondance pupillaire, est proportionnel à la surface commune entre la pupille et la pupille décalée d'une fois la longueur de la ligne de base. Remarquons que les fréquences spatiales supérieures aux dimensions de la pupille sont inaccessibles. En l'absence de perturbations, les figures d'interférences associées à une même ligne de base se combinent en phase pour donner le coefficient de FOURIER à la fréquence \mathbf{f} de l'image :

$$I(\mathbf{f}) = O(\mathbf{f})T(\mathbf{f}).$$

Nous avons ici adopté des notations consacrées en optique. $I(\mathbf{f})$ est la transformée de FOURIER de l'image, $O(\mathbf{f})$ est la transformée de FOURIER de l'objet et $T(\mathbf{f})$ est la fonction de transfert, ici égale à la redondance $N(\mathbf{f})$ normalisée par la redondance à l'origine $N(\mathbf{0})$.

Les turbulences atmosphériques, qui constituent la perturbation la plus importante dans le domaine optique, ont pour effet de modifier la fonction de transfert $T(\mathbf{f})$. On suppose que les sous-ouvertures ont une dimension égale à la largeur de cohérence. Pour les fréquences spatiales inférieures à cette région de cohérence, l'effet de la turbulence est nul et les figures d'interférence continuent à se sommer en phase. Par contre, pour les fréquences supérieures, la turbulence introduit, comme dans le domaine radio, un retard de phase distinct sur chacune des sous-ouvertures. L'amplitude complexe produite par l'ouverture i est ainsi multipliée par le facteur $\exp j\alpha_i$. Les termes d'intercorrélations $\Psi_i \Psi_j^*$ deviennent alors $\Psi_i \Psi_j^* \exp j(\alpha_i - \alpha_j)$ et ne se combinent alors plus en phase dans l'image finale. En notant $\phi_k(\mathbf{f})$ les phases des intercorrélations associées à une même ligne de base, la composante $I(\mathbf{f})$ de la transformée de FOURIER de l'image est

$$I(\mathbf{f}) = O(\mathbf{f}) \frac{1}{N(\mathbf{0})} \sum_{k=1}^{N(\mathbf{f})} \exp j\phi_k(\mathbf{f}). \quad (\text{III.3})$$

Dans la mesure où les phases ϕ_k sont aléatoires, l'image moyenne (au sens d'une moyenne temporelle) s'annule alors pour les fréquences spatiales supérieures à la région de cohérence. La turbulence atmosphérique introduit ainsi une fonction de transfert qui gomme les fréquences élevées et les détails fins de l'image. Afin de pallier cette limitation en résolution, on construit, à partir d'images « instantanées », les *interférogrammes*, des quantités qui ne s'annulent pas par moyennage et permettent de revenir à l'objet $O(\mathbf{f})$.

2.2 Interférométrie de *speckle*

L'interférométrie de *speckle* (tavelures) a été introduite par LABEYRIE en 1970 (LABEYRIE 1970, LABEYRIE 1976). Le principe est de moyennner le module carré de la transformée de FOURIER de l'interférogramme. Le module carré de la fonction de transfert étant strictement positif, la quantité moyenne conserve une information sur toutes les fréquences, et en particulier pour les fréquences supérieures à la région de cohérence. Par la loi des grands nombres, le carré de la somme des $N(\mathbf{f})$ phaseurs $\exp j\phi_k(\mathbf{f})$ tend vers $N(\mathbf{f})$. On a alors

$$\langle |I(\mathbf{f})|^2 \rangle = |O(\mathbf{f})|^2 \langle |T(\mathbf{f})|^2 \rangle = |O(\mathbf{f})|^2 \left\langle \left| \frac{1}{N(\mathbf{0})} \sum_{k=1}^{N(\mathbf{f})} \exp j\phi_k(\mathbf{f}) \right|^2 \right\rangle = |O(\mathbf{f})|^2 \frac{N(\mathbf{f})}{N(\mathbf{0})^2}.$$

Cette relation montre que la fonction de transfert est cette fois-ci non nulle pour les fréquences spatiales supérieures à la largeur de cohérence. Cependant, le fait de prendre le module carré entraîne la perte de l'information de phase. Seul le spectre de l'objet peut alors être identifié. De façon équivalente, seule est accessible l'autocorrélation de l'objet.

2.3 Triples corrélations et *speckle masking*

Afin de restituer non seulement le module mais aussi la phase de l'objet, on utilise à la place du module carré de la transformée de FOURIER des interférogrammes une « triple corrélation », c'est-à-dire le produit de trois versions décalées de la transformée de FOURIER d'un interférogramme :

$$I(\mathbf{f}_1)I(\mathbf{f}_2)I^*(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2).$$

Le terme de « triple corrélation » provient du fait que, comme nous l'avons vu, $I(\mathbf{f})$ est l'amplitude de la figure d'interférence de fréquence spatiale \mathbf{f} , et en terme de corrélation, l'amplitude de l'intercorrélation calculée pour la ligne de base définie par les paires de sous-ouvertures engendrant l'interférence considérée. Le produit précédent est alors le produit de trois intercorrélations, une triple corrélation. L'espérance de ces triples corrélations, pour \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 variables, est le bispectre de l'image

$$B_I(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = E \{ I(\mathbf{f}_1)I(\mathbf{f}_2)I^*(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \}.$$

Notons cependant que le nom de triple corrélation a également été utilisé par exemple dans (LOHMANN & WIRNITZER 1984, GIANNAKIS 1989) pour désigner la fonction de corrélation d'ordre 3, fonction que nous nommerons pour notre part bicorrélation. L'utilisation du terme triple corrélation pour désigner le bispectre semble par contre répandue en optique, pour la raison avancée plus haut.

Ce point de terminologie étant précisé, il convient de vérifier maintenant que le moyennage des triples corrélations est constructif, c'est-à-dire conduit à une quantité non nulle. En fonction de l'objet $O(\mathbf{f})$ et de la fonction de transfert $T(\mathbf{f})$, la triple corrélation précédente est simplement

$$\langle I(\mathbf{f}_1)I(\mathbf{f}_2)I^*(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \rangle = O(\mathbf{f}_1)O(\mathbf{f}_2)O^*(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \langle T(\mathbf{f}_1)T(\mathbf{f}_2)T^*(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \rangle,$$

soit encore

$$B_I(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = B_O(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)B_T(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2),$$

où l'on a noté respectivement B_T et B_O les bispectres de la fonction de transfert et de l'objet. À partir de la fonction de transfert apparaissant dans (III.3), on obtient l'expression suivante

de la fonction de transfert entre la triple corrélation de l'objet et de l'image :

$$\frac{1}{N(\mathbf{0})^3} \sum_{p=1}^{N(\mathbf{f}_1)} \sum_{q=1}^{N(\mathbf{f}_2)} \sum_{r=1}^{N(\mathbf{f}_2)} \langle \exp j(\phi_p + \phi_q - \phi_r) \rangle,$$

si ϕ_p , ϕ_q et ϕ_r sont les déphasages introduits sur les figures d'interférences de fréquences \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 et $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ produites par trois paires de sous-ouvertures. La somme sur p , q , r prend en compte tous ces triplets de paires de sous-ouvertures. Dans la plupart des configurations, les phases ϕ sur chacune des paires ne sont pas liées et se moyennent indépendamment à zéro. En fait, la seule configuration dans laquelle ceci ne se produit pas est la configuration dans laquelle la somme des phases est nulle

$$\phi_p + \phi_q - \phi_r = 0,$$

condition qui est exactement une *condition de clôture de phase*. Cette condition est vérifiée lorsque chacune des sous-ouvertures appartient simultanément à deux paires, c'est-à-dire que les trois paires forment une « boucle » bâtie sur trois sous-ouvertures. On note $N(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ le nombre de tels triplets. Il est important de noter maintenant que les phases de la triple corrélation de l'objet et de l'image sont alors identiques :

$$\angle B_I(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \angle B_O(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2).$$

Le bispectre annule ainsi, par clôture de phase, les phases introduites par les turbulences atmosphériques. Il préserve par ailleurs une information de phase entre l'objet initial et l'image. Le problème est alors de retrouver la phase de l'objet à partir de la phase de la triple corrélation, — le module étant accessible par interférométrie de *speckle* — ou mieux, de revenir à l'objet complet, en module et en phase, à partir des données bispectrales. Disons dès à présent qu'une telle opération est possible. Avant de présenter quelques techniques de traitement du signal fondées sur l'utilisation des polyspectres et donner un algorithme de résolution de ce problème de reconstruction, nous proposons ci-dessous une interprétation de la technique du « *speckle masking* » en terme de triple corrélation.

Speckle masking La technique dite de « *speckle masking* » possède certaines similitudes avec la technique utilisant les triples corrélations. Cette technique consiste tout d'abord à créer un masque, en référence à la technique de *speckle holography* que nous ne discuterons pas ici, en effectuant le produit de l'interférogramme avec une version décalée, puis à intercorrélérer ce masque avec l'interférogramme original. Notons I_{sm} l'image résultant de ces deux opérations :

$$I_{\text{sm}}(\mathbf{x}_2) = \int [I(\mathbf{x})I(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1)]I(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2)d\mathbf{x}.$$

Sa transformée de FOURIER est quant à elle

$$I_{\text{sm}}(\mathbf{f}) = \iint [I(\mathbf{x})I(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1)]I(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \exp(j2\pi \mathbf{f}\mathbf{x}_2)d\mathbf{x}d\mathbf{x}_2,$$

ce qui s'écrit aussi simplement

$$I_{\text{sm}}(\mathbf{f}) = I(-\mathbf{f}) [I(\mathbf{f}) * I(\mathbf{f})] \exp j2\pi \mathbf{f}\mathbf{x}_1.$$

Dans le domaine de FOURIER, en explicitant le produit de convolution, cette relation s'écrit encore

$$I_{\text{sm}}(\mathbf{f}) = \exp j2\pi \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \int I(-\mathbf{f})I(\mathbf{f} - \nu)I(\nu)d\nu,$$

ce que l'on identifie sans difficulté à

$$I_{\text{sm}}(\mathbf{f}) = \exp j2\pi \mathbf{f} \mathbf{x}_1 \int B_I(-\mathbf{f}, \boldsymbol{\nu}) d\boldsymbol{\nu}.$$

Le speckle masking conduit ainsi à une quantité qui est une intégrale de la triple corrélation. Dans la mesure où nous avons vérifié que le fait de moyenniser une triple corrélation est d'une part un procédé constructif, et d'autre part élimine l'effet des turbulences atmosphériques par clôture de phase, le *speckle masking* présente aussi ces deux garanties.

Malheureusement, il n'existe pas de solution exacte pour revenir de ces données à une image de l'objet débarrassée des effets de la turbulence. Les auteurs (WEIGELT 1977, LOHMANN *et al.* 1983) présentent une méthode « géométrique » pour des objets simples et limités tels qu'une étoile double. Pour ce type d'objet simple, le masque obtenu pour un choix judicieux du décalage (mesuré préalablement à l'aide d'une reconstruction par interférométrie de *speckle*) est approximativement la réponse impulsionnelle instantanée. L'autocorrélation de l'interférogramme avec la réponse impulsionnelle conduit alors à (dans le domaine fréquentiel)

$$\langle I_{\text{sm}}(\mathbf{f}) \rangle = O(\mathbf{f}) \langle |T(\mathbf{f})|^2 \rangle,$$

et on peut facilement identifier l'objet.

Pour des objets plus compliqués, par exemple des objets assez étendus pour interdire l'emploi de la technique de *speckle masking*, LOHMANN et WIRNITZER (LOHMANN & WIRNITZER 1984) préconisent alors de considérer le retard comme une variable du problème, et aboutissent alors à une technique de reconstruction à partir de données bispectrales.

3 Cumulants et polyspectres

En traitement du signal et en analyse de données, les caractéristiques des données, ou l'état de connaissance sur ces données, sont entièrement décrites par des lois ou des densités de probabilité. Cependant, plutôt que de manipuler des lois, les traitements se focalisent souvent sur une caractérisation particulière et partielle utilisant (uniquement) les statistiques d'ordre deux. Trois raisons militent pour ce choix : d'une part la relative facilité d'emploi des statistiques d'ordre deux, qui bénéficient d'une interprétation agréable en terme d'espace de HILBERT, et d'autre part les significations physiques claires et familières des quantités manipulées (puissance, énergie, corrélation) ; enfin, cette caractérisation au second ordre est complète si les lois de probabilité sont normales. La caractérisation à l'ordre deux a été tellement répandue que la description en terme de loi de probabilité s'est estompée. Afin de pallier certaines insuffisances de cette description partielle, l'utilisation d'une caractérisation à un ordre plus élevé a connu un regain d'intérêt important en traitement du signal à partir des années 85-86, voir par exemple les synthèses (NIKIAS & RAGHUVEER 1987, MENDEL 1991).

Nous insistons sur le terme de « regain d'intérêt » puisque la plupart des outils conceptuels et des applications potentielles ont en fait été décrites bien auparavant, comme par exemple dans (BARTLETT 1955, ROSENBLATT 1962, AKAIKE 1966, BRILLINGER 1965, BLANC-LAPIERRE & FORTET 1953), et d'autre part parce que nombre de techniques utilisant une caractérisation d'ordre supérieur (à deux) avaient été développées pour des applications spécifiques, et notamment en optique (SATO & SASAKI 1977, SATO *et al.* 1978, HASSELMANN *et al.* 1962). Dans les paragraphes suivants, nous définissons les cumulants et polyspectres, donnons leurs propriétés principales, puis présentons les points auxquels nous nous sommes attachés : d'une part les problèmes d'estimation des cumulants et polyspectres et d'autre part les techniques d'identification myope.

3.1 Généralités

3.1.1 Motivations

La principale motivation pour l'utilisation de quantités statistiques d'ordre supérieur à deux est le fait qu'elles permettent d'accéder à une information de phase (exactement comme nous l'avons signalé à propos des triples corrélations) alors que cette information est perdue avec une analyse au second ordre. En 1982, LIU et ROSENBLATT (LIU & ROSENBLATT 1982) ont montré, dans un article fondateur, qu'il est possible d'identifier en module et en phase (à un facteur complexe près) la fonction de transfert d'un système à partir de l'observation de sa sortie, pourvu que l'entrée de ce système soit non gaussienne. Bien que leur résultat soit purement théorique (voir aussi le remarquable (BRÉMAUD 1993) pour la démonstration), ce résultat a motivé la recherche de méthode(s) visant à identifier la phase de systèmes à l'aide de statistiques d'ordre supérieur.

Une autre motivation est l'insensibilité des statistiques d'ordre supérieur aux processus gaussiens. Cette propriété est exploitée, assez cavalièrement à notre avis, de la façon suivante : l'entrée d'un système étant évidemment non gaussienne, le bruit additif évidemment gaussien, les statistiques d'ordre supérieur éliminent automatiquement tout bruit d'observation. Citons par exemple M. J. RIEZNMAN, éditeur à IEEE, dans son introduction à (MENDEL 1991) : « *Since many real-world signal processes are non Gaussian, and measurement noise can often be realistically described as colored Gaussian process, the value of higher order statistics in many applications is apparent.* » Cette motivation, qui néglige tous les systèmes où l'entrée est de façon réaliste décrite comme gaussienne, ainsi que les bruits d'observation non gaussiens (bruit Poissonien, χ^2 , ...) est à l'origine d'un très grand nombre de publications où les méthodes d'ordre deux sont simplement mises à jour par la substitution des corrélations par des statistiques d'ordre supérieur, sans plus d'esprit novateur.

Enfin, dans les situations où le système étudié est non linéaire, les statistiques d'ordre supérieur apparaissent naturellement et sont utilisées depuis VOLTERRA.

3.1.2 Définitions et propriétés

L'idée la plus naturelle pour aller au-delà des statistiques du second ordre est simplement d'utiliser des moments d'ordre supérieur, du type

$$m_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbb{E} \{ X_1^{\nu_1} \dots X_k^{\nu_k} \},$$

où $\mathbf{X} = [X_1 \dots X_k]^t$ est un vecteur aléatoire réel,¹ $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \dots \nu_k]^t$ un vecteur d'exposants. On utilisera également dans ce qui suit la notation « \mathbf{X}^ν » pour $X_1^{\nu_1} \dots X_k^{\nu_k}$. Le moment correspondant est le moment d'ordre $\boldsymbol{\nu}$ de \mathbf{X} . Cependant, ces moments ne possèdent pas de propriété intéressante, et en particulier la propriété d'additivité

$$m_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\nu}) = m_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\nu}) + m_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\nu}),$$

qui est souhaitable lorsque \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont deux vecteurs indépendants. Par contre, les *cumulants*, appelés aussi semi-invariants en statistique, possèdent cette propriété d'additivité. De la même façon qu'on peut définir les moments comme les coefficients du développement de TAYLOR de la première fonction caractéristique, les cumulants $c_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\nu})$ sont les coefficients du développement

1. Pour des variables complexes, plusieurs définitions des moments d'ordre supérieur et des cumulants sont possibles. Pour notre part, et sauf indication contraire, les signaux considérés seront toujours à valeurs réelles.

de la seconde fonction caractéristique :

$$\phi(\mathbf{t}) = \log E \left\{ \exp(j\mathbf{t}^t \mathbf{X}) \right\} = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_k} \frac{j^{\nu_1} \dots j^{\nu_k}}{\nu_1! \dots \nu_k!} c_{\mathbf{X}}^{(\nu)} t_1^{\nu_1} \dots t_k^{\nu_k},$$

ou encore, en notation compacte,

$$\phi(\mathbf{t}) = \sum_{\nu} \frac{j^{\nu}}{\nu!} c_{\mathbf{X}}^{(\nu)} t^{\nu}.$$

Les moments et cumulants découlant des fonctions caractéristiques, ils sont liés par des relations exactes :

$$\begin{cases} m_{\mathbf{X}}^{(\nu)} = \sum_{\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(q)} = \nu} \frac{1}{q!} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \dots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^q c_{\mathbf{X}}^{(\lambda^{(p)})} \\ c_{\mathbf{X}}^{(\nu)} = \sum_{\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(q)} = \nu} (-1)^{q-1} \frac{(q-1)! \nu!}{\lambda^{(1)}! \dots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^q m_{\mathbf{X}}^{(\lambda^{(p)})} \end{cases}$$

On note encore le cumulant d'ordre $(1, \dots, 1)$ $\text{cum} \{X_1, \dots, X_k\} = c_{\mathbf{X}}^{(1, \dots, 1)}$. Pour ce cumulant, les relations sont plus simples, et en particulier

$$\begin{cases} E \{X_1, \dots, X_k\} = \sum \text{cum} \{U_1\} \dots \text{cum} \{U_p\}, \\ \text{cum} \{X_1, \dots, X_k\} = \sum (-1)^{p-1} (p-1)! E \left\{ \prod_{j \in U_1} X_j \right\} \dots E \left\{ \prod_{j \in U_p} X_j \right\} \end{cases}$$

où les sommes sont étendues à toutes les partitions U_i de X_1, \dots, X_k . À titre d'illustration, considérons le calcul de quelques cumulants en fonction des moments de variables centrées :

$$\begin{cases} \text{cum} \{X_1, X_2\} = E \{X_1 X_2\}, \\ \text{cum} \{X_1, X_2, X_3\} = E \{X_1 X_2 X_3\}, \\ \text{cum} \{X_1, X_2, X_3, X_4\} = E \{X_1 X_2 X_3 X_4\} - \\ E \{X_1 X_2\} E \{X_3 X_4\} - E \{X_1 X_3\} E \{X_2 X_4\} - E \{X_2 X_3\} E \{X_1 X_4\}. \end{cases}$$

Lorsque les moyennes ne sont pas nulles, les cumulants précédents font apparaître des moments d'ordre un, et en particulier, $\text{cum} \{X_1, X_2\} = E \{X_1 X_2\} - E \{X_1\} E \{X_2\}$. On peut remarquer que le cumulant d'ordre quatre est égal au moment d'ordre quatre moins l'expression de ce moment pour un vecteur gaussien. Cette situation, qui se généralise à tous les cumulants d'ordre supérieur à trois, n'est pas fortuite. En effet, si \mathbf{X} est un vecteur gaussien, de moyenne $m_{\mathbf{X}}$ et de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}}$, le développement de la seconde fonction caractéristique est

$$\phi(\mathbf{t}) = \log E \left\{ \exp(j\mathbf{t}^t \mathbf{X}) \right\} = j\mathbf{t}^t m_{\mathbf{X}} + \mathbf{t}^t \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}} \mathbf{t},$$

et tous les cumulants d'ordre supérieur à deux d'un processus gaussien sont ainsi nuls. Comme nous le remarquons plus haut, une autre définition des cumulants, mettant l'accent sur une interprétation comme mesure de divergence au caractère gaussien, est possible: *le cumulant d'ordre p est égal au moment d'ordre p du vecteur centré moins l'expression de ce moment pour un vecteur gaussien.*

On retiendra cinq propriétés essentielles des cumulants

- **Homogénéité** Pour tout vecteur réel de coefficients $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_k]^t$ et pour un vecteur aléatoire \mathbf{X} ,

$$\text{cum} \{a_1 X_1, \dots, a_k X_k\} = a_1 \dots a_k \text{cum} \{X_1, \dots, X_k\}.$$

- **Additivité** Si Y est une variable aléatoire quelconque

$$\text{cum}\{Y + X_1, \dots, X_k\} = \text{cum}\{Y, \dots, X_k\} + \text{cum}\{X_1, \dots, X_k\}.$$

- **Symétrie** Pour toute permutation $\{i_1, \dots, i_k\}$ des indices $\{1, \dots, k\}$,

$$\text{cum}\{X_1, \dots, X_k\} = \text{cum}\{X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\}.$$

- **Additivité et indépendance** Si \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont deux vecteurs aléatoires indépendants,

$$\text{cum}\{X_1 + Y_1, \dots, X_k + Y_k\} = \text{cum}\{X_1, \dots, X_k\} + \text{cum}\{Y_1, \dots, Y_k\};$$

ce qui signifie que les cumulants de sommes sont égaux à la somme des cumulants. Cette propriété, conjointement à la propriété d'homogénéité, est capitale pour l'étude des systèmes linéaires. Enfin, on a une propriété de partition

- **Partition** Si un sous-ensemble de variables parmi X_1, \dots, X_k est indépendant des autres variables, alors

$$\text{cum}\{X_1, \dots, X_k\} = 0.$$

3.1.3 Multicorrélations et polyspectres

Par analogie avec la fonction de corrélation, on définit les fonctions cumulantes des processus stationnaires par

$$c_X(n_1, \dots, n_k) = \text{cum}\{X(n), X(n + n_1), \dots, X(n + n_k)\}.$$

On note $c_X(\cdot)$, ou $c(\cdot)$ si on ne fait pas référence à un processus particulier, les fonctions cumulantes. On appelle aussi ces fonctions des *multicorrélations*; comme nous l'avons déjà annoncé, nous baptiserons la fonction cumulant d'ordre trois $c(n_1, n_2)$ bicorrélation, la fonction $c(n_1, n_2, n_3)$ tricorrélation, *etc.* Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous utiliserons dans la suite le terme de cumulant plutôt que de fonction cumulant. Les propriétés des fonctions cumulantes pour les processus aléatoires sont aisément déduites des propriétés des cumulants de vecteurs aléatoires. En particulier, les fonctions cumulantes d'ordre supérieur à deux d'un processus gaussien sont nulles. D'autre part, la propriété de symétrie entraîne de nombreuses symétries pour les fonctions cumulantes. En ce qui concerne la bicorrélation par exemple, il est facile de vérifier que cette quantité bivariée possède les symétries suivantes

$$\begin{aligned} c(n_1, n_2) &= c(n_2, n_1) = c(-n_2, n_1 - n_2) = \\ c(n_2 - n_1, -n_1) &= c(-n_1, n_2 - n_1) = c(n_1 - n_2, -n_2). \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Pourvu que le cumulant considéré soit absolument sommable, on définit le polyspectre d'ordre $k + 1$ comme la transformée de FOURIER k -dimensionnelle de la multicorrélation d'ordre $k + 1$:

$$C_X(\nu_1, \dots, \nu_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k} c_X(n_1, \dots, n_k) \exp\left(j2\pi \sum_{i=1}^k \nu_i n_i\right).$$

Le bispectre est ainsi la transformée de FOURIER bidimensionnelle de la bicorrélation, le trispectre la transformée de FOURIER tridimensionnelle de la tricorrélation, *etc.* Pour un bruit blanc d'ordre $k + 1$ au sens de (BONDON & PICINBONO 1991), c'est-à-dire une suite de variables aléatoires telle que

$$c_X(n_1, \dots, n_k) = \beta_k \delta(n_1) \dots \delta(n_k),$$

les polyspectres d'ordre inférieur ou égal à $k + 1$ valent simplement

$$C_X(\nu_1, \dots, \nu_k) = \beta_k.$$

Nous pouvons maintenant nous intéresser à la transformation des cumulants et polyspectres par filtrage linéaire. On considère la sortie $Y(n)$ d'un système linéaire de réponse impulsionnelle $h(n)$, soumis à une entrée $X(n)$ blanche aux ordres considérés :

$$Y(n) = \sum_j h(j)X(n-j).$$

Le cumulants de la sortie s'écrit

$$\begin{cases} c_Y(n_1, \dots, n_k) = \text{cum} \{Y(n), Y(n+n_1), \dots, Y(n+n_k)\} \\ = \text{cum} \left\{ \sum_j h(j)X(n-j), \dots, \sum_j h(j)X(n+n_k-j) \right\} \\ = \text{cum} \left\{ \sum_j h(n-j)X(j), \dots, \sum_j h(n+n_k-j)X(j) \right\}, \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

en utilisant alors successivement la propriété d'additivité dans le cas indépendant, l'hypothèse de blancheur de X et enfin la propriété d'homogénéité, il reste

$$\text{cum} \{Y(n), Y(n+n_1), \dots, Y(n+n_k)\} = \beta_k \sum_j h(j)h(j+n_1) \dots h(j+n_k). \quad (\text{III.6})$$

On obtient l'expression du polyspectre du processus filtré en prenant la transformée de FOURIER de l'expression précédente. En désignant par $H(\nu)$ le gain complexe, le polyspectre est

$$C_Y(\nu_1, \dots, \nu_k) = \beta_k H(\nu_1) \dots H(\nu_k) H^*(\nu_1 + \dots + \nu_k). \quad (\text{III.7})$$

Cette relation se généralise facilement au cas d'une entrée non blanche. Si on considère en effet la sortie $Z(n)$ d'un système linéaire de réponse impulsionnelle $g(n)$ et d'entrée $Y(n)$, le processus précédent, alors le polyspectre de sortie C_Z est donné par la même expression en substituant $H(\nu)G(\nu)$ à $H(\nu)$. On obtient alors une formule analogue à la « formule des interférences » à l'ordre deux :

$$C_Z(\nu_1, \dots, \nu_k) = G(\nu_1) \dots G(\nu_k) G^*(\nu_1 + \dots + \nu_k) C_Y(\nu_1, \dots, \nu_k). \quad (\text{III.8})$$

Nous avons signalé dans l'introduction de cette section consacrée aux cumulants et polyspectres que ceux-ci présentent l'intérêt de conserver une information de phase, alors que cette information est perdue avec l'emploi des statistiques d'ordre deux. Ceci apparaît clairement à l'aide de la relation précédente : à l'ordre deux, $C_Z(\nu) = |G(\nu)|^2 C_Y(\nu)$ et la phase du filtre est irrémédiablement perdue. Aux ordres plus élevés, la phase est conservée, au moins en partie, dans le polyspectre de sortie. Le problème qui consiste à reconstituer cette phase, ou plus globalement le gain complexe $G(\nu)$ est un problème de *factorisation* du polyspectre $C_Z(\nu_1, \dots, \nu_k)$ sous la forme (III.8). Ceci nécessite clairement de connaître $C_Y(\nu_1, \dots, \nu_k)$. On s'intéresse plus volontiers au problème de factorisation sous la forme (III.7). Avant de discuter de méthodes de factorisation, et préalablement des problèmes d'estimation des polyspectres et cumulants, nous pouvons dès à présent noter qu'une factorisation sous la forme (III.7) n'est pas unique. En effet, si l'on considère la fonction de transfert $H'(\nu) = H(\nu) \exp(j2\pi\tau\nu)$, qui correspond à un décalage de τ de la réponse impulsionnelle $h(n)$, on constate que le polyspectre est alors

$$\begin{aligned} C(\nu_1, \dots, \nu_k) &= \beta_k H'(\nu_1) \dots H'(\nu_k) H'^*(\nu_1 + \dots + \nu_k), \\ &= \beta_k H(\nu_1) \dots H(\nu_k) H^*(\nu_1 + \dots + \nu_k) \end{aligned}$$

est identique à l'expression (III.7). Il apparaît ainsi que *les polyspectres sont insensibles à une phase linéaire*, et par conséquent qu'une factorisation n'est possible qu'à une phase linéaire près. Dans le même ordre d'idée, si la réponse impulsionnelle est multipliée par une quantité a , cette quantité intervient par un facteur a^{k+1} dans le polyspectre. Sans connaissance du cumulants de l'entrée β_k , ce facteur sera absorbé en un facteur d'échelle β'_k dans la factorisation. On conclut de ces deux remarques qu'une fonction de transfert, ou de façon équivalente une réponse impulsionnelle, ne peut pas être identifiée, par des méthodes fondées sur les cumulants ou polyspectres de la sortie, à mieux qu'un facteur d'échelle et une phase linéaire près.

3.1.4 Estimation des polyspectres et multicorrélations

La première difficulté à laquelle on se trouve confronté avec l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur, est le problème de l'estimation des cumulants et polyspectres à partir d'un ensemble fini de mesures. En ce qui concerne les cumulants, on utilise des estimateurs empiriques à la place des espérances dans la définition des moments, et on utilise les formules de passage des moments aux cumulants. On a ainsi

$$\hat{c}_X(n_1, n_2) = \langle x(n)x(n+n_1)x(n+n_2) \rangle,$$

pour la bicorrélation, et

$$\begin{aligned} \hat{c}_X(n_1, n_2, n_3) &= \langle x(n)x(n+n_1)x(n+n_2)x(n+n_3) \rangle \\ &\quad - \langle x(n)x(n+n_1) \rangle \langle x(n+n_2)x(n+n_3) \rangle \\ &\quad - \langle x(n)x(n+n_2) \rangle \langle x(n+n_1)x(n+n_3) \rangle \\ &\quad - \langle x(n)x(n+n_3) \rangle \langle x(n+n_1)x(n+n_2) \rangle, \end{aligned}$$

pour la tricorrélation. Cette dernière relation suffit à rendre compte de la difficulté de la tâche dès que l'ordre devient grand. À l'ordre trois, où le cumulants est identique au moment (dans le cas de variables centrées), on peut utiliser des méthodes analogues aux méthodes d'estimation des fonctions de corrélation. La complexité calculatoire, très élevée, peut être réduite en utilisant les relations de symétrie, par exemple les relations (III.4) pour la bicorrélation. De la même façon que l'on peut estimer une matrice de corrélation comme une somme de dyades,

$$\mathbf{\Gamma} \propto \sum_n \mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n)^\dagger,$$

nous définissons et utilisons un tenseur de bicorrélation (une quantité à trois indices) comme une somme de *triades*. Cette quantité peut être imaginée comme un « cube » d'éléments générique $\sum_n x(n+i)x(n+j)x(n+k)$, possédant, dans le cas stationnaire, un caractère de TOEPLITZ.

Il est souvent plus simple et efficace de travailler dans le domaine de FOURIER et d'estimer les polyspectres plutôt que les cumulants, quitte à revenir aux multicorrélations par transformée de FOURIER inverse. Les polyspectres peuvent être calculés à partir de la transformée de FOURIER $X(\nu)$ des données, par une relation analogue au périodogramme :

$$\hat{C}_X(\nu_1, \dots, \nu_k) = X(\nu_1) \dots X(\nu_k) X^*(\nu_1 + \dots + \nu_k). \quad (\text{III.9})$$

Comme pour le périodogramme, on utilise des versions moyennées ou lissées de cet estimateur « instantané » afin de réduire la variance du résultat.

Il faut ensuite collecter les différentes valeurs estimées du polyspectre en un tableau $\hat{C}_X(\nu_1, \dots, \nu_k)$, en étant attentif aux problèmes de dimensions (liés au décalage introduit par le terme $X^*(\nu_1 + \dots + \nu_k)$) et de respect des symétries des polyspectres. La structure particulière

de la « *matrice bispectrale* » (qui s'étend sans difficulté aux « matrices polyspectrales » d'ordre plus élevé) que nous avons mise en évidence (voir le paragraphe 3.3.3, l'annexe B et (BERCHER 1993)) permet de prendre en compte très aisément ces contraintes et fournit de ce fait une méthode élégante de calcul de (III.9).

Qu'il s'agisse des cumulants ou des polyspectres, l'estimation de ces quantités souffre d'une variance très importante, et requiert pour obtenir des résultats comparables à ceux du second ordre, un volume de données bien plus important. L'évaluation de la qualité des estimateurs des cumulants est difficile ; par contre la statistique de (III.9) est connue depuis (VAN NESS 1966) : les polyspectres estimés sont asymptotiquement (avec le nombre de données et le degré de moyennage ou de lissage) gaussiens complexes, non biaisés et les variances des parties réelle et imaginaire, qui sont indépendantes, valent

$$V(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{L} \Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_1 + \nu_2),$$

où L représente le nombre de termes dans le calcul d'une moyenne empirique de (III.9) ou la largeur équivalente de lissage, et Γ la densité spectrale. Notons que cette variance est proportionnelle au carré du module du bispectre (III.7), en tenant compte de $\Gamma(\nu) = \beta_1 H(\nu) H(-\nu)$ (lorsque le bruit d'observation est nul).

3.2 Une procédure de lissage bispectral

En se servant des caractéristiques statistiques rappelées ci-dessus, il est possible d'adapter la procédure de lissage « optimal » proposée par LUMEAU et CLERGEOT en (LUMEAU & CLERGEOT 1990) pour l'estimation des densités spectrales et interspectrales de puissance. Nous avons également utilisé cette procédure en (LUMEAU & BERCHER 1991) pour déterminer l'ordre d'un modèle AR, et en (LUMEAU *et al.* 1992) pour la détermination d'un seuil de troncature d'une décomposition sur une base d'ondelettes.

3.2.1 Procédure générale

La procédure de lissage optimal utilisée par LUMEAU *et al.* repose sur un résultat d'estimation linéaire en moyenne quadratique : la meilleure estimation, au sens de l'erreur moyenne quadratique minimale d'un signal $s(n)$ perturbé par un bruit blanc additif $b(n)$, est, si $x(n) = s(n) + b(n)$ est l'observation,

$$\hat{s}(n) = \frac{|s(n)|^2}{|s(n)|^2 + \sigma_b^2} x(n), \quad (\text{III.10})$$

où σ_b^2 est la variance du bruit. Dans la méthode de lissage optimal, LUMEAU et CLERGEOT proposent de concentrer le signal sur un nombre faible de composantes en effectuant un changement de base approprié par transformation orthogonale. Lorsque la pondération (III.10) est par exemple appliquée après un changement de base par transformée de FOURIER, l'opération correspond à un lissage dans le domaine direct. Bien entendu, la fenêtre de pondération

$$f(n) = \frac{|s(n)|^2}{|s(n)|^2 + \sigma_b^2} \quad (\text{III.11})$$

apparaissant dans (III.10) est inapplicable telle quelle, puisque $s(n)$ (et σ_b^2) sont inconnus. On peut cependant approcher cette fenêtre en tenant compte de

- pour $|s(n)|^2 \gg \sigma_b^2$, alors $f(n) = 1$,
- pour $|s(n)|^2 = \sigma_b^2$, alors $f(n) = 1/2$,
- pour $|s(n)|^2 \ll \sigma_b^2$, alors $f(n) = 0$.

La construction de la fenêtre de pondération est fondée sur le test d'hypothèse $|s(n)|^2 \underset{>}{\underset{<}{\approx}} \sigma_b^2$ et une procédure de détection-estimation (voir les références (LUMEAU & CLERGEOT 1990, LUMEAU & BERCHER 1991, LUMEAU *et al.* 1992) pour plus de détails).

3.2.2 Application au domaine bispectral

Pour adapter la procédure précédente au domaine bispectral (ou polyspectral), il nous faut tout d'abord transposer le problème d'estimation du bispectre en un problème d'estimation d'un signal perturbé par un bruit blanc additif. On utilise pour ce faire « l'index de bicohérence »

$$\hat{C}_X^{(N)}(\nu_1, \nu_2) = \frac{\hat{C}_X(\nu_1, \nu_2)}{\sqrt{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}}, \quad (\text{III.12})$$

qui mêle des quantités d'ordre deux et d'ordre trois. Rappelons que la variance du bispectre est proportionnelle à $\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_1 + \nu_2)$; dans ces conditions, on peut écrire

$$\hat{C}_X^{(N)}(\nu_1, \nu_2) = C_X^{(N)}(\nu_1, \nu_2) + \varepsilon(\nu_1, \nu_2),$$

où $\varepsilon(\nu_1, \nu_2)$ est un bruit blanc bidimensionnel de variance connue. En utilisant cette transformation, on peut ainsi se ramener au modèle à bruit blanc additif nécessaire pour utiliser (III.10). Afin de « concentrer » les composantes signal, on effectue une transformée de FOURIER, pour obtenir une quantité $\hat{C}_X^{(N)}(t_1, t_2)$ homogène à une bicorrélation. Il reste alors à construire la fenêtre de pondération, c'est-à-dire à déterminer les zones pour lesquelles l'énergie des composantes signal est significativement supérieure à σ_b^2 . On peut profiter des symétries des bicorrélations pour réduire la charge calculatoire nécessitée par cette recherche, qui devrait *a priori* être menée dans tout le plan. En effet, on peut vérifier que les fonctions bivariées

$$f(m, n) = d(m)d(n)d(n - m),$$

définies à partir d'un noyau monodimensionnel $d(n)$ pair et tel que $d(0) = 1$, vérifient toutes les propriétés de symétrie des bicorrélations. En se plaçant en m ou $n = 0$, on a alors

$$f(m, 0) = d(m)^2 d(0),$$

qui permet de déterminer uniquement (la fenêtre de pondération est positive par définition (III.11)) la fenêtre à partir d'une seule ligne ou colonne de $\hat{C}_X^{(N)}(t_1, t_2)$.

Il est ainsi possible d'adapter la procédure de lissage optimal de LUMEAU *et al.* au domaine des polyspectres. Cette procédure permet de déterminer *automatiquement* une fenêtre de pondération (dans le domaine des multicorrélations), ou de façon équivalente une fenêtre de lissage (dans le domaine des polyspectres). Elle nécessite cependant de déterminer au préalable la densité spectrale de puissance $\Gamma(\nu)$ du processus, cette densité étant utilisée pour définir la bicohérence. Cependant, cette complication est en partie compensée par le fait de pouvoir déterminer la fenêtre de pondération à partir d'une recherche monodimensionnelle. Les résultats de simulation obtenus sont très intéressants.

3.2.3 Illustration

À titre d'illustration, nous pouvons proposer la situation suivante. Les données sont issues d'un filtre (à phase non minimale) attaqué par un bruit blanc à l'ordre trois. Le bispectre de la sortie de ce filtre est idéalement

$$C(\nu_1, \nu_2) = \beta_2 H(\nu_1) H(\nu_2) H^*(\nu_1 + \nu_2).$$

Sa phase est rapportée sur la figure III.1. Cependant, on ne dispose que de 256 échantillons de la sortie du filtre. Ces échantillons sont utilisés pour calculer 8 bispectres sur 32 points chacun. Ces huit bispectres sont ensuite moyennés, et normalisés selon (III.12). La phase de ce bispectre normalisé est représentée sur la figure III.2 et peut être comparée à la phase idéale de la figure III.1. Nous mettons ensuite en œuvre la procédure décrite précédemment : une fenêtre de pondération est calculée sur la transformée de FOURIER inverse de la bicohérence, après évaluation de la variance. Après application de cette pondération, un bispectre lissé est obtenu après une nouvelle transformée de FOURIER. La phase résultante, qui représente clairement une amélioration vis-à-vis du moyennage simple, est représentée sur la figure III.3.

La mise en œuvre de cette procédure est relativement simple et peu coûteuse par rapport à la complexité calculatoire liée à la simple évaluation de (III.9), pour un gain qui peut être appréciable. La méthode est cependant limitée par la connaissance, ou l'estimation préalable, de la densité spectrale du processus.

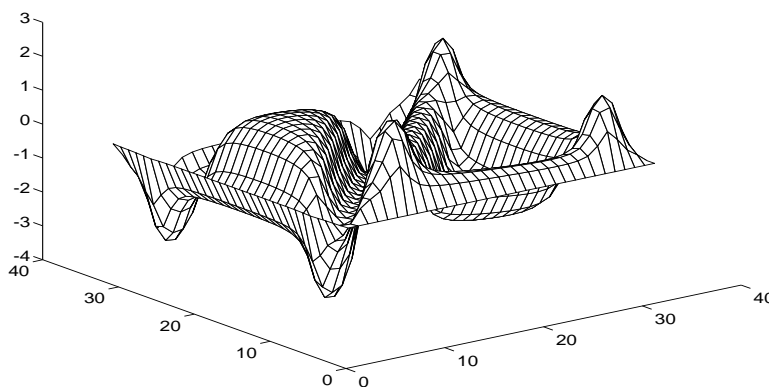


FIG. III.1 - Phase du bispectre.

3.3 Applications à l'identification

Nous avons souligné à plusieurs reprises que l'un des intérêts majeurs des statistiques d'ordre supérieur est de conserver une information de phase. Le problème qui consiste à restituer la phase du système à partir de l'information capturée dans la phase du bispectre est un problème d'identification que nous allons maintenant décrire. Nous présentons le problème sous la forme de l'identification de la réponse d'un système linéaire, mais il convient de garder à l'esprit que

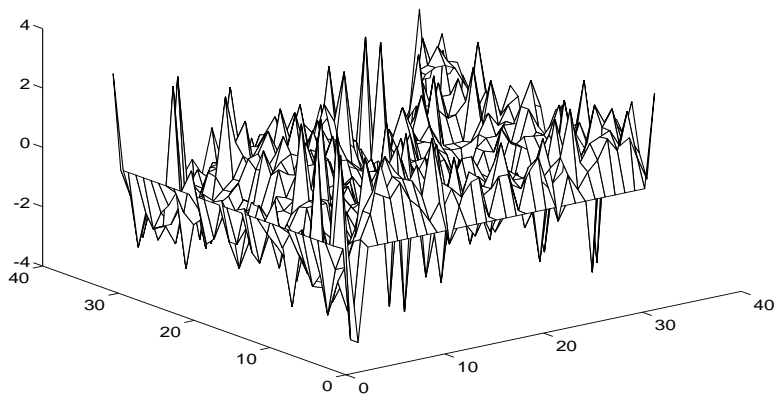


FIG. III.2 - *Phase du bispectre estimé par moyennage de huit réalisations.*

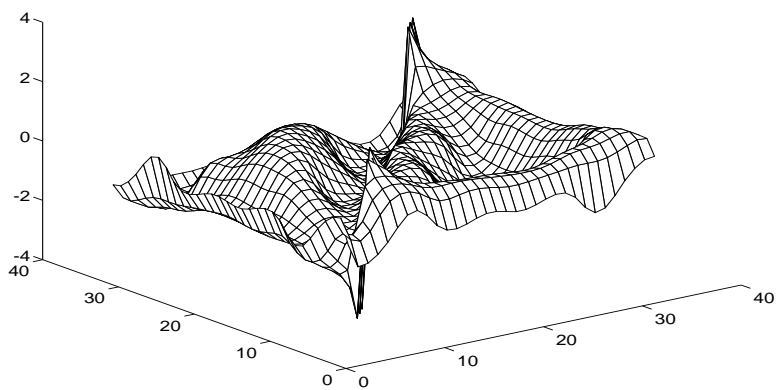


FIG. III.3 - *Phase estimée par lissage automatique.*

l'opération de convolution étant commutative, ce problème est équivalent à l'identification de l'entrée, si le système est connu.

Il est hors de question de faire ici une synthèse exhaustive des très nombreuses méthodes qui ont été proposées dans ce cadre, ni même de recenser ces méthodes. Nous allons simplement continuer à décrire quelques points qui nous ont paru à la fois particulièrement intéressants et méconnus.

3.3.1 Méthodes paramétriques

Une approche très populaire en traitement du signal est l'utilisation d'un modèle paramétrique du filtre générateur $H(\nu)$. Le gain complexe est modélisé par une fraction rationnelle en z

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont les transformées en z (la restriction de la transformée en z sur le cercle unité, $|z| = 1$, est la transformée de FOURIER) de deux séquences de coefficients, $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$, qui lient l'entrée $x(n)$ et la sortie $y(n)$ du filtre selon l'équation aux différences

$$\sum_{i=-p_1}^{p_2} a_i y(n-i) = \sum_{i=-q_1}^{q_2} b_i x(n-i). \quad (\text{III.13})$$

On s'intéresse habituellement aux systèmes à *phase minimale*, c'est-à-dire aux systèmes qui sont à la fois stables et causaux, et dont l'inverse est également stable et causal. Cette condition impose que les racines des deux polynômes $A(z)$ et $B(z)$ soient de module inférieur à l'unité, et que p_1 et q_1 soient positifs ou nuls. Cette condition de phase minimale permet d'obtenir une identification unique de la fonction de transfert $H(z)$ avec des données du second ordre. En effet, la densité spectrale en z s'écrit

$$C(z) = \beta_1 |H(z)|^2 = H(z)H^*(1/z^*),$$

et toute permutation des racines z_0 de $A(z)$ et $B(z)$ avec leur inverse conjugué $1/z_0^*$ fournit la même densité en z . Si p et q sont les degrés des polynômes A et B , il y a alors 2^{p+q} possibilités pour le gain $H(z)$. La condition de phase minimale sélectionne parmi ces solutions la solution où toutes les racines sont de module inférieur à un.

Lorsque l'on n'a pas de raison de supposer le système à phase minimale (c'est-à-dire dans la majorité des cas), les techniques d'ordre deux ne permettent pas de choisir parmi les 2^{p+q} solutions. Au contraire, cette ambiguïté est levée par des techniques d'ordre supérieur. À notre connaissance, aucune méthode exacte d'identification des paramètres correspondant au modèle général (III.13) n'a été présentée avant (GIANNAKIS & SWAMI 1990). Des méthodes approchées, estimant séparément et successivement les paramètres des parties causales et anticausales de (III.13) sont décrites dans (NIKIAS & RAGHUVEER 1987). Signalons que les paramètres autorégressifs $\{a_i\}$ peuvent être obtenus en résolvant les équations

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p a_i c(\tau-i, k, 0, \dots, 0) = 0, \text{ pour } \tau > 0(q) \\ \sum_{i=1}^p a_i c(-\tau+i, k, 0, \dots, 0) = 0, \text{ pour } \tau < 0(q) \end{cases},$$

où τ et k sont arbitraires, pour respectivement un modèle causal et un modèle non-causal. On peut de la sorte obtenir une relation matricielle analogue à la classique équation normale utilisant les échantillons de la fonction de corrélation, mais où la matrice a perdu son caractère de TOEPLITZ. Cette idée remonte à (AKAIKE 1966).

Venons en à la méthode de GIANNAKIS et SWAMI (GIANNAKIS & SWAMI 1990). Considérons à nouveau la relation générale (III.13)

$$\sum_{i=-p_1}^{p_2} a_i y(n-i) = \sum_{i=-q_1}^{q_2} b_i x(n-i),$$

et multiplions terme à terme cette relation avec deux autres versions de cette relation, exprimées aux temps n' et n'' , et avec les indices i' et i'' :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-p_1}^{p_2} \sum_{i'=-p_1}^{p_2} \sum_{i''=-p_1}^{p_2} a_i a_{i'} a_{i''} y(n-i) y(n'-i') y(n''-i'') \\ &= \sum_{i=-q_1}^{q_2} \sum_{i'=-q_1}^{q_2} \sum_{i''=-q_1}^{q_2} b_i b_{i'} b_{i''} x(n-i) x(n-i') x(n-i''). \end{aligned}$$

En prenant alors l'espérance et en faisant les changements de variable adéquats, on fait apparaître une relation de récurrence entre les moments d'ordre trois

$$\sum_{u=-p}^p \sum_{v=-p}^p c_a(u, v) c_Y(n-u, m-v) = \beta_2 c_b(n, m), \quad (\text{III.14})$$

où l'on a supposé X blanc à l'ordre trois, et où c_a, c_b et c_Y sont respectivement les moments d'ordre trois des séquences a, b et Y , et où l'on a posé $p = p_1 + p_2$ et $q = q_1 + q_2$. Le terme c_a est par exemple défini par

$$c_a(u, v) = \sum_{k=0}^p a_k a_{k+u} a_{k+v}.$$

Notons que cette relation, valable pour des moments, s'étend à des ordres supérieurs, et qu'il n'est pas très difficile de vérifier qu'elle reste alors vraie pour une récurrence sur les cumulants. Il faut alors remarquer que $c_a(u, v)$ (resp. $c_b(n, m)$) n'est non nul que dans la région hexagonale $\{|u| < p, |v| < p, |u-v| < p\}$. Il est donc possible, en combinant un nombre suffisant d'équations de (III.14), de déterminer, par la résolution d'un système linéaire, les moments $c_a(u, v)$ et $c_b(n, m)$. Ces moments étant déterminés, il est facile de remonter aux paramètres en utilisant

$$\frac{a_i}{a_0} = \frac{c_a(p, i)}{c_a(p, 0)} = \frac{a_0 a_p a_i}{a_0 a_p a_0}. \quad (\text{III.15})$$

Cette dernière relation profite du domaine limité d'existence de c_a et est également utilisée pour identifier les coefficients de la réponse impulsionnelle de systèmes à réponse impulsionnelle finie. Notons que du fait des symétries des cumulants, certaines des relations issues de (III.14) sont redondantes. Il faut alors ne retenir qu'un sous-ensemble de ces équations ou résoudre un système linéaire surdéterminé.

Les simulations que nous avons réalisées nous ont montré que cette méthode fonctionne mais nécessite un nombre de données considérable, en particulier en raison de la sensibilité de (III.15). Il nous a semblé cependant que le résultat est suffisamment élégant pour être rapporté ici. Il confirme par ailleurs la possibilité d'identifier un système à l'aide de statistiques d'ordre supérieur à deux. Une voie qui nous paraît intéressante et que nous avons tentée sans résultat probant est l'extension de cette méthode aux problèmes à deux dimensions. Dans ce cadre, où la causalité n'a plus de signification, il pourrait permettre de mettre en évidence des modèles paramétriques intéressants.

Enfin, on peut remarquer que la démarche utilisée est également possible à l'ordre deux. On obtient alors une relation de récurrence

$$\sum_{u=-p}^p c_a(u) c_Y(n-u) = \beta_1 c_b(n),$$

qui permet d'identifier les autocorrélations c_a et c_b des coefficients $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$. Il n'est cependant pas possible de revenir aux coefficients eux-mêmes en raison de la symétrie des autocorrélations. Il est cependant remarquable d'obtenir ainsi une méthode qui permette de résoudre le problème de modélisation spectrale (la densité spectrale est la rapport des transformées de FOURIER de c_a et c_b) pour le modèle général (III.14) par la résolution d'un système linéaire très simple (la matrice mise en jeu, en tenant compte des symétries des corrélations, a pour éléments $\mathbf{C}(i, j) = c_Y(i - j) + c_Y(i + j)$).

3.3.2 Une méthode bicepstre de factorisation

Une autre approche intéressante, et très différente de la précédente, repose sur l'utilisation, et les propriétés, des *polycepstres*. Nous présentons ci-dessous une méthode issue des résultats de (TEKALP & ERDEM 1989) et nous en proposons une interprétation comme méthode d'estimation.

En référence au cepstre de puissance, défini comme la transformée de FOURIER inverse du logarithme de la densité spectrale, on définit les polycepstres comme la transformée de FOURIER inverse du logarithme des polyspectres. Notons $\tilde{c}(t_1, \dots, t_k)$ ces polycepstres. PAN et NIKIAS (PAN & NIKIAS 1988), ainsi que TEKALP et ERDEN (TEKALP & ERDEM 1989) ont montré, les premiers uniquement dans le cas monodimensionnel, que $\tilde{c}(t_1, \dots, t_k)$ n'est non nul que sur certaines droites. Le bicepstre, par exemple, n'est non nul que sur les axes $t_1 = t_2 = 0$ et sur la droite $t_1 = t_2$. Les valeurs trouvées sur ces axes ne sont autres que les échantillons du cepstre $\tilde{c}(t)$ défini comme la transformée de FOURIER inverse de $\log H(\nu)$. TEKALP et ERDEN ont montré qu'une factorisation du bispectre sous la forme

$$C(\nu_1, \nu_2) = \beta_2 H(\nu_1) H(\nu_2) H^*(\nu_1 + \nu_2).$$

n'est possible que si le bicepstre n'est non nul que sur les trois droites précisées ci-dessus. Cependant, les auteurs ne présentent que des résultats théoriques et n'étudient pas le cas des polyspectres « expérimentaux ».

Compte tenu des propriétés précédentes, la méthodologie de reconstruction est claire : après estimation d'un bispectre, il suffit de passer au bicepstre en prenant le logarithme puis la transformée de FOURIER inverse, de sélectionner un des axes, pour revenir au gain complexe par une nouvelle transformée de FOURIER suivie d'une exponentiation.

Cette méthode s'avère en outre intéressante pour son comportement vis-à-vis du bruit d'estimation, et quelques commentaires s'imposent pour comprendre cet effet bénéfique. Nous avons noté au paragraphe §3.1.4 que le bispectre estimé est asymptotiquement gaussien complexe, de variance proportionnelle à $\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_1 + \nu_2)$. En l'absence de bruit d'observation, cette variance est aussi le carré du module du bispectre moyen, de sorte que l'on peut écrire le bispectre estimé comme le produit

$$\hat{C}(\nu_1, \nu_2) = C(\nu_1, \nu_2) \varepsilon(\nu_1, \nu_2),$$

où $\varepsilon(\nu_1, \nu_2)$ est une variable aléatoire *blanche* gaussienne complexe. La prise du logarithme fournit alors la somme d'un terme provenant du bispectre « idéal » et d'un terme de bruit qui reste blanc. Après transformation de FOURIER, le premier terme donne des coefficients sur les seules droites où existe le bicepstre théorique alors que le second est réparti dans tout le plan bicepstre. Dans ces conditions, le simple fait de ne retenir que l'une des droites du bicepstre entraîne une amélioration considérable du rapport signal-à-bruit.

Les figures suivantes présentent un résultat de simulation. Le filtre considéré est un filtre à phase mixte. Vingt réalisations de 32 points sont utilisées pour une première estimation du bispectre. On emploie ensuite la procédure décrite ci-dessus. La figure III.4 permet de comparer les phases exactes et estimées par cette procédure. La figure suivante compare la réponse impulsionnelle exacte du système à la réponse estimée.

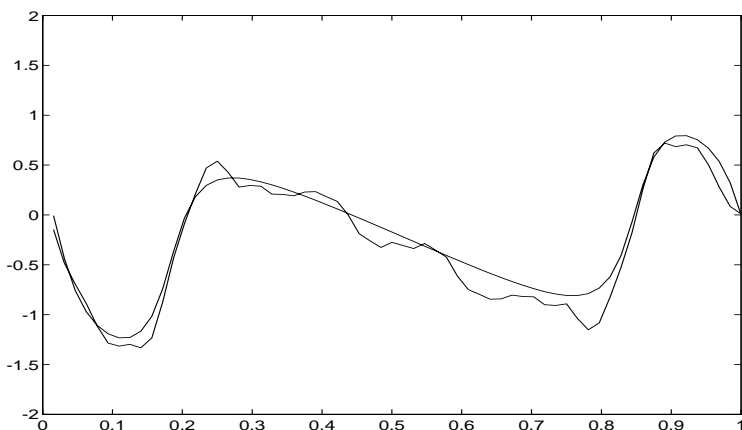


FIG. III.4 - *Comparaison des phases exactes et estimées par la méthode bicepstrale.*

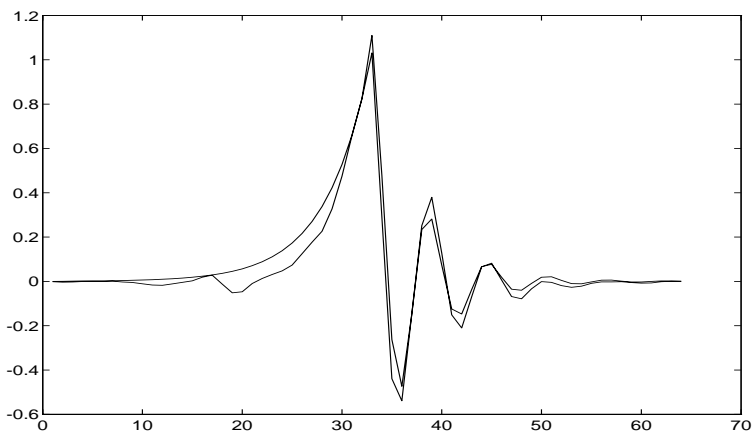


FIG. III.5 - *Comparaison des réponses impulsionnelles exactes et estimées par la méthode bicepstrale.*

Il faut noter qu'il est nécessaire en pratique de dérouler la phase du logarithme du bispectre avant d'en prendre la transformée de FOURIER inverse. Cette précaution étant notée, la procédure présente des résultats reproductibles, d'une qualité très satisfaisante.

3.3.3 Un algorithme de factorisation bispectrale

Nous avons longuement évoqué ci-dessus le concept de factorisation. Cette factorisation polyspectrale consiste à retrouver la réponse en fréquence $H(\nu)$, ce qui permet effectivement de factoriser les polyspectres selon (III.7). Nous proposons maintenant une solution qui transforme ce problème de factorisation spectrale en un problème de factorisation matricielle.

Un grand nombre de méthodes récursives de factorisation des polyspectres, et en particulier du bispectre, ont été proposées. Ces méthodes s'appuient sur la remarque suivante. Pour deux fréquences ν_1 et $-\nu_2$, on a

$$C(\nu_1, -\nu_2) = \beta_2 H(\nu_1) H(-\nu_2) H(-\nu_1 + \nu_2).$$

Si on suppose alors que $H(\nu)$ est connu pour toutes les fréquences $\nu \leq |B|$, on peut déterminer $H(\nu)$, pour $\nu = \nu_1$ par

$$H(\nu_1) = \frac{C(\nu_1, -\nu_2)}{H(-\nu_2) H(-\nu_1 + \nu_2)}, \forall \nu_2 \leq |B| \text{ et } |\nu_2 - \nu_1| \leq |B|. \quad (\text{III.16})$$

Bien entendu, la borne B évolue lorsqu'on détermine de nouvelles valeurs par (III.16). Il est ainsi possible de reconstruire $H(\nu)$ de manière récursive. Les différentes méthodes proposées se distinguent par la manière de prendre en compte la redondance des relations (III.16). En utilisant également ces relations, nous avons montré qu'il est possible de construire une matrice bispectrale (polyspectrale), qui exhibe une structure matricielle très particulière, et dont la factorisation livre les éléments de la réponse en fréquence. On réalise de la sorte la factorisation bispectrale.

On se place dans le cas discret, et on considère une suite ordonnée de K fréquences ν_i , pour $i = 0 \dots K$. On note $H(i)$ l'échantillon de la réponse en fréquence pour $\nu = \nu_i$. Si on définit maintenant comme « matrice bispectrale » la matrice \mathbf{B} composée des éléments du bispectre B par

$$\mathbf{B}(i, j) = B(\nu_i, -\nu_j) \text{ pour } i, j = 0 \dots K.$$

Le terme générique de cette matrice s'écrit alors

$$\mathbf{B}(i, j) = \beta_2 H(i) H(-j) H(j - i).$$

Dès lors, on vérifie facilement que cette matrice exhibe une structure très particulière : elle s'exprime comme le produit

$$\beta_2 \begin{bmatrix} H(0) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H(K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(0) & \dots & H(K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H(-K) & \dots & H(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(0) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H(-K) \end{bmatrix},$$

que l'on note

$$\mathbf{B} = \beta_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{T} \mathbf{D}_2, \quad (\text{III.17})$$

où \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 sont deux matrices diagonales et \mathbf{T} une matrice de TOEPLITZ non symétrique. Une factorisation de la matrice bispectrale sous cette forme Diagonale-TOEPLITZ-Diagonale (DTD) permet alors d'accéder à la réponse en fréquence $H(\nu)$. Cette structure DTD peut également être mise en évidence, et exploitée, pour les polyspectres d'ordre plus élevé, et dans le cas des signaux multidimensionnels. Comme nous l'avons évoqué au paragraphe 3.1.4, cette structure peut également être utilisée afin de simplifier le calcul des polyspectres (III.9).

Dans l'annexe B, qui reprend une communication présentée au colloque GRETSI en 1993, nous explicitons et discutons un algorithme de factorisation sous cette forme DTD, et donnons quelques exemples d'application. Après avoir donné le principe de la factorisation, nous discutons notamment des conséquences de l'initialisation de l'algorithme. Deux exemples de simulation sont présentés : l'identification de la phase du gain complexe d'un filtre, et l'identification d'une ondelette. Nous concluons par ce qui a constitué le point de départ de ce chapitre : l'application de la factorisation bispectrale comme technique de clôture de phase.

ANNEXE B

Un algorithme de factorisation bispectrale

14^e colloque GRETSI, Septembre 1993, Juan-les-Pins.

CHAPITRE IV

ENTROPIE

Information theory provides a constructive criterion for setting up probability distributions on the basis of partial knowledge and leads to a type of statistical inference which is called maximum-entropy estimate. It is the least biased possible on the given information...

E. T. JAYNES (JAYNES 1957).

L'EXEMPLE de la synthèse d'ouverture nous a servi de fil directeur dans les chapitres II et III. Il nous a également servi de fil directeur dans notre travail : l'analyse du problème et ses liens avec le traitement d'antenne, puis l'étude des problèmes d'analyse polyspectrale en liaison avec les techniques de clôture de phase ont constitué le début de notre travail. La résolution proprement dite des problèmes inverses généraux que nous avons présentés au chapitre I fait l'objet de la seconde partie de notre travail et de ce document.

Dans la présentation faite au chapitre I, nous avons brièvement présenté des méthodes « déterministes » utilisées pour la résolution des problèmes inverses. Il est aussi possible d'utiliser des outils probabilistes en vue de cette résolution. L'article présenté en annexe C, « *Probabilistic issues in Fourier synthesis* » présente l'approche Bayésienne et certaines méthodes fondées sur l'utilisation de l'entropie. En particulier, cet article présente une méthode intitulée « méthode du maximum d'entropie sur la moyenne », proposée en 1985 par J. NAVAZA. Cette méthode a été étudiée par G. LE BESNERAIS lors de sa thèse de doctorat (LE BESNERAIS 1993) et ce travail constitue le prolongement des travaux entrepris alors. L'article que nous proposons en annexe C — rapporté à la fin du manuscrit — nous permet de ne pas présenter l'approche Bayésienne et de nous concentrer sur une présentation générale de l'entropie. L'objet de cette présentation est en effet de rendre plus naturelle la notion d'entropie, et de préciser beaucoup de notions qui ne sont pas familières à un lecteur issu de la communauté du traitement du signal ou des sciences de l'ingénieur, et de faciliter la présentation des critères de nature entropique que nous développerons au chapitre V. En première lecture, le lecteur pourra éviter la seconde partie de l'article constituant l'annexe C, à laquelle nous nous référerons par contre au cours du chapitre suivant.

Notre présentation de l'entropie débutera par des notions de théorie de l'information conduisant à définir l'entropie comme une mesure d'information. Nous étudierons ensuite les propriétés des N -échantillons et des distributions empiriques formées à partir de ces N -échantillons. Le

théorème de SANOV nous servira alors d'argument à l'utilisation d'un principe de maximum d'entropie, ou de minimum d'information de KULLBACK-LEIBLER pour la sélection de distributions de probabilité. Nous présenterons ensuite le modèle de BOLTZMANN utilisé en physique. La transition vers le chapitre suivant, c'est-à-dire la présentation de critères de nature entropique pour la résolution des problèmes inverses, sera facilitée par la présentation de deux exemples de résolution de problèmes inverses à l'aide de techniques fondées sur l'entropie : la méthode du « maximum d'entropie » de GULL et DANIELL, et la méthode de SHORE en analyse spectrale.

1 Quelques notes historiques

Pour débiter ce chapitre, nous tenons à situer quelques noms et dates dans l'utilisation de l'entropie, telles qu'elles nous sont apparues au fil de nos lectures. Le concept d'entropie est d'abord apparu en thermodynamique, où il a été utilisé pour formuler la seconde loi de la thermodynamique. Le terme « entropie » est du à CLAUSIUS (1865) et est construit à partir du mot transformation, retour ($\tau\rho\sigma\pi\eta$) et du préfixe « en » choisi pour obtenir une ressemblance avec le mot « énergie ». Plus tard, BOLTZMANN relie l'entropie définie comme une variable d'état en thermodynamique, c'est-à-dire une description macroscopique de l'état d'un système, à une description microscopique de ce même système. Il définit ainsi l'entropie comme le logarithme de la multiplicité

$$S = -k \log(W),$$

où k est la constante de BOLTZMANN.¹ On peut presque considérer BOLTZMANN comme fondateur de la théorie de l'information dans la mesure où il avait déjà perçu l'entropie comme une mesure d'information (ou plus exactement de *désordre*). En 1928, HARTLEY (HARTLEY 1928) introduit comme mesure d'information le logarithme de la taille de l'alphabet. Indépendamment, SHANNON (SHANNON 1948) et WIENER (WIENER 1948), guidés par le résultat de BOLTZMANN établissent la formule de l'entropie et de l'information mutuelle. L'entropie croisée est définie par KULLBACK et LEIBLER en 1954 (KULLBACK 1954, 1959). Cette mesure connue sous de nombreuses appellations (entropie croisée, entropie relative, information de KULLBACK ou information de KULLBACK-LEIBLER, divergence de KULLBACK) a été ensuite étudiée par de nombreux auteurs, et en particulier par CSISZÁR (CSISZÁR, 1975, 1984, 1985, 1991). Le principe de minimisation de l'entropie relative pour sélectionner une distribution de probabilité est dû à KULLBACK (KULLBACK 1959). Comme le remarque KULLBACK (KULLBACK 1959, page 37), il est lié au principe de maximum d'entropie de JAYNES proposé en (JAYNES 1957) (voir le paragraphe 3). Notons enfin, que dans son article original, SHANNON (SHANNON 1948, pages 646–650) propose de maximiser le débit d'un canal de transmission sous une contrainte de qualité en utilisant comme définition de débit l'information mutuelle entrée-sortie du canal. Il est alors très proche de la formulation du principe de minimisation de l'entropie croisée de KULLBACK.

2 Entropie et théorie de l'information

La théorie mathématique de l'information de (SHANNON 1948) a été développée au départ comme une théorie de la communication. Le problème de référence est le suivant. On considère un ensemble E comportant N éléments, et on s'intéresse à un « message » de longueur k composé à l'aide de « l'alphabet » E . L'ensemble des mots de longueur k , que l'on note E_k est alors de cardinal N^k . En communications, chaque mot véhicule une certaine information, information

1. La relation fondamentale $S = -k \log(W)$ liant l'entropie et la multiplicité découverte par BOLTZMANN est d'ailleurs inscrite en épitaphe sur sa pierre tombale, à Vienne.

que l'on peut raisonnablement relier à la longueur du mot. On peut formaliser cet aspect en cherchant à quantifier l'information gagnée à la réception d'un mot de E_k (*i.e.* à k lettres). Cette information est notée $I(E_k)$. On pose en exigence les deux propriétés raisonnables que devrait vérifier cette mesure :

$$(a) \quad I(E_{k+l}) = I(E_k) + I(E_l),$$

$$(b) \quad I(E_k) \leq I(E_{k+1}).$$

Précisons la signification de l'exigence (a). On peut décomposer l'ensemble à N^{k+l} éléments E_{k+l} en N^k sous-ensembles de N^l éléments, et caractériser un élément de E_{k+l} en sélectionnant d'abord le sous-ensemble auquel il appartient, ce qui nécessite une information $I(E_k)$, puis un élément dans ce sous ensemble, ce qui nécessite encore une information $I(E_l)$. L'information totale est ainsi $I(E_k) + I(E_l)$. Cette propriété spécifie donc l'additivité de l'information. La seconde exigence indique quant à elle que plus l'ensemble est grand, plus l'information apportée par l'identification d'un de ses éléments est importante.

Ces deux propriétés suffisent à déterminer la forme prise par la mesure d'information :

$$I(E_k) = \alpha k \log(N),$$

où α est une constante positive arbitraire, qui fixe la base du logarithme. En communication, on s'intéresse à des séquences binaires, et on impose la condition de normalisation $I(E_2) = 1$, ce qui conduit à

$$I(E_k) = k \log_2(N).$$

Cette dernière relation est la formule de HARTLEY proposée dès 1928 (HARTLEY 1928).

Le raisonnement précédent s'appuie implicitement sur une hypothèse d'équiprobabilité des mots de même longueur, par exemple sur l'équiprobabilité des éléments de E_k . Intéressons nous maintenant à un ensemble de mots M_1, \dots, M_N de probabilités d'occurrence respectives P_1, \dots, P_N , avec $\sum_{i=1}^N P_i = 1$ (ces mots sont par exemple composés à l'aide de lettres de probabilités différentes). On peut de la même façon que précédemment chercher à définir l'information apportée par la connaissance d'un mot. Notons $I(M_i)$ l'information relative à un mot de probabilité P_i . Deux exigences suffisent encore à déterminer la forme de cette information :

$$a : \quad I(M_{kl}) = I(M_k) + I(M_l),$$

$$b : \quad I(M_i) \text{ est une fonction décroissante de la probabilité } P_i.$$

La première propriété illustre le fait que l'information apportée par un mot M_{kl} composé par deux mots M_k et M_l est égale à la somme des informations apportées par ses parties (avec une hypothèse d'indépendance de M_k et M_l). La seconde exigence signifie que l'information apportée, ou nécessaire pour caractériser le mot est d'autant plus importante que celui-ci est de probabilité faible. Ces deux exigences, auxquelles on ajoute une exigence de continuité, conduisent à

$$I(M_i) = -\alpha \log(P_i),$$

avec le même arbitraire concernant le choix de la constante α . Sauf indication contraire, nous choisirons dans la suite $\alpha = 1$ et utiliserons le logarithme népérien. Ce résultat n'est bien entendu pas en contradiction avec ce qui précède. Dans l'ensemble E_k , où tous les mots sont équiprobables avec la probabilité N^{-k} , on obtient $I(M) \propto k \log(N)$.

On s'intéresse également à l'information apportée en moyenne par ces mots $\{M_i\}$. En communication, cette information moyenne caractérisera par exemple une source émettrice. Cette information ne dépendant que de la loi P , on la notera $H(P)$ ou $H(P_1, \dots, P_N)$

$$H(P) = - \sum_{i=1}^N P_i \log(P_i). \quad (\text{IV.1})$$

Cette relation a été établie par SHANNON en 1948 (SHANNON 1948), et on appelle souvent $H(P)$ *entropie de SHANNON*. Notons encore que cette relation a également été établie par WIENER dans son ouvrage *Cybernetics* (WIENER 1948). Cette mesure d'information possède plusieurs propriétés naturelles que nous donnons ci-dessous :

- (i) elle est maximale lorsque les événements sont équiprobables, $P_i = 1/N$, et vaut $\log(N)$: c'est dans cette configuration que le système est le moins bien défini, et que les mots apportent en moyenne le plus d'information,
- (ii) elle est minimale lorsque l'un des événements est certain : le système est parfaitement connu et aucun apport d'information n'est possible,
- (iii) pour N événements équiprobables, l'entropie croît avec N ,
- (iv) l'entropie est une fonction positive, continue et symétrique de ses arguments,
- (v) l'information moyenne acquise en deux étapes s'ajoute :

$$H(P_1, \dots, P_N) = H(Q_1, Q_2) + Q_1 H\left(\frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_M}{Q_1}\right) + Q_2 H\left(\frac{P_{M+1}}{Q_2}, \dots, \frac{P_N}{Q_2}\right)$$

où $Q_1 = \sum_{i=1}^M P_i$ et $Q_2 = \sum_{i=M+1}^N P_i$ sont les probabilités de deux groupes d'événements $1..M$ et $M+1..N$. L'information moyenne de l'événement total est ainsi égale à la somme des informations moyennes associées aux deux événements de la partition pondérée par leurs probabilités d'apparition, et de l'information de partage.

L'expression de l'entropie de SHANNON (IV.1) est en fait souvent établie en partant de quelques unes de ces propriétés, et en particulier de la propriété d'additivité (v). On pourra par exemple consulter (BALIAN 1982, Chapitre 3) ou (RÉNYI 1966, Appendice).

À une distribution de probabilité discrète P , on peut donc faire correspondre une quantité d'information $I(P)$. En désignant par X une variable aléatoire de distribution P , on utilisera (abusivement) $I(X)$ pour désigner l'information associée, étant bien entendu que cette information ne dépend pas des valeurs prises par X mais uniquement de sa distribution. On ne s'est ainsi intéressé jusqu'ici qu'à la mesure d'information liée à une seule variable aléatoire. On utilisera dans la suite une paire de variables aléatoires pour présenter les notions d'entropies jointes et conditionnelles.

2.1 Entropies jointes et conditionnelles

Soient $P(X, Y)$ la probabilité conjointe de X et Y , et $P(X|Y)$ la probabilité de X conditionnellement à Y . On notera ici $P(x_i)$ la probabilité $P(X = x_i)$, $P(y_j)$ la probabilité $P(Y = y_j)$, $P(x_i, y_j)$ la probabilité $P(X = x_i, Y = y_j)$, et enfin $P(x_i|y_j)$ et $P(y_j|x_i)$ les deux probabilités conditionnelles $P(X = x_i|Y = y_j)$ et $P(Y = y_j|X = x_i)$.

L'entropie conjointe $H(X, Y)$ est définie par analogie avec IV.1 comme

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P(x_i, y_j) \log(P(x_i, y_j)).$$

L'entropie de la loi conditionnelle, c'est-à-dire l'information moyenne apportée par X lorsque $Y = y_j$ est donné, s'écrit

$$H(X|Y = y_j) = - \sum_{i=1}^N P(x_i|y_j) \log(P(x_i|y_j)).$$

L'entropie conditionnelle s'en déduit alors comme la moyenne sur Y

$$H(X|Y) = - \sum_{j=1}^N P_j I(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P(x_i|y_j) P(y_j) \log(P(x_i|y_j)).$$

L'intérêt de ces définitions des entropies conjointes et conditionnelles réside dans le fait que l'entropie d'une paire de variables aléatoires s'exprime comme la somme de l'entropie d'une des variables et de l'entropie conditionnelle de l'autre :

$$\begin{cases} H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y), \\ H(X, Y) = H(X) + H(Y|X). \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Ces deux relations se déduisent immédiatement de $\log(P(X, Y)) = \log(P(X)) + \log(P(Y|X)) = \log(P(Y)) + \log(P(X|Y))$.

Quand X et Y sont indépendantes, ces relations se réduisent simplement à $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$. On peut d'ailleurs montrer, dans le cas général, que l'entropie conjointe est toujours inférieure à la somme des entropies des deux variables :

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y),$$

l'égalité n'ayant lieu que dans le cas indépendant. Ceci indique également que $H(X) - H(X|Y) \geq 0$, ce qui signifie que l'information conditionnelle $H(X|Y)$ ne peut dépasser l'information $H(X)$. En d'autres termes, l'information apportée par la connaissance de X est plus faible lorsqu'on connaît Y que lorsque l'on ne le connaît pas.

En utilisant les relations (IV.2), on peut encore déduire l'égalité

$$H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

Chacun des deux membres de cette égalité peut être interprété comme une diminution de l'information apportée par X (respectivement Y) résultant de la connaissance de Y (respectivement X). On appelle ces différences *information relative* donnée par Y sur X (respectivement par X sur Y), ou encore information mutuelle. On note cette information $I_M(X, Y)$. On peut encore définir l'information mutuelle à l'aide de la formule

$$I_M(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y),$$

ce qui conduit à

$$I_M(X, Y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P(x_i, y_j) \log \left(\frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \right). \quad (\text{IV.3})$$

Cette dernière expression n'est autre que l'*entropie relative*, ou le gain d'information, entre la distribution conjointe $P(X, Y)$ et le produit $P(X)P(Y)$.

2.2 Gain d'information – entropie relative

À la fin du paragraphe précédent, nous avons déjà rencontré la notion d'entropie relative ou de gain d'information. Cette notion est particulièrement importante en théorie de l'information, en statistique et absolument centrale dans ce travail. Ce paragraphe donne une première présentation de l'entropie relative.

Commençons par donner une idée intuitive du gain en information en considérant la situation suivante. Soient deux distributions de probabilité P et Q , et un événement i . Si la distribution supposée des événements est Q , on attend une information $-\log(Q_i)$ de l'événement i alors que si la distribution est P , l'événement apporte l'information $-\log(P_i)$. Si la distribution effective est P , l'information moyenne attendue lorsque la distribution supposée est Q , est

$$\tilde{H}(Q) = - \sum P_i \log(Q_i)$$

alors que l'information moyenne « réelle » associée à P est

$$H(P) = - \sum P_i \log(P_i).$$

La connaissance de la distribution réelle P constitue une information supplémentaire, ou permet un *gain d'information* (dans la mesure où l'information nécessaire pour caractériser un élément est plus faible). Ainsi, lorsque la distribution réelle est connue, l'information moyenne $H(P)$ apportée par un élément X est plus faible que dans le cas contraire : $\tilde{H}(Q) \geq H(P)$. On notera $D(P||Q)$ ² le gain d'information, qui est tel que

$$D(P||Q) = \tilde{H}(Q) - H(P). \quad (\text{IV.4})$$

En utilisant les expressions de $H(P)$ et $\tilde{H}(Q)$, on obtient l'expression

$$D(P||Q) = \sum_{i=1}^N P_i \log\left(\frac{P_i}{Q_i}\right). \quad (\text{IV.5})$$

Notons que l'on peut encore définir ce gain en information comme la moyenne de la différence entre les informations $-\log(Q_i)$ et $-\log(P_i)$ attendues avec les hypothèses Q et P pour la distribution.

On appelle également cette expression entropie relative (entre P et Q), ou encore entropie croisée (entre P et Q). Ces deux appellations font allusion à un changement de référence par rapport à l'entropie de SHANNON. En effet, si on prend pour Q une distribution uniforme, on retrouve l'entropie de SHANNON au signe et à une constante additive près. Précisons cette relation : si U est une distribution uniforme et N le nombre d'événements considérés,

$$D(P||U) = \log(N) - H(P).$$

Notons la différence de signe entre l'entropie de SHANNON et l'entropie relative qui induit des comportements opposés : à un gain correspond une perte, à un maximum un minimum, *etc.* En résumé, avec l'entropie de SHANNON, on mesure alors une perte entre la loi uniforme et la loi P , tandis que l'entropie relative mesure un gain d'information en passant de Q à P . Rappelons que la loi uniforme possède un statut spécial vis-à-vis de l'entropie de SHANNON : c'est pour cette distribution que l'entropie est maximale. Ce statut spécial se retrouve pour l'entropie croisée

² L'utilisation d'une double barre dans la notation de cette mesure d'information est due selon RÉNYI (RÉNYI 1966) au souci d'éviter une confusion avec une information conditionnelle.

et la référence P : c'est la distribution $P = Q$ qui rend l'entropie croisée minimale (et nulle), comme nous le montrerons dans la suite.

L'entropie relative (IV.5) peut ainsi permettre de mesurer une « distance » ou une dissemblance entre deux distributions de probabilité. Cette mesure de dissemblance a été étudiée par KULLBACK et LEIBLER en 1951, et utilisée par KULLBACK (KULLBACK 1959) pour une présentation de la théorie de l'information fondée sur l'utilisation de cette mesure de dissemblance. Nous avons utilisé ci-dessus des guillemets pour le mot distance, car l'information de KULLBACK-LEIBLER n'est pas à proprement parler une distance, puisqu'elle n'est pas symétrique et ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. Il sera néanmoins très utile de conserver pour l'information de KULLBACK cette idée de « distance » entre distributions. L'information de KULLBACK-LEIBLER peut être définie pour des probabilités continues, c'est d'ailleurs sa présentation habituelle. Nous n'avons pour le moment présenté qu'une version discrète. L'extension de la définition de SHANNON au cas continu n'est par contre pas immédiate. Nous donnerons les formulations dans le cas des lois à densité au paragraphe §2.5. Pour le moment, donnons quelques propriétés de l'information de KULLBACK-LEIBLER, parfois déjà évoquées dans le texte, et quelques unes de leurs conséquences.

- La première propriété (déjà signalée) est la positivité de l'entropie relative, et le fait qu'elle prenne son minimum en $P = Q$. De nombreuses démonstrations sont possibles pour établir

$$D(P||Q) \geq 0, \text{ avec égalité pour } P = Q.$$

La démonstration la plus simple n'utilise que l'inégalité $\log(x) \leq x - 1$ (avec égalité si $x = 1$). En posant $x_i = Q_i/P_i$, on a en effet

$$D(P||Q) = - \sum_{i=1}^N P_i \log\left(\frac{Q_i}{P_i}\right) \geq \sum_{i=1}^N P_i \left(1 - \frac{Q_i}{P_i}\right) = 0,$$

grâce à la normalisation de P et Q . On trouvera deux démonstrations fondées sur l'utilisation de l'inégalité de JENSEN dans le livre de COVER et THOMAS (COVER & THOMAS 1991).

Comme conséquence de la positivité de $D(P||Q)$, on peut tout d'abord vérifier que $\bar{H}(Q) - H(P) \geq 0$ comme nous l'avions annoncé plus haut. En second lieu, on peut revenir à l'information mutuelle, qui apparaît maintenant comme l'information de KULLBACK-LEIBLER entre la loi conjointe et la distribution obtenue lorsque X et Y sont indépendantes :

$$I_M = D(P(X, Y)||P(X)P(Y)).$$

En raison de la positivité de l'information de KULLBACK-LEIBLER, l'information mutuelle est elle-même positive, et

$$\begin{cases} H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \geq 0, \\ H(X) + H(Y) \geq H(X, Y). \end{cases}$$

- L'entropie relative est une fonction *convexe* de ses deux arguments. Cette propriété est particulièrement importante, puisque les problèmes de minimisation de l'information de KULLBACK-LEIBLER que nous aurons à étudier posséderont alors une solution unique. La convexité de l'entropie relative s'étendra par ailleurs aux critères entropiques que nous développerons, leur conférant ainsi une propriété forte, qui garantira l'existence et l'unicité de la solution, et facilitera sa recherche. La convexité de l'entropie relative peut être établie en utilisant l'inégalité de

JENSEN (COVER & THOMAS 1991, pages 29–30). Nous n'utiliserons ici que la convexité de la fonction $x \log(x)$.

La convexité de l'information de KULLBACK-LEIBLER signifie que

$$D(\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 || \lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2) \leq \lambda D(P_1 || Q_1) + (1 - \lambda)D(P_2 || Q_2), \quad (\text{IV.6})$$

pour deux paires de distributions (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) .

La démonstration consiste à vérifier la convexité de chacun des termes intervenant dans le développement de $D(\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 || \lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2)$, c'est-à-dire à vérifier que

$$(\lambda P_{1_i} + (1 - \lambda)P_{2_i}) \log \left(\frac{\lambda P_{1_i} + (1 - \lambda)P_{2_i}}{\lambda Q_{1_i} + (1 - \lambda)Q_{2_i}} \right) \leq \lambda P_{1_i} \log \left(\frac{P_{1_i}}{Q_{1_i}} \right) + (1 - \lambda)P_{2_i} \log \left(\frac{P_{2_i}}{Q_{2_i}} \right). \quad (\text{IV.7})$$

En posant

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{P_{1_i}}{Q_{1_i}} & X_2 &= \frac{P_{2_i}}{Q_{2_i}} \\ A_1 &= \lambda \frac{Q_{1_i}}{\lambda Q_{1_i} + (1 - \lambda)Q_{2_i}} & A_2 &= (1 - \lambda) \frac{Q_{2_i}}{\lambda Q_{1_i} + (1 - \lambda)Q_{2_i}} = 1 - A_1 \end{aligned} ,$$

et en utilisant simplement la convexité de la fonction $x \log(x)$, on a

$$(A_1 X_1 + (1 - A_1)X_2) \log(A_1 X_1 + (1 - A_1)X_2) \leq A_1 X_1 \log(X_1) + (1 - A_1)X_2 \log(X_2),$$

il ne reste plus qu'à multiplier les deux membres de l'inégalité par $\frac{1}{\lambda Q_{1_i} + (1 - \lambda)Q_{2_i}}$ pour retrouver (IV.7).

• L'entropie relative possède également les propriétés d'additivité observées pour l'entropie simple. Pour indiquer qu'on s'intéresse à des lois conjointes ou conditionnelles, on fait figurer dans la notation les variables intéressées : $D(P || Q; X, Y)$ désignera ainsi l'entropie croisée entre $P(X, Y)$ et $Q(X, Y)$. Si les variables aléatoires sont indépendantes, on a une première propriété d'additivité :

$$D(P || Q; X, Y) = D(P || Q; X) + D(P || Q; Y).$$

Lorsque les variables ne sont pas indépendantes, on obtient les relations d'additivité

$$\begin{aligned} D(P || Q; X, Y) &= D(P || Q; X) + D(P || Q; Y | X) \\ D(P || Q; X, Y) &= D(P || Q; Y) + D(P || Q; X | Y), \end{aligned}$$

dans lesquelles l'entropie relative conditionnelle est définie de façon analogue à l'entropie conditionnelle. On notera encore l'inégalité suivante, qui se révélera utile dans la suite :

$$\sum P_i \log \left(\frac{P_i}{P_{2_i}} \right) \geq \sum P_i \log \left(\frac{P_{1_i}}{P_{2_i}} \right) \quad \forall P_1. \quad (\text{IV.8})$$

Cette inégalité s'obtient facilement en utilisant la positivité de $D(P || P_1)$, et en décomposant

$$D(P || P_1) = \sum P_i \log \left(\frac{P_i}{P_{2_i}} \right) + \sum P_i \log \left(\frac{P_{2_i}}{P_{1_i}} \right) \geq 0.$$

2.3 Séquences typiques, lois des grands nombres et distribution empirique

L'étude de la distribution empirique d'une somme de variables aléatoires, comme la notion de séquences typiques permettent de donner une signification statistique à l'entropie de SHANNON et à l'information de KULLBACK-LEIBLER. L'étude de déviations à la loi des grands nombres nous conduira à une première présentation, et justification, de la minimisation de l'information de KULLBACK-LEIBLER en vue de la détermination d'une distribution de probabilité.

2.3.1 Suites typiques

On considère une suite $\mathbf{X}_N = \{X_1, X_2 \dots X_N\}$ de N variables aléatoires indépendantes prises dans un alphabet de r lettres a_1, \dots, a_r suivant une loi P . Une réalisation $\mathbf{x}_N = \{x_1, x_2 \dots x_N\}$ de cette séquence forme un N -échantillon de la loi P .

La probabilité de ce N -échantillon est donnée par

$$Q(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_N = x_N) = P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_r^{n_r},$$

où n_1, \dots, n_r sont les nombres d'apparition des symboles dans le N -échantillon, $\sum_{i=1}^r n_i = N$ et $P_j = P(X_j = x_j)$, $j = 1..N$. Notons \hat{P}_N la distribution empirique fournie par cette séquence, c'est-à-dire la suite des fréquences relatives

$$(\hat{P}_{N_1}, \dots, \hat{P}_{N_r}) = \left(\frac{n_1}{N}, \dots, \frac{n_r}{N}\right).$$

Dans ces conditions, la probabilité du N -échantillon peut se reformuler en fonction des distributions P et \hat{P}_N comme

$$Q(\mathbf{X}_N = \mathbf{x}_N) = \prod_{i=1}^r P_i^{N\hat{P}_{N_i}},$$

soit encore

$$Q(\mathbf{X}_N = \mathbf{x}_N) = \prod_{i=1}^r \exp\left(N\hat{P}_{N_i} \log(P_i)\right) = \exp\left(N \sum_{i=1}^r \hat{P}_{N_i} \log(P_i)\right).$$

L'argument de l'exponentielle peut alors s'exprimer comme la somme de l'entropie croisée entre P et \hat{P}_N et de l'entropie de la distribution empirique \hat{P}_N :

$$Q(\mathbf{X}_N = \mathbf{x}_N) = \exp\left(-N(D(\hat{P}_N||P) + H(\hat{P}_N))\right). \quad (\text{IV.9})$$

Ce résultat indique que la probabilité d'un N -échantillon ne dépend que de la distribution empirique des symboles dans l'échantillon et de la distribution effective. On appelle « type » (cette dénomination est due à CSISZÁR) du N -échantillon cette distribution empirique, et on note $T(\hat{P}_N)$ l'ensemble des N -échantillons présentant le même type, c'est-à-dire la même distribution empirique. On appelle « suite typique » une suite dont la distribution empirique est la distribution initiale P . À la lumière de (IV.9), on peut observer que la probabilité d'une suite typique ne dépend que de l'entropie de la distribution P (puisque $D(P||P) = 0$):

$$Q(\mathbf{X}_N = \mathbf{x}_N | \mathbf{x}_N \text{ est typique}) = \exp(-NH(P)).$$

Il est important de remarquer que les suites typiques, même si elles possèdent la même distribution empirique que la distribution avec laquelle elles ont été construites, ne sont pas individuellement les plus probables. Par exemple, la suite de probabilité maximale est celle dans laquelle l'événement de probabilité maximale a été réalisé N fois (PAPOULIS 1984). Par contre, la probabilité d'obtenir un élément de l'ensemble formé par les suites typiques est, comme nous allons le voir, beaucoup plus importante que la probabilité d'obtenir un élément de l'ensemble complémentaire des suites « non typiques », qui sont appelées aussi par opposition séquences rares.

Le nombre de séquences possédant la même distribution empirique, c'est-à-dire le nombre d'éléments dans la classe $T(\cdot)$, est donné par la *multiplicité*

$$W(T(\hat{P}_N)) = W(n_1, \dots, n_r) = \frac{N!}{n_1! \dots n_r!}.$$

En utilisant la formule d'approximation de STIRLING, ou d'autres arguments que l'on pourra trouver dans CSISZÁR (CSISZÁR & KÖRNER 1981, page 30) ou dans COVER & THOMAS (COVER & THOMAS 1991, pages 282–284) on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{(N+1)^r} \exp\left(NH(\hat{P}_N)\right) \leq W(T(\hat{P}_N)) \leq \exp\left(NH(\hat{P}_N)\right),$$

que l'on notera aussi $W(T(\hat{P}_N)) = \eta(T(\hat{P}_N)) \exp\left(NH(\hat{P}_N)\right)$, où $\eta(T(\hat{P}_N))$ est un nombre compris entre $1/(N+1)^r$ et 1,

$$\eta(T(\hat{P}_N)) = W(\hat{P}_N) \exp\left(-NH(\hat{P}_N)\right) \in [(N+1)^{-r}, 1].$$

On en déduit alors, avec également la probabilité (IV.9), que la probabilité d'obtenir un type \hat{P}_N est

$$Q(T(\hat{P}_N)) = \sum_{\mathbf{x}_N \in T(\hat{P}_N)} Q(\mathbf{x}_N) = \eta(\hat{P}_N) \exp\left(-ND(\hat{P}_N||P)\right). \quad (\text{IV.10})$$

Dans la mesure où la probabilité décroît exponentiellement avec N d'une part, et avec l'entropie relative entre la distribution empirique \hat{P}_N et la distribution P d'autre part, les distributions empiriques se concentrent à une distance faible (au sens de l'information de KULLBACK-LEIBLER) de P lorsque N grandit. En d'autres termes, $Q(T(\hat{P}_N))$ tend vers une distribution de DIRAC centrée en $\hat{P}_N = P$. En développant $Q(T(\hat{P}_N))$ autour de son maximum, on retrouve la loi des grands nombres : $D(\hat{P}_N||P) \approx \sum_{i=1}^r (P_i^N - P_i)^2 / P_i^2$ et,

$$Q(T(\hat{P}_N)) \approx \exp\left(-N \sum_{i=1}^r \frac{(P_i^N - P_i)^2}{P_i^2}\right).$$

Bien entendu, puisque les distributions empiriques se concentrent autour de P , l'ensemble des suites typiques devient prépondérant. Soit \overline{A}_ε l'ensemble des types dont la « distance » $D(\hat{P}_N||P)$ à P est supérieure à ε : $\overline{A}_\varepsilon = \{\hat{P}_N : D(\hat{P}_N||P) > \varepsilon\}$. Cet ensemble a la probabilité

$$\begin{aligned} & \sum_{\overline{A}_\varepsilon} \eta(\hat{P}_N) \exp\left(-ND(\hat{P}_N||P)\right) \\ & \leq \sum_{\overline{A}_\varepsilon} \exp(-N\varepsilon), \\ & \leq (N+1)^r \exp(-N\varepsilon) = \exp(-N(\varepsilon - r \log(N+1)/N)) \end{aligned}$$

qui décroît vers 0 quand N grandit. Dans (JAYNES 1982), JAYNES donne ce résultat pour l'entropie de SHANNON à l'aide d'arguments combinatoires.

2.3.2 Théorème de SANOV

Les éléments développés ci-dessus nous permettent maintenant de présenter le théorème de SANOV, et d'en déduire, comme nous l'avons avancé plus haut, une procédure de sélection de distribution de probabilité. Le théorème de SANOV est habituellement présenté dans le cadre de la théorie des grandes déviations — nous le retrouverons dans l'annexe D du chapitre V. La version pour un espace d'hypothèses fini que nous présentons ici concerne la probabilité de déviations à la loi limite P d'un N -échantillon lorsque le type est contraint à appartenir à un certain sous ensemble \mathcal{C}_N des types possibles. Si on note \mathcal{P}_N l'ensemble des types possibles pour

une suite de N échantillons et si \mathcal{C} est un ensemble de distributions, l'ensemble \mathcal{C}_N sera défini comme l'intersection de l'ensemble des distributions empiriques pour N fixé et de l'ensemble \mathcal{C} , $\mathcal{C}_N = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_N$.

On cherche donc à évaluer la probabilité $Q(\mathcal{C}_N)$ de l'ensemble des types appartenant à \mathcal{C}_N . On peut facilement en donner une borne supérieure :

$$Q(\mathcal{C}_N) = \sum_{\hat{P}_N \in \mathcal{C}_N} Q(T(\hat{P}_N)) \leq \sum_{\hat{P}_N \in \mathcal{C}_N} \exp(-ND(\hat{P}_N||P)).$$

Si on note P_N^* la distribution qui réalise le minimum de $D(\hat{P}_N||P)$ sur \mathcal{C}_N , c'est-à-dire

$$P_N^* = \arg \min_{\hat{P}_N \in \mathcal{C}_N} D(\hat{P}_N||P),$$

on a évidemment

$$Q(\mathcal{C}_N) \leq \sum_{\hat{P}_N \in \mathcal{C}_N} \exp(-ND(P_N^*||P)).$$

Le nombre de types total étant majoré par $(N+1)^r$, il vient alors

$$Q(\mathcal{C}_N) \leq (N+1)^r \exp(-ND(P_N^*||P)).$$

On peut ensuite donner une borne inférieure en ne prenant qu'un terme de la somme

$$Q(\mathcal{C}_N) = \sum_{\hat{P}_N \in \mathcal{C}_N} Q(T(\hat{P}_N)),$$

soit

$$Q(\mathcal{C}_N) \geq Q(T(\hat{P}_N)) \quad \forall \hat{P}_N \in \mathcal{C}_N,$$

et compte tenu de (IV.10), il reste

$$Q(\mathcal{C}_N) \geq (N+1)^{-r} \exp(-ND(\hat{P}_N||P)) \quad \forall \hat{P}_N \in \mathcal{C}_N.$$

En particulier, pour $\hat{P}_N = P_N^*$,

$$Q(\mathcal{C}_N) \geq \frac{1}{(N+1)^r} \exp(-ND(\hat{P}_N^*||P)).$$

On obtient ainsi l'encadrement

$$\frac{1}{(N+1)^r} \exp(-ND(\hat{P}_N^*||P)) \leq Q(\mathcal{C}_N) \leq (N+1)^r \exp(-ND(\hat{P}_N^*||P)). \quad (\text{IV.11})$$

On s'intéresse plus souvent au logarithme de cette probabilité, normalisé par le nombre d'éléments par réalisation N :

$$-r \frac{\log(N+1)}{N} - D(\hat{P}_N^*||P) \leq \frac{1}{N} \log(Q(\mathcal{C}_N)) \leq r \frac{\log(N+1)}{N} - D(\hat{P}_N^*||P) \quad (\text{IV.12})$$

Lorsque N tend vers l'infini, $\log(N+1)/N \rightarrow 0$, et $\log(Q(\mathcal{C}_N))$ tend vers la limite de $-ND(P^*||P)$. Le seul problème réside dans l'existence de cette limite. On a supposé ci-dessus que \mathcal{C}_N , à N fixé, était non vide. Si tel n'était pas le cas, on pourrait cependant encore obtenir

une borne supérieure en suivant exactement la même démarche que précédemment, mais en utilisant la distribution P^* (qui n'est pas forcément dans \mathcal{P}_N , et existe et appartient à \mathcal{C} si celui-ci est fermé borné) qui réalise le minimum de l'entropie croisée à P sur l'ensemble \mathcal{C} , plutôt que la distribution \hat{P}_N^* :

$$P^* = \arg \min_{\tilde{P} \in \mathcal{C}} D(\tilde{P}||P).$$

En effet, on a bien entendu,

$$\inf_{\tilde{P} \in \mathcal{C}} D(\tilde{P}||P) \leq \inf_{\tilde{P} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_N} D(\tilde{P}||P).$$

Si \mathcal{C} est un fermé d'intérieur non vide, on peut trouver un N_0 tel que \mathcal{C}_{N_0} soit non-vide, et, puisque $\cup \mathcal{P}_N$ est dense dans l'ensemble des distributions, \mathcal{C}_N est alors non vide pour tout $N \geq N_0$. Avec cette hypothèse, \hat{P}_N^* converge vers P^* , et en utilisant l'encadrement (IV.12),

$$\frac{1}{N} \log(Q(\mathcal{C}_N)) \rightarrow -D(P^*||P) \quad (\text{IV.13})$$

On observe que cette probabilité décroît exponentiellement avec N , et que le taux de décroissance n'est autre que le minimum de l'information de KULLBACK-LEIBLER sur l'ensemble de contraintes considérées. Ce taux de décroissance est appelé « entropie » dans la théorie des grandes déviations. On distingue plusieurs niveaux d'entropie selon le « niveau de détail » des phénomènes étudiés. Selon la classification de VARADHAN, cité par ELLIS (ELLIS 1985), le taux de convergence des distributions empiriques vers leur loi limite correspond ainsi à une entropie de niveau 2. Les critères que nous présenterons et utiliserons dans la suite du travail en vue de la résolution de problèmes inverses correspondront quant à eux à des entropies de niveau 1.

Parmi les distributions empiriques de \mathcal{C}_N , une distribution particulière émerge naturellement : c'est la distribution \hat{P}_N^* , qui réalise le minimum de l'entropie relative à la loi limite P . D'abord parce que sa distance de KULLBACK à P fixe le taux de décroissance, et ensuite parce que la probabilité de la classe $T(P^*)$ devient absolument prépondérante lorsque N grandit : il suffit de constater que

$$Q(\mathcal{C}_N) = \sum_{P \in \mathcal{C}_N} Q(T(P)) \rightarrow Q(T(\hat{P}_N^*)) \exp(-ND(\hat{P}_N^*||P)),$$

c'est-à-dire que l'on peut négliger les probabilités de toutes les distributions empiriques devant la probabilité de \hat{P}_N^* , la distribution la plus proche de P au sens de la distance de KULLBACK. En fait, on observe un phénomène de concentration de la probabilité en \hat{P}_N^* du même type que celui indiqué plus haut concernant la convergence de $Q(T(\hat{P}_N^*))$ vers un DIRAC centré en P . Ici, la probabilité s'amasse sur un « bord » de \mathcal{C} , à la distance (au sens de l'information de KULLBACK) la plus faible possible de P . On trouvera une démonstration de ce phénomène de concentration dans (ROBERT 1990) par exemple.

Il n'est peut-être pas inutile, pour conclure ce paragraphe, de rappeler les propriétés de l'information de KULLBACK-LEIBLER et d'illustrer le statut particulier de la distribution P^* par une « inégalité triangulaire » :

- $D(P'||P)$ est une fonction convexe, positive et s'annulant pour $P' = P$,
- $D(P'||P)$ est additive dans le cas de variables indépendantes,
- $D(P'||P)$ est l'exposant de la probabilité $Q(T(P'))$.

Venons-en à cette « inégalité triangulaire ». Pour simplifier l'écriture, on notera dans ce paragraphe Q la distribution de référence, et P^* la distribution réalisant le minimum de la distance de KULLBACK à Q parmi les distributions P appartenant à un ensemble convexe \mathcal{C} . On a alors

$$\begin{cases} D(P||Q) \geq D(P||P^*) + D(P^*||Q), \forall P \in \mathcal{C} \\ \text{avec } P^* = \arg \min_{P \in \mathcal{C}} D(P||Q). \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

La démonstration est empruntée à (COVER & THOMAS 1991). Soit P_0 un élément de \mathcal{C} . Grâce à la convexité de \mathcal{C} , on peut décomposer P_0 en $P_0 = \alpha P + (1 - \alpha)P^*$, avec $\alpha \in [0, 1]$. Par hypothèse, on a $D(P_0||Q) \geq D(P^*||Q)$. Ceci signifie que lorsque α décroît vers 0, $D(P_0||Q)$ décroît vers $D(P^*||Q)$. La dérivée de $D(P_0||Q)$ par rapport à α est par conséquent positive en $\alpha = 0$. On en tire facilement

$$\sum_i P_i \log \left(\frac{P_i^*}{Q_i} \right) \geq \sum_i P_i^* \log \left(\frac{P_i^*}{Q_i} \right),$$

et il ne reste plus qu'à décomposer l'argument P_i^*/Q_i en $(P_i^*/P_i)(P_i/Q_i)$ pour obtenir

$$\sum_i P_i \log \left(\frac{P_i}{Q_i} \right) \geq \sum_i P_i^* \log \left(\frac{P_i^*}{Q_i} \right) - P_i \log \left(\frac{P_i}{P_i^*} \right),$$

c'est-à-dire l'inégalité triangulaire (IV.14). À l'aide de ce théorème de PYTHAGORE pour l'information de KULLBACK, on retrouve le statut spécial de la distribution à minimum d'entropie relative P^* et le phénomène de concentration : si $D(\hat{P}_N||Q) \rightarrow D(P^*||Q)$, alors $D(\hat{P}_N||P^*) \rightarrow 0$.

2.4 Un principe d'inférence

À notre avis, le point le plus intéressant dans le théorème de SANOV n'est pas la décroissance exponentielle de la probabilité $Q(\mathcal{C})$, mais bel et bien la prédominance de la distribution à minimum d'information de KULLBACK-LEIBLER. Ce résultat conduit en effet à un principe d'inférence. Lorsque l'on recherche une distribution de probabilité vérifiant certaines contraintes, spécifiées par l'ensemble \mathcal{C} , et que l'on dispose de la distribution de référence P , la distribution P^* réalisant le minimum de l'entropie croisée à P présente une probabilité supérieure à celle des autres distributions de l'ensemble, et à la limite « amasse » toute la probabilité de l'ensemble. Le choix de cette distribution semble donc s'imposer naturellement :

$$P^* = \arg \min_{\tilde{P} \in \mathcal{C}} D(\tilde{P}||P). \quad (\text{IV.15})$$

L'argumentation que nous avons utilisée fait référence à un procédé de génération des différentes suites observables \mathbf{x} , et à la distribution exacte P suivant laquelle sont générées ces suites. En pratique, rien ne permet d'affirmer que tel ou tel phénomène vérifie ce modèle de génération. On peut cependant conserver ce raisonnement sans qu'il s'appuie nécessairement sur une réalité physique. Nous utiliserons ainsi une distribution « de référence » reflétant une connaissance *a priori*, ou imposant certaines contraintes sur les réalisations potentielles. Il s'agira alors d'un modèle de l'esprit qui nous permettra de mettre à jour des critères féconds pour la résolution des problèmes inverses.

La démarche de SHORE et JOHNSON (SHORE & JOHNSON 1983, SHORE & JOHNSON 1984) consiste en une construction axiomatique du procédé (IV.15), à partir d'un petit nombre de

propriétés que devrait vérifier une procédure de choix d'une distribution de probabilité, lorsque l'on dispose de contraintes ou d'informations sous la forme $P \in \mathcal{C}$, où \mathcal{C} est un ensemble de contraintes sur les moments de la distribution. Nous citons ici les quatre axiomes de SHORE et JOHNSON (SHORE 1981) (ils sont présentés de manière plus formelle dans l'annexe « *Probabilistic issues in Fourier Synthesis* », annexe C).

Leurs résultats sont donnés à la fois pour des distributions discrètes et pour des distributions continues pour lesquelles nous ne donnerons les expressions des entropies, avec quelques commentaires, qu'au paragraphe suivant. Quoi qu'il en soit, si on note maintenant μ la *mesure de référence*, les axiomes et le théorème sont

1. *Unicité* : la loi sélectionnée par le procédé est unique ;
2. *Échelle* : la loi sélectionnée est indépendante du système de coordonnées ;
3. *Conservation de l'indépendance* : lorsque ni la mesure de référence, ni les données ne donnent d'information de corrélation, la loi doit être choisie séparable ;
4. *Conservation d'une partition* : la loi sélectionnée est identique que l'on décompose le problème en sous parties ou qu'on le traite globalement.

Ces quatre axiomes ne sont vérifiés que par le procédé qui consiste à choisir comme distribution le minimum d'une fonction monotone f de l'information de KULLBACK-LEIBLER :

$$P^* = \arg \min_{P \in \mathcal{C}} f(D(P||\mu)).$$

On retrouve ainsi la procédure que nous avons illustrée à partir de considérations sur les distributions empiriques.

Notons que ces axiomes ont été aussi transposés dans le domaine de la reconstruction d'image pour justifier de l'utilisation d'un critère entropique de la forme (IV.15) – voir par exemple (SKILLING 1989). Le critère utilisé est (IV.15) exprimé en terme des pixels x_i de l'image \mathbf{x} :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{i=1}^N x_i \log \left(\frac{x_i}{x_i^{(0)}} \right) + (x_i - x_i^{(0)}), \quad (\text{IV.16})$$

dans lequel le terme $(x_i - x_i^{(0)})$ est un terme correctif prenant en compte le fait que \mathbf{x} et $\mathbf{x}^{(0)}$ peuvent ne pas être normalisés à l'unité. Le raisonnement effectué sur les distributions de probabilité par SHORE et JOHNSON est transposé au domaine de la reconstruction d'image pour permettre à certains de promouvoir ce critère de reconstruction comme « *the one and only method to use for solving inverse problems when the answer is known to be positive* » (DONOHO *et al.* 1992, citant des discussions de congrès et critiquant cette position) — voir également la polémique entre TITTERINGTON et SKILLING dans (TITTERINGTON 1984), à propos de l'article (SKILLING 1984). Il suffit de noter avec (NARAYAN & NITYANANDA 1986) et (LE BESNERAIS 1993, page 64) que les axiomes de SHORE et JOHNSON s'ils sont pertinents pour des distributions de probabilité, peuvent ne pas l'être en reconstruction d'image (en particulier l'axiome de conservation de l'indépendance ; et d'observer que des résultats très convaincants sont obtenus sur ce type de problème (en particulier en analyse spectrale, voir le paragraphe §4.2) avec d'autres critères pour refuser à ce critère le statut de « seule » méthode cohérente, sans toutefois nier les bons résultats auxquels elle conduit dans nombre d'applications. Par une démarche très différente de (SKILLING 1989a, SKILLING 1989b), nous retrouverons d'ailleurs ce critère de reconstruction par notre méthodologie générale, ce qui nous permettra de lui donner

une interprétation précise.

Le terme d'entropie fait immanquablement penser à l'utilisation de l'entropie en physique, et particulièrement en thermodynamique. Le parallèle avec certains résultats de la physique peut en lui-même servir (et a servi) d'argument pour justifier l'emploi de l'entropie en traitement du signal et de l'image. La présentation que nous avons adoptée utilisant les distributions empiriques nous permettra de retrouver une interprétation physique de (des) entropie(s). Ce sont les travaux de JAYNES (JAYNES 1957a, JAYNES 1957b), ainsi que de BRILLOUIN (BRILLOUIN 1956), situés à la frontière de la théorie de l'information et de la physique statistique, qui ont permis de clarifier les liens entre l'entropie de la physique statistique et l'entropie comme mesure d'information. Le paragraphe §3 sera ainsi dédié à une présentation simple de l'entropie en physique. Nous donnerons dans ce cadre de premiers exemples de construction de distributions de probabilité à *maximum d'entropie*, et retrouverons les notions de distributions canoniques. Nous présenterons ensuite deux applications « historiques », selon les termes de (LE BESNERAIS 1993), de l'entropie en traitement du signal et de l'image. Avant cela, nous donnerons les expressions des entropies de SHANNON et de l'information de KULLBACK dans le cas de distributions continues.

2.5 Cas continu

Soit un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$. Une mesure μ_1 est dite absolument continue par rapport à une mesure μ_2 — ce que l'on écrit $\mu_1 \ll \mu_2$ — si $\mu_1(E) = 0$ pour tout sous ensemble E de \mathcal{S} tel que $\mu_2(E) = 0$ (on dit aussi que μ_2 domine μ_1). Lorsque deux mesures sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, $\mu_1 \ll \mu_2$ et $\mu_2 \ll \mu_1$, alors elles sont dites équivalentes. Soit P une mesure de probabilité équivalente à μ . On définit alors la densité de probabilité p par rapport à μ ,

$$p(x) = \frac{dP}{d\mu}(x)$$

telle que

$$P(E) = \int_E dP(x) = \int_E p(x) d\mu(x).$$

La fonction $p(x)$ est appelée dérivée de RADON-NIKODYM de P par rapport à μ . Elle est définie de manière unique sauf pour les ensembles tels que $\mu(E) = 0$, ce qui est noté

$$p(x) = \frac{dP}{d\mu}(x) \text{ } [\mu].$$

Si $P \ll \mu$, $\mu \ll \nu$ alors $P \ll \nu$ et les dérivées de RADON-NIKODYM vérifient

$$\frac{dP}{d\nu} = \frac{dP}{d\mu} \frac{d\mu}{d\nu}, \text{ } [\nu]$$

Dans le cas discret, nous avons vu que l'entropie, en tant que moyenne d'une mesure d'information est définie sans équivoque. À la certitude absolue correspond une entropie nulle, et l'entropie maximale correspond à l'équiprobabilité sur un ensemble de N hypothèses, conduisant à une entropie proportionnelle à $\log(N)$. Dans le cas continu par contre, l'entropie ne peut plus être définie de manière absolue. Si on « étend » par exemple la formule de SHANNON au cas continu en posant

$$H(p) = - \int_{\mathcal{X}} p(x) \log(p(x)) dx,$$

on constate que cette quantité n'est plus invariante dans un changement de coordonnées. Si on change x en y , la nouvelle entropie devient en effet

$$H'(p) = H(p) - \int_{\mathcal{X}} p(x) \log(J(x, y)) dx,$$

où $J(x, y)$ est le Jacobien de la transformation. SHANNON note cependant que s'il ne s'agit que de « comparer » des entropies, alors la différence ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Lorsqu'on désire tenir compte de ce système de coordonnées, il faut introduire une mesure de référence, par rapport à laquelle est définie la densité p et modifier la définition en définissant l'entropie relative à la mesure μ par

$$H_{\mu}(p) = - \int_{\mathcal{X}} dP(x) \log \left(\frac{dP}{d\mu}(x) \right) = - \int_{\mathcal{X}} p(x) \log(p(x)) d\mu(x), \quad (\text{IV.17})$$

qu'on appellera également μ -entropie. Il faut cependant noter que l'entropie relative ne possède plus toutes les propriétés de l'entropie du cas discret. En particulier, on peut obtenir des entropies négatives (en fait dès que μ est une mesure de probabilité — une remarque de C. HEINRICH).

Pour deux mesures de probabilité P et Q , avec $P \ll Q$, on définit l'information de KULLBACK-LEIBLER par (KULLBACK 1959)

$$D(P||Q) = \int_{\mathcal{X}} \log \left(\frac{dP}{dQ}(x) \right) dP(x). \quad (\text{IV.18})$$

Si P et Q sont absolument continues par rapport à une mesure de référence μ , on peut encore écrire

$$D(P||Q) = \int_{\mathcal{X}} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) d\mu(x). \quad (\text{IV.19})$$

On peut établir, par les mêmes raisonnements que dans les paragraphes précédents, que l'information de KULLBACK-LEIBLER $D(P||Q)$ reste une fonction convexe, positive et ne s'annulant que dans le cas où $p(x) = q(x)$. Notons encore que la μ -entropie (IV.17) se réduit à l'opposé de l'information de KULLBACK-LEIBLER $D(P||\mu)$ lorsque μ est une mesure de probabilité.

3 Entropie et modèle de BOLTZMANN

Cette section a pour but d'illustrer, au moyen d'un modèle physique simple, l'intervention de l'entropie en physique. On revient ainsi sur le modèle de BOLTZMANN et sur la définition de l'entropie comme logarithme de la multiplicité d'un système. Des raisonnements calqués sur cette présentation ont longtemps servi de justification à l'emploi de l'entropie comme fonctionnelle de régularisation en traitement d'image, nous en verrons un exemple au paragraphe §4.1 où nous commenterons le modèle de GULL et DANIELL (GULL & DANIELL 1978). Cette présentation nous permettra également de préciser certains éléments de terminologie, et, en retrouvant les ensembles canoniques de la physique statistique, de donner de premières applications de la maximisation de l'entropie.

3.1 Le modèle de BOLTZMANN

Dans le cas général, on définit un espace des phases Γ , dans lequel chaque coordonnée représente un état particulier d'un système. Si on considère par exemple un système de

N particules indiscernables, chacune de ces particules étant décrite par $2k$ paramètres de position \mathbf{p} et d'impulsion \mathbf{q} , alors l'espace des phases est un espace à $2Nk$ dimensions. On appelle microétat du système chacun des états possibles, c'est-à-dire un élément de Γ . Les microétats compatibles avec l'état du système observé à l'échelle macroscopique sont appelés états accessibles. Le nombre d'états accessibles, qui coïncide avec la multiplicité que nous avons introduite précédemment, est aussi appelé probabilité thermodynamique. Nous considérons ci-dessous un exemple très simple de problème physique pour illustrer ceci.

On considère un système de N particules indépendantes et indiscernables, qui doivent se répartir sur J niveaux d'énergie E_1, \dots, E_J . Un microétat du système est alors constitué par une répartition de ces N particules sur les J niveaux. Cette répartition correspond à une distribution empirique dans notre présentation précédente, tandis que les microétats correspondent aux N -échantillons.

Le nombre de particules N étant très grand (de l'ordre de grandeur du nombre d'AVOGADRO) devant J , $N \gg J$, et les particules indiscernables, le nombre de microétats conduisant à la répartition n_1, n_2, \dots, n_J , avec la condition $\sum_{j=1}^J n_j = N$ est la multiplicité $W(n_1, n_2, \dots, n_J)$, donnée par la combinatoire (loi multinomiale)

$$W(n_1, n_2, \dots, n_J) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_J!}.$$

Le principe de multiplicité maximale — qui est également le second principe de la thermodynamique, est alors le suivant : parmi toutes les répartitions (distributions empiriques) compatibles avec un macroétat donné (celui-ci peut être imposé ou connu par le biais de contraintes ou mesures macroscopiques), la Nature a une forte préférence, « *a strong preference* » selon les termes de JAYNES (JAYNES 1982) à réaliser celui qui peut être atteint par le plus de chemins différents ; c'est-à-dire celui qui présente la multiplicité maximale.

En 1877, BOLTZMANN reconnaît le caractère central de la multiplicité et propose plus précisément de s'intéresser au nombre

$$S(n_1, n_2, \dots, n_J) = k \log (W(n_1, n_2, \dots, n_J))$$

qu'il identifie à l'entropie de la thermodynamique. Le facteur k est la constante de BOLTZMANN.

Il est intéressant d'en donner une approximation pour retrouver l'expression « moderne » de l'entropie. Nous avons déjà indiqué l'encadrement (IV.11) de la multiplicité. On en tire

$$-J \frac{\log(N+1)}{N} + H(\tilde{\mathbf{n}}) \leq \frac{1}{N} \log(W(\mathbf{n})) \leq NH(\tilde{\mathbf{n}}),$$

où l'on a noté $\tilde{\mathbf{n}}$ la suite des variables réduites $\tilde{n}_j = n_j/N$, pour $j = 1..J$, et $H(\tilde{\mathbf{n}})$ l'entropie de SHANNON pour le vecteur $\tilde{\mathbf{n}}$. Cet encadrement nous indique que

$$\frac{1}{N} \log(W(\mathbf{n})) \rightarrow H(\tilde{\mathbf{n}}) \text{ avec } N,$$

et permet ainsi d'identifier l'entropie de BOLTZMANN $S(\tilde{\mathbf{n}})$ et l'entropie de SHANNON (à un facteur N/k près).

On peut de la même manière obtenir une expression similaire à l'information de KULLBACK-LEIBLER. Nous avons en effet supposé ci-dessus que les différents niveaux d'énergie étaient remplis sans préférence. On peut cependant imaginer que les particules possèdent des affinités

particulières pour tel ou tel niveau d'énergie. Posons alors P_1, P_2, \dots, P_J les probabilités d'occupation respectives des niveaux E_1, E_2, \dots, E_J , avec la condition de normalisation $\sum_{j=1}^J P_j = 1$. La *probabilité* d'observer la répartition n_1, n_2, \dots, n_J est alors donnée par la loi multinomiale

$$Q(n_1, n_2, \dots, n_J | N, P_1, P_2, \dots, P_J) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_J!} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_J^{n_J}.$$

Nous avons déjà longuement discuté de cette probabilité, qui correspondait alors à la probabilité du type $\tilde{\mathbf{n}}$ pour une distribution de référence P . Son équivalent asymptotique est

$$\frac{1}{N} \log Q = -D(\tilde{\mathbf{n}} || P) = -\sum_{j=1}^J \tilde{n}_j \log \frac{\tilde{n}_j}{P_j},$$

et on retrouve l'information de KULLBACK-LEIBLER. Le principe de multiplicité maximale peut alors devenir : *compte-tenu de la répartition a priori P_j , retenir la répartition $\tilde{\mathbf{n}}$ compatible avec les données macroscopiques (macroétat) dont la probabilité soit maximale, c'est-à-dire celle qui minimise la distance de KULLBACK-LEIBLER $D(\tilde{\mathbf{n}} || P)$* . Ce nouveau principe est identique au principe que nous avons déduit du théorème de SANOV, cohérent avec les axiomatiques de (SHORE & JOHNSON 1980) et de (CSISZÁR 1991), et incorpore le principe du maximum d'entropie comme cas particulier. Ce principe consiste à sélectionner comme distribution de probabilité la distribution qui minimise l'information de KULLBACK-LEIBLER à une distribution de référence, lorsque la distribution recherchée est contrainte à appartenir à un ensemble convexe \mathcal{C} . En poursuivant cette illustration physique, nous allons maintenant donner de premiers exemples de détermination de distributions de probabilité par ce procédé.

3.2 États et distributions à entropie maximale

3.2.1 Distribution microcanonique

Le problème est donc de trouver la répartition $\tilde{\mathbf{n}} = \{\tilde{n}_j\}$ qui mène à l'entropie $H(\tilde{\mathbf{n}})$ maximale, avec la condition $\sum_{j=1}^J \tilde{n}_j = 1$. Ce problème s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \text{Max}_{\tilde{\mathbf{n}}} H(\tilde{\mathbf{n}}) \\ \text{avec } \sum_{j=1}^J \tilde{n}_j = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

On utilise pour ce faire la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE, qui consiste à écrire le Lagrangien L du problème d'optimisation

$$L(\tilde{\mathbf{n}}, \lambda) = H(\tilde{\mathbf{n}}) + \lambda \left(\sum_{j=1}^J \tilde{n}_j - 1 \right),$$

et à rechercher la séquence $\tilde{\mathbf{n}}$ et le multiplicateur de Lagrange λ tels que le Lagrangien soit respectivement maximum vis-à-vis de $\tilde{\mathbf{n}}$ et minimum par rapport à λ — on montre en effet que la solution d'un problème de minimisation sous contrainte est fournie par les premiers arguments des point-selle du Lagrangien associé au problème, (CIARLET 1982), voir également notre article en annexe C, dans lequel nous nous étendons plus longuement sur ces questions. L'annulation de la dérivée du Lagrangien fournit alors

$$\tilde{n}_j = \exp -(1 - \lambda), \text{ pour } j = 1 \dots J.$$

On en déduit que les n_j sont distribués uniformément, et la condition de normalisation fournit immédiatement

$$\tilde{n}_j = \frac{1}{n_j}, \quad j = 1 \dots J.$$

On retrouve ici le fait que l'entropie de SHANNON est maximale pour une distribution uniforme. L'état qui possède la multiplicité ou l'entropie maximale est ainsi l'état dans lequel les particules se répartissent uniformément sur tous les niveaux d'énergie. Ceci correspond bien entendu à l'intuition, et au *principe de la raison insuffisante* de LAPLACE, selon lequel en l'absence d'information, on est conduit à considérer tous les événements comme équiprobables. Cette distribution uniforme est la distribution *microcanonique*.

3.2.2 Distribution canonique

Dans l'exemple précédent, la distribution microcanonique a été obtenue par maximisation de l'entropie sans autre contrainte que la contrainte de normalisation. Implicitement, on a ainsi supposé que les caractéristiques du système, énergie, nombre de particules, étaient soit totalement libres, soit parfaitement connues. Le nombre de particules N a par exemple été supposé connu. Lorsqu'on présente la distribution microcanonique en physique, on suppose que l'énergie du système est connue, et on maximise en fait l'entropie dans la zone de l'espace des phases présentant cette énergie. Cependant, ces informations peuvent n'être connues qu'approximativement : la mesure de l'énergie du système par un moyen macroscopique ne donne accès qu'à une mesure de l'énergie moyenne. De la même manière, le nombre de particules peut être connu exactement, ou en moyenne. À ces différents niveaux de contraintes correspondent des ensembles et des distributions statistiques différentes. Lorsque l'énergie est connue en moyenne, on obtient ainsi la distribution canonique, ou distribution de BOLTZMANN-GIBBS. Quand l'énergie et le nombre de particules ne sont connus que par des données moyennes, on obtient la distribution grand canonique. Illustrons ceci pour la distribution canonique : soit \bar{E} la *valeur moyenne* de l'énergie d'une particule (c'est l'énergie moyenne du système divisé par le nombre connu de particules) :

$$\bar{E} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J n_j E_j = \sum_{j=1}^J \tilde{n}_j E_j,$$

où les E_j désignent toujours les niveaux d'énergie accessibles. Il est clair que les répartitions sur les différents niveaux d'énergie seront maintenant fonction de ces niveaux d'énergie. En particulier, l'état de multiplicité, ou d'entropie maximale, que l'on continuera pour le moment à noter $\tilde{\mathbf{n}}$ dépendra des valeurs assignées aux niveaux d'énergie E_i . Compte tenu de la contrainte sur l'énergie moyenne, cet état est maintenant solution de

$$\begin{cases} \text{Max}_{\tilde{\mathbf{n}}} S(\tilde{\mathbf{n}}), \\ \text{avec } \sum_{j=1}^J \tilde{n}_j = 1, \\ \text{et } \sum_{j=1}^J \tilde{n}_j E_j = \bar{E}. \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

Le Lagrangien est cette fois

$$L(\tilde{\mathbf{n}}, \lambda_0, \lambda_1) = S(\tilde{\mathbf{n}}) + \lambda_0 \left(\sum_{j=1}^J \tilde{n}_j - 1 \right) + \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^J \tilde{n}_j E_j - \bar{E} \right), \quad (\text{IV.22})$$

et on obtient de la même manière que précédemment :

$$\tilde{n}_j = \exp(-1 + \lambda_0 + \lambda_1 E_j). \quad (\text{IV.23})$$

On a coutume d'isoler les termes qui résultent de la contrainte de normalisation en la *fonction de partition* $Z = \exp(1 - \lambda_0)$. L'expression précédente devient alors

$$\tilde{n}_j = \frac{1}{Z} e^{\lambda_1 E_j}, \quad (\text{IV.24})$$

qui est la répartition de BOLTZMANN-GIBBS. Avec une contrainte sur la valeur moyenne de l'énergie, on obtient ainsi que les particules se répartissent proportionnellement à l'exponentielle de l'énergie de chaque niveau. BALIAN (BALIAN 1982, page 131) note que la distribution de probabilité de l'énergie *n'est pas* une exponentielle décroissante parce qu'il faut tenir compte en outre de la densité de niveaux, qui croît en général rapidement.

La prise en compte d'informations *a priori* supplémentaires, comme par exemple une répartition préférentielle sur les différents niveaux, est possible en spécifiant une distribution de probabilité de référence p et en utilisant l'entropie croisée au lieu de l'entropie simple. On obtient alors la famille exponentielle engendrée par p :

$$\tilde{n}_j = \frac{1}{Z} \exp(\lambda_1 E_j) p_j,$$

avec

$$Z = \exp(-1 + \lambda_0) = \sum_{j=1}^J e^{\lambda_1 E_j} p_j = \mathbb{E}_P \left\{ e^{\lambda_1 E_j} \right\}.$$

3.2.3 Distribution grand canonique

Dans le cas où l'on ne dispose que de données sur la valeur moyenne de l'énergie et du nombre de particules, la situation est plus difficile, puisque l'on ne peut plus raisonner uniquement sur la suite normalisée $\tilde{\mathbf{n}}$, N n'étant plus fixé. La distribution recherchée doit alors incorporer l'incertitude sur N . Notons $\rho(\mathbf{n}, N)$ cette distribution. On peut la décomposer suivant $\rho(\mathbf{n}|N)\rho(N)$, où $\rho(\mathbf{n}|N)$ est la distribution canonique obtenue avec N fixé, et $\rho(N)$ la distribution sur les valeurs possibles du nombre de particules. La maximisation de l'entropie $H(\rho(\mathbf{n}, N))$, sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^J \rho(n_j|N) E_j = \overline{E}, \\ \sum_N N \rho(N) = \overline{N}, \\ \text{et } \sum_N \sum_j \rho(\mathbf{n}, N) = 1, \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

conduit alors à

$$\rho(n_j, N) = \frac{1}{Z} \exp(\lambda_1 N + \lambda_2 E_j),$$

avec pour fonction de partition

$$Z = \exp(-1 + \lambda_0) = \sum_N \sum_{j=1}^J \exp(\lambda_1 N + \lambda_2 E_j).$$

3.2.4 Cas d'un nombre quelconque de contraintes

Ces résultats s'étendent aisément à un nombre quelconque de contraintes sur des valeurs moyennes. Si x_1, \dots, x_k sont des observables, $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_k}$ les valeurs moyennes correspondantes, la distribution $\rho(x_1, \dots, x_k)$ solution du problème de maximisation d'entropie

$$\begin{cases} \text{Max}_{\rho} H(\rho(x_1, \dots, x_k)) \\ \text{sous les contraintes } \sum_{x_i} \rho(x_1, \dots, x_k) x_i = \overline{x_i}, \quad i = 1..k \\ \text{et } \sum_{i=1}^k \sum_{x_i} \rho(x_1, \dots, x_k) = 1, \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

qui est obtenue en recherchant le minimum (par rapport à ρ) du Lagrangien

$$L(\rho(x_1, \dots, x_k), \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum_{i=1}^k \sum_{x_i} \rho(x_1, \dots, x_k) \log(\rho(x_1, \dots, x_k)) - \sum_{i=1}^k \sum_{x_i} \lambda_i \rho(x_1, \dots, x_k)(x_i - \bar{x}_i),$$

est la distribution exponentielle

$$\rho(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{Z} \exp\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right),$$

avec

$$Z = \sum_{i=1}^k \sum_{x_i} \exp\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right).$$

3.3 Propriétés de la distribution de BOLTZMANN

On présente dans ce paragraphe quelques propriétés élémentaires de la distribution de BOLTZMANN, que nous retrouverons et exploiterons dans la suite de l'exposé. On souligne en particulier le lien de conjugaison entre les valeurs moyennes et les paramètres de LAGRANGE associés.

L'entropie (croisée) associée à la distribution de BOLTZMANN-GIBBS, c'est-à-dire la valeur maximale de l'entropie pour les contraintes considérées, est

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^k \sum_{x_i} \rho(x_1, \dots, x_k) \log(\rho(x_1, \dots, x_k)) \\ &= \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{x}_i - \log(Z) \right], \end{aligned}$$

relation que nous retrouverons bien souvent dans la suite. Notons que cette expression est également la valeur prise par le Lagrangien lorsque les contraintes linéaires sont satisfaites. Le doublet (ρ, λ) étant point stationnaire du Lagrangien, il vient alors

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = \left[\bar{x}_i - \frac{\partial \log(Z)}{\partial \lambda_i} \right] = 0.$$

Les valeurs moyennes s'expriment donc comme la dérivée de la log-fonction de partition par rapport aux paramètres de LAGRANGE associés :

$$\bar{x}_i = \frac{\partial \log(Z)}{\partial \lambda_i}. \quad (\text{IV.27})$$

Remarquons encore que les variations de l'équilibre, *i.e.* une variation de \bar{E} , entraînent une variation de l'entropie proportionnelle aux paramètres de LAGRANGE :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}_i} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} [\lambda_i \bar{x}_i - \log(Z)] \\ &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial \bar{x}_i} \left\{ \bar{x}_i - \frac{\partial \log(Z)}{\partial \lambda_i} \right\} + \lambda_i. \end{aligned}$$

On en déduit que les paramètres de LAGRANGE vérifient

$$\lambda_i = \frac{\partial H}{\partial \bar{x}_i}. \quad (\text{IV.28})$$

La symétrie entre les deux relations (IV.27) et (IV.28) liant les paramètres de LAGRANGE et les valeurs moyennes par des opérations de dérivation n'est pas fortuite : en effet, les paramètres λ_i et les valeurs moyennes \bar{x}_i sont des variables *conjuguées*, et H et $\log(Z)$ forment une paire de *transformées de LEGENDRE*.

4 Premières applications pour la résolution des problèmes inverses

4.1 La méthode de GULL et DANIELL

Une des premières applications de l'entropie pour la résolution des problèmes inverses linéaires a été décrite par GULL et DANIELL (GULL & DANIELL 1978). Les auteurs utilisent un modèle de formation d'image proposé auparavant par (FRIEDEN 1972) s'inspirant directement du modèle de BOLTZMANN. Ils illustrent leur procédé sur des exemples de synthèse de FOURIER en radio-astronomie. Nous avons déjà décrit longuement le principe de ces mesures au chapitre II. Nous étions parvenus au modèle linéaire bruité

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dans lequel \mathbf{y} est le vecteur de données, \mathbf{A} une matrice de FOURIER, \mathbf{x} l'objet observé, et \mathbf{b} un bruit additif. En plus de l'échantillonnage pratiqué dans les deux domaines, on suppose que l'objet est *quantifié*, c'est-à-dire que l'intensité en chaque site est considérée comme un multiple d'un « grain d'intensité » q :

$$\begin{aligned} x_i &= n_i q, \quad \forall i = 1..J, \quad n_i \in \mathbb{N}, \\ \sum_{i=1}^J x_i &= Nq. \end{aligned}$$

L'objet de cette quantification est de permettre la présentation d'un modèle de formation d'image. Dans leur article, GULL et DANIELL nous invitent à imaginer que les images sont produites par une équipe de singes lançant N grains d'intensité sur le ciel. Cette présentation singulière a pour but de souligner que les images possibles sont aléatoires, et que la répartition, en raison sans doute des lancers mal coordonnés des singes, est souvent proche d'une répartition uniforme. Parmi les images possibles produites par les singes, certaines sont en accord avec les données disponibles, c'est-à-dire vérifient $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, au terme de bruit additif près. À chacune des configurations possibles en accord avec les données correspondent plusieurs images, déduites par permutation des grains d'intensité sur les différents sites, en conservant bien entendu les intensités inchangées. L'image qui possède la plus grande multiplicité aura alors été produite le plus grand nombre de fois. On retrouve ainsi l'argument de multiplicité de la physique statistique. Le procédé proposé consiste donc à maximiser la multiplicité en accord avec les données

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{n_1 \dots n_J} \frac{N!}{n_1! \dots n_J!} \\ \text{sous contrainte } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \end{array} \right. \quad (\text{IV.29})$$

avec la relation $x_j = qn_j$. En choisissant q assez faible (N assez grand), on fait apparaître l'entropie, et le problème d'optimisation devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{n_1 \dots n_J} - \sum \frac{n_j}{N} \log \left(\frac{n_j}{N} \right) \\ \text{sous contrainte } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (\text{IV.30})$$

La relation entre la « distribution empirique » et les intensités de l'objet est donnée par $\frac{n_j}{N} = \frac{x_j}{\sum_{j=1}^J x_j}$. Notons Φ ce flux. Le terme d'entropie s'écrit alors

$$\begin{aligned} H(x_1 \dots x_J, \Phi) &= - \sum_{j=1}^J \frac{x_j}{\Phi} \log \left(\frac{x_j}{\Phi} \right), \\ &= - \frac{1}{\Phi} \sum_{j=1}^J x_j \log(x_j) - \log(\Phi) \sum_{j=1}^J x_j. \end{aligned}$$

Le problème de reconstruction est donc finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{x_1 \dots x_J} - \sum_{j=1}^N x_j \log(x_j) - \log(\Phi) x_j \\ \text{sous contrainte } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (\text{IV.31})$$

Comme on pouvait le présager, cette procédure nécessite la connaissance du flux de l'objet. Le critère obtenu est analogue à une entropie de SHANNON, au terme correctif près prenant en compte le défaut de normalisation.

On peut donner une autre interprétation de ce critère en étudiant la distance de KULLBACK entre lois multinomiales. L'essentiel de ce développement est dû à (LE BESNERAIS 1993, pages 82–85), bien que notre argumentation soit ici assez différente. Dans la description de GULL, les grains d'intensité sont lancés uniformément sur les pixels. La probabilité d'une configuration n_1, \dots, n_J est alors donnée par la combinatoire

$$P_0(n_1, \dots, n_J) = \frac{N!}{n_1! \dots n_J!} \left[\frac{1}{J} \right]^N.$$

Supposons maintenant que les singes aient été informés de l'image qu'ils ont à créer, et qu'au lieu de lancer les grains d'intensité uniformément, ils lancent maintenant ces grains préférentiellement sur tel ou tel pixel. Cette préférence est affichée par une loi de probabilité p_1, \dots, p_J . La probabilité d'un état devient alors

$$P_1(n_1, \dots, n_J) = \frac{N!}{n_1! \dots n_J!} p_1^{n_1} \dots p_J^{n_J}.$$

Observons que la moyenne de cette distribution est simplement $Np_j, j = 1..J$. La distance de KULLBACK entre les probabilités P_0 et P_1 , correspondant à la génération des images sans et avec une information sur l'image à réaliser, est :

$$D(P_1||P_0) = \sum_{n_1, \dots, n_J} \frac{N!}{n_1! \dots n_J!} p_1^{n_1} \dots p_J^{n_J} \log(p_1^{n_1} \dots p_J^{n_J} J^N).$$

En développant et simplifiant cette expression, il apparaît que cette distance est simplement

$$D(P_1||P_0) = N \sum_{j=1, \dots, J} p_j \log(p_j) + N \log(J).$$

Si l'on retient maintenant, parmi les images générées suivant p_j , l'image moyenne $x_j = Np_j$ (ou la moyenne des images générées par les singes), le problème d'optimisation est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{p_1 \dots p_J} \sum_{j=1, \dots, J} p_j \log(p_j) \\ \mathbf{y} = N\mathbf{A}\mathbf{p}. \end{array} \right.$$

Ce dernier problème est exactement équivalent à la procédure de GULL et DANIELL. Ce raisonnement nous permet donc de donner une nouvelle interprétation à la procédure GULL et DANIELL. La minimisation de l'information de KULLBACK entre lois multinomiales, lorsque l'on impose que la moyenne d'une des distributions soit compatible avec les données nous conduit à un problème d'optimisation exprimé dans l'espace image : il s'agit de la maximisation de l'entropie de SHANNON. Il est important de noter que bien que les problèmes d'optimisation auxquels

on parvient soient identiques, les deux raisonnements sont très différents. Dans la présentation classique, on cherche à sélectionner l'image de multiplicité maximale (l'expression de la multiplicité étant approchée par l'entropie de SHANNON), alors que dans la seconde présentation, on recherche une distribution dont la moyenne satisfait les données (ici on s'est restreint à une loi multinomiale), en étant la plus proche possible, au sens de la « distance » de KULLBACK, d'une distribution de référence. Finalement, on montre que le problème de minimisation de l'information de KULLBACK se transpose en un problème de minimisation sur l'espace image, dont la solution est la moyenne recherchée. Le raisonnement de GULL et DANIELL repose sur un modèle de construction d'image construit par analogie avec le modèle de BOLTZMANN. Lorsque cette analogie n'est plus possible, par exemple si la distribution de référence est connue pour être différente d'une loi multinomiale, ce raisonnement ne pourra plus s'appliquer.

Le paragraphe suivant présente un autre exemple pour lequel le second raisonnement est à nouveau fructueux et conduit à un problème d'optimisation sur l'objet recherché, le critère associé étant en outre un critère très utilisé dans l'application envisagée.

4.2 La méthode de SHORE en analyse spectrale

Ce paragraphe reprend la présentation originale de SHORE (SHORE 1981). Le problème considéré est un problème d'analyse spectrale : il s'agit d'estimer un spectre $\bar{\mathbf{s}}$ à partir d'un vecteur d'échantillons de la fonction d'autocorrélation, \mathbf{r} . La relation entre \mathbf{r} et $\bar{\mathbf{s}}$ est une transformée de FOURIER inverse,

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{s}},$$

où \mathbf{A} est une matrice de FOURIER de dimension $M \times N$, M étant le nombre d'échantillons de la fonction de corrélation disponibles — cet échantillonnage n'étant pas nécessairement uniforme — et N le nombre d'échantillons du spectre à identifier.

La densité spectrale de puissance étant positive, l'ensemble des spectres possibles s'identifie avec \mathbb{R}^{+N} . Il reste à choisir une mesure de référence sur cet ensemble. Considérons que le signal dont on recherche la densité spectrale soit un processus gaussien. Le périodogramme est défini comme le module carré de la transformée de FOURIER d'une trajectoire du processus. Chacune des composantes du périodogramme suit alors une loi du χ^2 à deux degrés de liberté (la transformée de FOURIER d'un processus gaussien est un processus gaussien complexe, dont les parties réelle et imaginaire sont asymptotiquement indépendantes), c'est-à-dire une loi exponentielle. Par ailleurs, on montre facilement que la densité spectrale de puissance recherchée est la moyenne du périodogramme. On peut donc choisir comme mesure de référence sur l'ensemble des spectres admissibles une loi exponentielle de moyenne σ :

$$\mu(\mathbf{s}) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n} \exp\left(-\frac{s_n}{\sigma_n}\right),$$

Recherchons maintenant la solution $\bar{\mathbf{s}}$ comme la moyenne de la distribution la plus proche au sens de l'information de KULLBACK de la mesure de référence μ . Cette distribution est encore exponentielle et donnée par

$$P(\mathbf{s}) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{Z_n \sigma_n} \exp\left(\left(\chi_n - \frac{1}{\sigma_n}\right)s_n\right),$$

où l'on a noté $\chi_n = [\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}]_n$ la n^e composante de $\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}$. La fonction de partition Z_n et la moyenne sous P s'expriment comme

$$\begin{cases} Z_n = \frac{1}{1 - \sigma_n \chi_n}, \\ \bar{\mathbf{s}}_n = \frac{\sigma_n}{1 - \sigma_n \chi_n}, \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

et l'information de KULLBACK vaut alors

$$D(P||\mu) = \sum_{n=1}^N \chi_n \bar{s}_n - \log(Z_n).$$

En utilisant les deux relations (IV.32), on peut substituer Z_n et χ_n dans l'expression de la μ -entropie pour obtenir

$$D(P||\mu) = \mathcal{F}(\bar{\mathbf{s}}) = \sum_{n=1}^N \frac{\bar{s}_n}{\sigma_n} - \log\left(\frac{\bar{\mathbf{s}}_n}{\sigma_n}\right) - 1,$$

qui est la divergence d'ITAKURA-SAITO (ITAKURA & SAITO 1970) entre $\{\bar{\mathbf{s}}_n\}$ et σ_n . Ainsi, la densité spectrale recherchée est la solution du problème de programmation convexe

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{s}_n}{\sigma_n} - \log\left(\frac{\mathbf{s}_n}{\sigma_n}\right) - 1 \\ \text{sous la contrainte } \mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{s}. \end{cases}$$

Observons également que σ_n , qui est la moyenne sous μ , est aussi le minimum de la divergence d'ITAKURA-SAITO sans contrainte. Le critère obtenu consiste ainsi à minimiser la distance (au sens de l'information de KULLBACK) entre les moyennes de deux distributions ; σ_n joue alors le rôle d'une solution par défaut. Avec $\sigma_n = 1, \forall n$ on mesure la distance à un spectre uniforme, et on retrouve l'entropie de BURG.

Avec ces deux exemples, nous avons déjà obtenu deux critères « de nature entropique » pour la résolution de problèmes inverses. Nous avons surtout mis à jour un raisonnement qui conduit à ces critères : dans les deux cas, les critères obtenus correspondent à la minimisation de l'information de KULLBACK-LEIBLER entre une distribution de référence μ et une distribution dont la moyenne satisfait aux données, c'est-à-dire vérifie un système linéaire de la forme $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

CHAPITRE V

CRITÈRES DE NATURE ENTROPIQUE

Since we are looking for a statistical estimation [...] we will identify it with the maximum entropy estimate of the map, i.e. the mean value of the random map computed with a probability distribution that has maximum entropy.

J. NAVAZA (NAVAZA 1985).

Nous avons souligné dans le chapitre précédent le rôle et l'importance de l'information de KULLBACK-LEIBLER et de la μ -entropie pour la sélection d'une distribution de probabilité dans un ensemble de distributions vérifiant certaines contraintes de moment. Les deux exemples exposés en fin de ce chapitre — la reconstruction «à maximum d'entropie» de GULL et DANIELL en reconstruction d'image et la méthode de SHORE en analyse spectrale, — nous ont indiqué qu'il est possible de construire des fonctionnelles objectif en vue de la résolution de problèmes inverses linéaires, en s'appuyant sur un principe de maximum d'entropie (de μ -entropie) ou sur la minimisation de l'information de KULLBACK-LEIBLER. Ces deux exemples, et en particulier la technique de SHORE, possèdent en germe les éléments d'une technique générale de *construction de critères* régularisés, analogues à ceux annoncés dans notre chapitre de présentation des problèmes inverses — Chapitre I, §5, ces critères étant fondés sur la minimisation de l'information de KULLBACK-LEIBLER entre mesures. Nous verrons que ces critères peuvent être interprétés comme une mesure d'entropie. L'objectif du présent chapitre est bien entendu la présentation de cette méthodologie et son application à la construction de critères. Nous retrouverons ainsi nombre de critères déjà utilisés pour la résolution des problèmes inverses ; cette méthodologie permettant alors une nouvelle interprétation de ces critères, et même pour certains une première justification. Nous obtiendrons également de nouveaux critères, qui sont originaux (dans le sens «inconnus jusqu'alors») essentiellement parce qu'ils ne possèdent pas d'expression explicite, et de ce fait n'auraient pu être proposés que dans le cadre d'une approche mêlant une formulation primale et une formulation duale, comme ce sera le cas ici. Cette méthodologie est appelée maximum d'entropie pour (ou *sur*) la moyenne. Elle prend sa source dans les travaux NAVAZA (NAVAZA 1985), cité en exergue de ce chapitre. Il s'agit d'une application claire des idées de maximisation de l'entropie relative ou de minimisation de l'information de KULLBACK-LEIBLER à une mesure de référence, lorsque l'on impose certaines contraintes sur la moyenne de la distribution, cette moyenne étant finalement retenue comme estimateur. Nous reviendrons plus largement

dans la suite sur la présentation de cette méthodologie et soulignerons ses aspects remarquables. Il ne s'agit pas ici du premier exposé de cette méthode. En effet, après NAVAZA dans le domaine de la cristallographie (NAVAZA 1985, 1986, 1990), voir également (DECARREAU *et al.* 1992), un travail considérable a été réalisé au département de statistiques de l'université Paris-Sud par DACUNHA-CASTELLE et GAMBOA (DACUNHA-CASTELLE & GAMBOA 1990) puis par GAMBOA, GAMBOA et GASSIAT (GAMBOA, GAMBOA & GASSIAT 1989 — 1994), notamment en ce qui concerne la formalisation du procédé, l'extension aux espaces fonctionnels et la convergence des estimateurs, l'étude des phénomènes de super-résolution, les liens avec une approche bayésienne, et la prise en compte de perturbations sur les données. LE BESNERAIS (LE BESNERAIS 1993) en a présenté une première synthèse en vue de l'application aux problèmes de la synthèse d'ouverture en radioastronomie. La seconde synthèse que nous présentons ici, orientée vers la génération de critères pour la résolution des problèmes inverses, constitue le prolongement de la présentation de G. LE BESNERAIS dans son mémoire de thèse. Elle est le fruit de travaux communs et a profité des nombreuses discussions avec G. LE BESNERAIS. Les résultats et les publications de GAMBOA *et al.* ont constitué pour nous une source importante d'inspiration et de travail, et il est important d'inviter ici le lecteur intéressé à consulter la bibliographie de ces auteurs.

Au delà de notre vision et de nos interprétations de la méthode du maximum d'entropie pour la moyenne — que nous abrègerons en MMEM dans la suite — nous proposerons un essai de « construction axiomatique-déductive » de nos critères qu'il sera alors possible d'interpréter comme une nouvelle mesure d'information. Plusieurs exemples de critères obtenus par MMEM seront donnés. Nous donnerons en particulier une nouvelle interprétation du critère de régularisation par l'entropie de SHANNON (IV.16). Dans les méthodes fondées sur l'entropie, la prise en compte du bruit d'observation a toujours été délicate, sauf peut-être dans l'interprétation « bayésienne » de (SKILLING 1989) sur laquelle nous reviendrons. Nous proposerons pour notre part d'intégrer le bruit d'observation dans le même formalisme, ceci conduisant à bâtir une fonctionnelle adaptée à la distribution (supposée) du bruit. La sensibilité de la reconstruction à des variations sur les données est également étudiée.

Ces travaux sont en cours de publication. Afin d'alléger la présentation, nous nous appuyons dans ce chapitre sur trois articles qui complètent la présentation effectuée dans le chapitre. Le premier de ces articles, intitulé *The Maximum Entropy on the Mean Method, Noise and Sensitivity* correspond à une communication présentée au congrès *Maximum Entropy and Bayesian Methods* en Août 1994 (annexe E). La méthode y est présentée très simplement, ainsi que la technique de prise en compte du bruit et le développement de fonctions de sensibilité. On y trouvera également des résultats de simulation. Le second article (annexe F) est une communication portant le titre *Restoration of spiky signals: a new optimal estimate and a comparison* acceptée au congrès *International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing* 1995 et présentée en collaboration avec C. HEINRICH donne un exemple d'utilisation d'un critère issu de la MMEM. Un article de revue, intitulé « A new look at the entropy for solving linear inverse problems », en collaboration avec G. LE BESNERAIS, vient d'être présenté pour publication (annexe G).

Notons encore que la seconde partie de l'annexe *Probabilistic Issues in Fourier Synthesis* (annexe C) comporte plusieurs développements qui ne sont pas repris dans le corps du texte, ni les annexes de ce chapitre, et notamment le traitement du cas des signaux à valeurs complexes. Enfin, une annexe (annexe D) collecte un certain nombre de résultats mathématiques, essentiellement sur l'analyse convexe et sur la théorie des grandes déviations, sous forme de « notes de lectures ».

1 Solution du problème de maximisation de la μ -entropie

Dans le chapitre précédent, lorsque nous présentions le modèle de BOLTZMANN et la méthode de SHORE, nous avons déjà identifié la solution du problème de maximisation de l'entropie, ou de minimisation de l'information de KULLBACK relativement à une distribution de référence, à une loi exponentielle paramétrée par un multiplicateur de LAGRANGE choisi de sorte à ce que la moyenne de la distribution vérifie certaines contraintes linéaires. Ce résultat est en fait un résultat général, et s'étend au cas des distributions continues. Nous précisons ici l'énoncé du problème et donnons sa solution générale.

On considère un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ et une mesure de probabilité P . On suppose que P est absolument continue par rapport à une mesure de référence μ et on note p sa densité par rapport à μ . On définit par

$$E = \{P \mid \int_{\mathcal{X}} a_i(x) dP(x) = y_i, i = 1..M\}$$

l'ensemble des distributions P de moyenne y . Dans nos applications, l'espace \mathcal{X} sera simplement \mathbb{R}^N ou \mathbb{C}^N , x un vecteur de \mathbb{R}^N ou \mathbb{C}^N , noté \mathbf{x} ; les M contraintes de moyenne seront des contraintes linéaires représentées par un opérateur linéaire A dont la représentation matricielle sera notée \mathbf{A} . Enfin, on notera \mathbf{y} le vecteur des valeurs moyennes y_i $i = 1..M$ défini sur \mathbb{R}^M ou \mathbb{C}^M . Les expressions données ici ne sont valables que dans \mathbb{R} ; on trouvera certains résultats pour \mathbf{x} et \mathbf{y} complexes dans l'annexe C.

Le problème de maximisation de la μ -entropie, ou de minimisation de l'information de KULLBACK de P sur μ si μ est une mesure de probabilité, s'écrit alors :

$$P^* = \arg \max_{P \in E} H_{\mu}(P) = \arg \min_{P \in E} D(P \parallel \mu). \quad (\text{V.1})$$

On peut alors considérer le Lagrangien de ce problème d'optimisation, prenant en compte les M contraintes définies par $P \in E$ auxquelles on adjoint la contrainte de normalisation $\int_{\mathcal{X}} dP = 1$:

$$L(P, \lambda_1, \dots, \lambda_M, \beta) = \int_{\mathcal{X}} dP(x) \left(\log \left(\frac{dP}{d\mu}(x) \right) - \sum_{i=1}^M \lambda_i (a_i(x) - y_i) - \beta \right) + \beta,$$

où les λ_i et β sont des multiplicateurs de LAGRANGE. On peut encore réécrire cette expression en fonction de la densité p

$$L(P, \lambda_1, \dots, \lambda_M, \beta) = \int_{\mathcal{X}} p(x) \left(\log(p(x)) - \sum_{i=1}^M \lambda_i (a_i(x) - y_i) - \beta \right) d\mu(x) + \beta.$$

Il est facile de vérifier que la densité

$$p_{\lambda}(x) = \frac{dP_{\lambda}}{d\mu}(x) = \exp \left((\beta - 1) + \sum_{i=1}^M \lambda_i a_i(x) \right) \quad (\text{V.2})$$

rend minimum l'intégrande en tout x . Il reste à vérifier que l'extremum ainsi défini est bien un minimum. Pour cela, on considère ensuite une autre distribution P appartenant à E , et on compare $D(P \parallel \mu)$ et $D(P_{\lambda} \parallel \mu)$. Si P n'est pas absolument continue par rapport à μ , $D(P \parallel \mu)$ est infinie et donc clairement supérieure à $D(P_{\lambda} \parallel \mu)$. Dans le cas contraire, puisque P_{λ} est équivalente à μ , $P \ll P_{\lambda}$, et on peut écrire

$$\frac{dP}{d\mu} = \frac{dP}{dP_{\lambda}} \frac{dP_{\lambda}}{d\mu},$$

et

$$\int dP \log \left(\frac{dP}{d\mu} \right) = \int dP \log \left(\frac{dP}{dP_\lambda} \right) + \int dP \log \left(\frac{dP_\lambda}{d\mu} \right).$$

En raison de la positivité de l'information de KULLBACK, on a alors

$$D(P||\mu) = \int dP \log \left(\frac{dP}{d\mu} \right) \geq \int dP \log \left(\frac{dP_\lambda}{d\mu} \right).$$

Compte tenu de l'expression de P_λ , le membre de droite de cette équation est

$$\begin{aligned} & \int dP(x) \left(\beta - 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i a_i(x) \right), \\ & = (\beta - 1) + \sum_{i=1}^M \lambda_i y_i \end{aligned}$$

puisque P appartient par hypothèse à E . Cette expression étant justement $D(P_\lambda||\mu)$, on obtient finalement l'inégalité recherchée

$$D(P||\mu) \geq D(P_\lambda||\mu),$$

qui indique que la distribution qui réalise le minimum de l'information de KULLBACK-LEIBLER à μ est effectivement un membre de la famille exponentielle (V.2).

On fait souvent apparaître la fonction de partition $Z(\lambda)$ plutôt que le paramètre de LAGRANGE β . En posant simplement $1 - \beta = \log(Z(\lambda))$, l'expression (V.2) devient

$$dP_\lambda(x) = \frac{1}{Z(\lambda)} \exp \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i a_i(x) \right) d\mu(x), \quad (\text{V.3})$$

et la fonction de partition est liée aux paramètres de LAGRANGE λ_i par la condition de normalisation, ce qui entraîne

$$Z(\lambda) = \int \exp \left(\sum_{i=1}^M \lambda_i a_i(x) \right) d\mu(x).$$

Le domaine de définition de la fonction de partition est noté D_Z :

$$D_Z = \{\lambda \in \mathbb{R}^M | Z(\lambda) < \infty\}.$$

La fonction des paramètres de LAGRANGE définie en remplaçant P par la solution paramétrée P_λ dans l'expression du Lagrangien

$$D(\lambda) = L(P_\lambda, \lambda)$$

est la fonction duale associée au problème d'optimisation initial (V.1). Elle a pour expression

$$D(\lambda) = \lambda^t \mathbf{y} - \log(Z(\lambda)) = \lambda^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\lambda).$$

On utilisera dès à présent la notation $\mathcal{F}^*(\lambda) = 1 - \beta = \log(Z(\lambda))$, qui possède le même domaine de définition D_Z . Cette fonction se révélera intimement liée aux critères que nous mettrons en évidence, et cette notation n'est pas innocente. Certains des résultats que nous utiliserons sont également liés à l'appartenance de la solution à une famille exponentielle.

La fonction duale est une fonction strictement concave (cette stricte concavité est liée à la stricte convexité de $\log(Z(\lambda))$, voir l'annexe D) dont le maximum fournit les paramètres de

LAGRANGE λ^* tels que les contraintes définies par $P \in E$ soient vérifiées par la distribution $P^* = P_{\lambda^*}$. Ceci se vérifie facilement en écrivant que la dérivée de $D(\lambda)$ est nulle pour $\lambda = \lambda^*$:

$$\left. \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = \mathbf{0},$$

ce qui conduit alors à

$$\int a_i(x) dP^*(x) = y_i, \quad i = 1..M$$

La maximisation de la fonction duale $D(\lambda)$ fournit ainsi les paramètres de la solution. Ce résultat est en fait général : à un problème de minimisation (convexe) sous contraintes, on peut toujours associer un problème de maximisation d'une fonctionnelle (concave), cette maximisation étant également sous contrainte dans le cas général, mais dont les contraintes sont souvent plus simples, ou inexistantes. Lorsque ces deux problèmes duals admettent une solution, les valeurs prises par à l'optimum par les deux problèmes sont égales. On parle de « *dual attainment* » dans la littérature anglo-saxonne. La manière la plus classique de présenter ces résultats d'analyse convexe est d'utiliser la théorie des multiplicateurs de LAGRANGE. On trouvera dans la deuxième partie de l'annexe C une présentation de certains résultats de dualité. D'autres résultats de dualité, qui nous seront directement utiles dans le corps de ce texte, seront présentés au paragraphe §3.

On peut illustrer les résultats mentionnés ci-dessus sur le problème d'optimisation qui nous préoccupe ici : la minimisation de l'information de KULLBACK-LEIBLER $D(P||\mu)$ sous la contrainte $P \in E$ — Équation (V.1). À ce problème de minimisation convexe correspond un problème de maximisation concave, la maximisation de la fonction duale $D(\lambda)$, cette maximisation étant menée pour $\lambda \in D_Z$. Ce problème peut être sans contrainte lorsque le domaine de définition D_Z est \mathbb{R}^M tout entier. Il nous reste à constater que les deux problèmes prennent la même valeur à l'optimum : si λ^* est le vecteur des paramètres de LAGRANGE, l'information de KULLBACK $D(P_{\lambda^*}||\mu)$ vaut $\lambda^{*t} \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\lambda)$, ce qui est justement la valeur prise par la fonction duale pour $\lambda = \lambda^*$.

Nous avons dans ce qui précède implicitement supposé acquise l'existence de la solution. L'existence de cette solution a été étudiée par CSISZÁR qui donne trois conditions suffisantes (CSISZÁR 1984) :

1. il existe au moins une mesure équivalente à μ dans E ,
2. le domaine de définition D_Z est non vide,
3. D_Z est ouvert dans \mathbb{R}^M .

Les deux premières conditions assurent l'existence d'une borne inférieure à la μ -entropie d'une part, et d'autre part l'existence d'une suite de mesures P_n^* convergeant, au sens de l'information de KULLBACK, vers la solution P^* du problème de minimisation de l'information de KULLBACK par rapport à μ sur l'ensemble E :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(P_n||P^*) = 0.$$

La seconde condition est analogue à la condition que nous utilisons lors de la présentation du théorème de SANOV pour assurer l'existence d'une suite de mesures convergeant vers P^* . Elle est ici particularisée pour les membres de la famille exponentielle. Notons encore que la convergence au sens de l'information de KULLBACK indiquée ci-dessus s'interprète clairement à l'aide de l'inégalité triangulaire présentée à la fin du §2.3.2. Ces deux conditions suffisent

pour identifier P^* avec l'élément de la famille exponentielle (V.3) associé aux paramètres de LAGRANGE solutions du problème dual $D(\lambda)$. Enfin, la dernière condition permet d'assurer l'appartenance de la solution à l'ensemble E .

2 Propriétés de grandes déviations et entropies de niveau 1

La théorie des grandes déviations s'intéresse au taux de décroissance exponentielle de la probabilité de grands écarts d'une moyenne empirique à la moyenne exacte. On distingue trois niveaux de résultats de grandes déviations, selon que l'on s'intéresse à une moyenne empirique (niveau 1), à une distribution empirique (niveau 2) ou à un processus empirique (niveau 3). Dans chacune de ces situations, le taux de décroissance exponentiel est gouverné par une mesure de dissemblance qu'on appelle entropie (de niveau 1, 2 ou 3). Par ailleurs, ces différents niveaux d'entropie sont liés par des *principes de contraction*. Nous avons déjà identifié l'entropie de niveau deux dans le chapitre précédent (théorème de SANOV) : il s'agit de l'information de KULLBACK-LEIBLER. Nous nous proposons dans cette section de définir les entropies de niveau 1, qui interviendront dans nos critères entropiques, et de présenter une première fois le principe de contraction entre les deux premiers niveaux d'entropie. Le but de cette section est donc de préparer l'exposé de cette méthodologie de « construction » de critères pour la résolution des problèmes inverses, en poursuivant notre étude des propriétés des N -échantillons débutée au chapitre précédent.

La théorie des grandes déviations est une théorie complexe pour laquelle existent des résultats mathématiques très élaborés. Il n'est pas dans notre propos d'en présenter une synthèse rigoureuse. Nous tâcherons de donner une idée, parfois heuristique, des résultats qui nous concernent directement. Des résultats plus précis sont donnés dans l'annexe D ; on pourra également se reporter à des ouvrages généraux comme (ELLIS 1985, DEMBO & ZEITOUNI 1992) ou (AZENCOTT 1978).

2.1 Motivations

La loi des grands nombres indique que la distribution empirique tend vers P lorsque la taille de l'échantillon augmente, et la probabilité que la distribution empirique appartienne à un voisinage arbitrairement faible de P tend vers 1. La probabilité que la distribution empirique appartienne à un autre ensemble E tend quant à elle vers 0, et cet événement constitue une *déviaton* à la loi des grands nombres. Nous avons ainsi noté (théorème de SANOV) que cette probabilité décroît exponentiellement, le taux de décroissance étant gouverné par l'information de KULLBACK entre la distribution limite P et la distribution \tilde{P} de E la plus « proche » de P :

$$Q(P_N \in E) \approx \exp \left(-N \inf_{\tilde{P} \in E} D(\tilde{P}||P) \right).$$

Notons que la distribution empirique n'est pas absolument continue par rapport à P si cette dernière est une distribution continue ; de ce fait, l'information $D(P_N||P)$ est en général infinie, et la distribution qui réalise le minimum de $D(\tilde{P}||P)$ sur $\tilde{P} \in E$ est alors différente de P_N .

Si on s'intéresse maintenant non plus à la distribution empirique mais à la moyenne empirique $\langle X \rangle_N$, on peut faire les mêmes observations : la loi des grands nombres spécifie que la moyenne empirique tend vers la moyenne sous P , $\overline{X} = E_P \{X\}$, et la probabilité qu'une moyenne empirique appartienne à un ensemble ne contenant pas \overline{X} décroît vers zéro. Le taux de cette décroissance constitue une mesure de dissemblance entre la moyenne empirique et \overline{X} . Cette mesure de dissemblance se révélera fondamentale dans la construction de nos critères de

nature entropique. On peut déjà annoncer le résultat afin d'en donner ensuite une interprétation physique :

$$Q(\langle X \rangle_N \in A) \approx \exp \left(-N \operatorname{Inf}_{x \in A} \mathcal{F}(x, \bar{X}) \right),$$

où la fonction \mathcal{F} est une fonction convexe, non négative, ne s'annulant qu'en $\langle X \rangle_N = \bar{X}$. Supposons pour l'instant que A est constitué par un voisinage $[X^* - \varepsilon, X^* + \varepsilon]$ de X^* . Il s'agit par exemple de la mesure ou la donnée d'une valeur moyenne avec une précision finie. Lorsque ε tend vers zéro, on peut approcher la probabilité précédente par

$$Q(\langle X \rangle_N \in A) \approx \exp \left(-N \mathcal{F}(X^*, \bar{X}) \right).$$

Considérons un système décrit complètement par la spécification de N grandeurs de même type X_1, \dots, X_N (il s'agira par exemple de la donnée des énergies de N particules — cf l'exemple du modèle de BOLTZMANN). La valeur X^* définit ainsi un macroétat possible de ce système. La probabilité $Q(\langle X \rangle_N \in A)$ est alors la probabilité de ce macroétat, et la fonction $\mathcal{F}(X^*, \bar{X})$ représente une mesure de la multiplicité des microétats (c'est-à-dire le nombre de séquences X_1, \dots, X_N) compatibles avec ce macroétat (telles que $\langle X \rangle_N \in A$): plus $\mathcal{F}(X^*, \bar{X})$ est faible, plus la probabilité du macroétat (et sa multiplicité) est importante. Nous avons vu que cette probabilité est également donnée par l'exponentielle de l'information de KULLBACK-LEIBLER entre la distribution empirique et la distribution exacte. On pressent donc que cette fonction \mathcal{F} et l'information de KULLBACK sont liées.

Dans un second temps, supposons que A est cette fois-ci défini par une mesure *indirecte* d'une valeur moyenne, par exemple $A = \{X | y = \phi(X)\}$, et que l'on recherche cette valeur moyenne. Si ϕ n'est pas inversible, plusieurs macroétats $\langle X \rangle_N$ seront compatibles avec A . En remarquant que la probabilité $Q(\langle X \rangle_N \in A)$ est dominée par l'état X^* tel que

$$X^* = \operatorname{arg\,min}_{\langle X \rangle_N \in A} \mathcal{F}(\langle X \rangle_N, \bar{X}),$$

qui possède, parmi les états compatibles avec A , la probabilité (et la multiplicité) maximale, on retiendra celui-ci pour la valeur moyenne recherchée. Il s'agit encore ici d'un principe de multiplicité maximale.

2.2 Principe de contraction, entropies de niveau 1

Nous ne donnerons ici de résultat que dans le cas d'un espace d'état fini, c'est-à-dire que nous considérons une variable aléatoire X susceptible de ne prendre que r valeurs distinctes. Nous poursuivons en fait l'étude des N échantillons, où les variables prenaient leurs valeurs dans un alphabet à r lettres a_1, \dots, a_r . On pourra se reporter à l'annexe D, ou au livre de BERGER (BERGER 1992, pages 70 – 75) qui donne une démonstration assez simple du résultat de grandes déviations de niveau 1.

On considère donc un N -échantillon X_1, \dots, X_N obtenu suivant la distribution P , et on s'intéresse à caractériser la distribution de probabilité de la moyenne empirique $\langle X \rangle_N$

$$\langle X \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

On notera \mathcal{X}_N l'ensemble des moyennes empiriques possibles avec l'alphabet a_1, \dots, a_r et N échantillons. Nous continuerons d'autre part à noter \mathcal{P}_N l'ensemble des distributions empiriques pour N échantillons. Selon la loi des grands nombres, cette moyenne converge presque sûrement vers la moyenne sous P ,

$$\bar{X} = E_P \{X\} = \sum_{i=1}^r a_i P_i.$$

Soit A un ensemble fermé dont l'intérieur ne contient pas la moyenne \bar{X} , et tel que la probabilité $Q(\langle X \rangle_N \in A)$ soit non nulle à partir d'un certain N_0 . La probabilité de l'événement $\langle X \rangle_N \in A$, tend vers zéro lorsque N grandit. Rappelons maintenant le résultat de grande déviation de niveau 2 : si $\langle P \rangle_N$ note la distribution empirique, et E est un ensemble de distributions, la probabilité $Q(\langle P \rangle_N \in E)$ vérifie

$$\frac{1}{N} \lim_{N \rightarrow \infty} \log(Q(\langle P \rangle_N \in E)) = - \inf_{\tilde{P} \in E} D(\tilde{P} \| P).$$

Dans la mesure où la moyenne empirique est l'espérance sous la distribution empirique, l'événement $\langle X \rangle_N \in A$ coïncide avec l'événement « $\langle P \rangle_N \in E_A$ », si E_A désigne l'ensemble des distributions dont la moyenne appartient à A ,

$$E_A = \{P | \forall x \in A, \sum_{i=1}^r a_i P_i = x\}$$

et les deux probabilités $Q(\langle X \rangle_N \in E)$ et $Q(\langle P \rangle_N \in E_A)$ sont égales. Par conséquent,

$$\frac{1}{N} \lim_{N \rightarrow \infty} \log(Q(\langle X \rangle_N \in A)) = - \inf_{\tilde{P} \in E_A} D(\tilde{P} \| P).$$

On peut évaluer ce minimum en deux étapes : en effet, en désignant par E_x l'ensemble des distributions empiriques de moyenne x ,

$$\inf_{\tilde{P} \in E_A} D(\tilde{P} \| P) = \inf_{x \in A} \inf_{\tilde{P} \in E_x} D(\tilde{P} \| P).$$

La minimisation de l'information de KULLBACK-LEIBLER $D(\tilde{P} \| P)$ sur E_x conduit à la famille exponentielle

$$\begin{cases} \tilde{P}_k = \exp(a_k \lambda - \mathcal{F}^*(\lambda)) P_k, \\ \text{avec } \mathcal{F}^*(\lambda) = \log(\sum_{k=1}^r \exp(a_k \lambda) P_k). \end{cases}$$

Le paramètre de Lagrange λ est solution de la maximisation de la fonction duale

$$D(\lambda) = \lambda x - \mathcal{F}^*(\lambda).$$

Comme nous l'avons déjà signalé, les valeurs prises à l'optimum par les problèmes dual et primal sont égales (voir les remarques dans la section précédente, et §3), et

$$\inf_{\tilde{P} \in E_x} D(\tilde{P} \| P) = \sup_{\lambda} \{\lambda x - \mathcal{F}^*(\lambda)\}.$$

En notant maintenant $\mathcal{F}(x)$ la fonction de x

$$\mathcal{F}(x) = \sup_{\lambda} \{\lambda x - \mathcal{F}^*(\lambda)\}, \tag{V.4}$$

il vient enfin

$$\frac{1}{N} \lim_{N \rightarrow \infty} \log(Q(\langle X \rangle_N \in A)) = - \inf_{x \in A} \inf_{\tilde{P} \in E_x} D(\tilde{P} \| P) = - \inf_{x \in A} \mathcal{F}(x), \quad (\text{V.5})$$

ou encore

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \log(Q(\langle X \rangle_N \in A)) = \exp \left(-N \inf_{x \in A} \mathcal{F}(x) \right) \quad (\text{V.6})$$

qui est le résultat de grandes déviations de niveau 1. La fonction $\mathcal{F}(x)$ définie par (V.4) est l'entropie de niveau 1 associée à la distribution de référence P . Le calcul que nous venons de mener est un *principe de contraction* qui permet de relier l'entropie de niveau 2 aux entropies de niveau 1 :

$$\boxed{\mathcal{F}(x) = \inf \{ D(\tilde{P} \| P) | E_{\tilde{P}}\{X\} = x \} ;}$$

nous aurons l'occasion de retrouver et réutiliser ce principe de contraction lorsque nous présenterons la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne. Notons enfin que la relation (V.4) entre l'entropie de niveau 1 $\mathcal{F}(x)$ et $\mathcal{F}^*(\lambda)$ est une transformation de LEGENDRE-FENCHEL, ou conjuguée convexe. Dans la mesure où $\mathcal{F}^*(\lambda)$ est aussi la fonction génératrice des cumulants de la loi P , la fonction $\mathcal{F}(x)$ est également, par définition, une transformée de CRAMÉR.

3 Quelques résultats de dualité

Dans la mesure où nous utilisons plusieurs résultats de dualité et d'analyse convexe dans l'exposé, nous regroupons plusieurs résultats importants dans ce paragraphe. Nous présentons en particulier quelques résultats s'appuyant sur la théorie de la dualité de FENCHEL, qui est bien moins connue que les techniques issues de la dualité de LAGRANGE. Des références importantes sur le sujet sont les ouvrages (LUENBERGER 1969) et (ROCKAFELLAR 1970) ; on pourra également consulter la synthèse récente (ROCKAFELLAR 1993).

3.1 Dualité de LAGRANGE

Nous nous intéressons ici aux problèmes de « programmation convexe », c'est-à-dire aux problèmes d'optimisation sous contrainte qui s'écrivent sous la forme

$$(P) \quad \begin{cases} \mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \\ \text{sous les contraintes } \mathbf{x} \in \mathcal{X}, H(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{V.7})$$

où \mathcal{X} est un ensemble convexe, H une fonction convexe définie de \mathcal{X} dans un espace normé E , et \mathcal{F} une fonctionnelle convexe à valeurs réelles. Pour de tels problèmes, la théorie des lagrangiens est très efficace. La fonctionnelle de LAGRANGE, ou lagrangien, est définie par

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) - \langle H(\mathbf{x}), \boldsymbol{\lambda} \rangle, \quad (\text{V.8})$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ appartient à E^* , l'espace dual de E (l'espace des fonctionnelles linéaires bornées sur E).¹ Le résultat principal de la théorie des lagrangiens est la condition de « point-selle » : si le lagrangien possède un point-selle en $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$, c'est-à-dire

$$L(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = \inf_{\mathbf{x}} \sup_{\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}} \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}),$$

1. Le lagrangien est souvent défini avec un signe plus avant le produit de dualité. Les résultats sont identiques, sauf en ce qui concerne le domaine de définition de $\boldsymbol{\lambda}$. La définition que nous adoptons ici nous permettra d'obtenir des expressions cohérentes avec les résultats de la théorie de la dualité de FENCHEL.

alors \mathbf{x}_0 est solution du problème sous contrainte (P). On peut aussi profiter de la dualité de LAGRANGE : la fonction duale correspondant au problème (P) est définie par

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}),$$

et le résultat de dualité de LAGRANGE spécifie que

$$\inf_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda} \leq 0} D(\boldsymbol{\lambda})$$

3.2 Dualité de FENCHEL

Les problèmes d'optimisation convexe peuvent également être résolus en utilisant la théorie de la dualité de LEGENDRE-FENCHEL. Bien qu'il y ait des liens forts entre ces deux théories, elles ont été développées et ont évolué séparément. La MEM repose plus clairement sur certains résultats et outils de la théorie de la dualité de FENCHEL.

3.2.1 Fonctions convexes conjuguées

Nous introduisons tout d'abord la notion d'ensemble conjugué et de fonctionnelles convexes conjuguées. Soit \mathcal{F} une fonctionnelle convexe définie sur un sous-ensemble \mathcal{C} d'un espace normé \mathcal{X} . L'ensemble conjugué \mathcal{C}^* est défini par

$$\mathcal{C}^* = \{x^* \in \mathcal{X}^* : \sup_{x \in \mathcal{C}} \{ \langle x, x^* \rangle - \mathcal{F}(x) \} < \infty \},$$

et la fonctionnelle convexe conjuguée est alors définie sur cet ensemble \mathcal{C}^* par

$$\mathcal{F}^*(x^*) = \sup_{x \in \mathcal{C}} \{ \langle x, x^* \rangle - \mathcal{F}(x) \}.$$

En tant que supremum de fonctions continues, \mathcal{F}^* est elle-même convexe (voir l'annexe D). De plus, si on note $[\mathcal{F}, \mathcal{C}]$ l'épigraphe de \mathcal{F} sur \mathcal{C} , *i.e.* $[\mathcal{F}, \mathcal{C}] = \{r \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{C} : \mathcal{F}(x) \leq r\}$, alors $[\mathcal{F}, \mathcal{C}]^*$ est aussi convexe. Si $[\mathcal{F}, \mathcal{C}]$ est fermé, alors $**[[\mathcal{F}, \mathcal{C}]^*] = [\mathcal{F}, \mathcal{C}]$, où $**$ représente la conjuguée définie sur \mathcal{X}^* . Plaçons nous dans le cas scalaire, et considérons à nouveau la définition de la conjuguée convexe, avec $t = x$, et $s = x^*$:

$$\mathcal{F}^*(s) = \sup_t \{st - \mathcal{F}(t)\}. \quad (\text{V.9})$$

On suppose que $\mathcal{F}(t)$ est différentiable sur son domaine de définition, et l'on note t_s la valeur de t rendant maximum $\{st - \mathcal{F}(t)\}$. Dans ces conditions,

$$\begin{cases} \mathcal{F}^*(s) = st_s - \mathcal{F}(t_s), \\ \text{avec } s - \mathcal{F}'(t_s) = 0. \end{cases}$$

Examinons maintenant l'expression de la dérivée de $\mathcal{F}^*(s)$ par rapport à s :

$$\mathcal{F}^{*\prime}(s) = t_s + t'_s[s - \mathcal{F}'(t_s)] = t_s;$$

on obtient ainsi la relation

$$\mathcal{F}^{*\prime}(s) = \mathcal{F}'^{-1}(s),$$

c'est-à-dire que les dérivées de \mathcal{F} et de sa conjuguée \mathcal{F}^* sont réciproques l'une de l'autre. Ce résultat peut se généraliser pour des fonctions convexes fermées (semi-continues inférieurement) définies sur \mathbb{R}^M , à l'aide de la notion de sous-différentielle, voir (ELLIS 1985, chapitre 6) et l'annexe D. Afin de déterminer l'expression de \mathcal{F}^* , il faut donc dériver \mathcal{F} , puis calculer sa réciproque $\mathcal{F}'^{-1} = \mathcal{F}^{*\prime}$. Il faut enfin intégrer l'expression obtenue. Il est possible d'éviter cette intégration en utilisant la relation $\mathcal{F}^*(s) = st_s - \mathcal{F}(t_s)$, ainsi que $\mathcal{F}^{*\prime}(s) = t_s$. On obtient alors

$$\mathcal{F}^*(s) = s\mathcal{F}^{*\prime}(s) - \mathcal{F}(\mathcal{F}^{*\prime}(s)). \quad (\text{V.10})$$

Notons encore qu'en dérivant à nouveau les relations $\mathcal{F}^{*\prime}(s) = t_s$ et $s = \mathcal{F}'(t_s)$ par rapport à s , on obtient respectivement $\mathcal{F}^{*\prime\prime}(s) = t'_s$ et $t'_s \mathcal{F}''(t_s) = 1$. On en déduit que

$$\mathcal{F}^{*\prime\prime}(s)\mathcal{F}''(t_s) = 1,$$

soit $\mathcal{F}^{*\prime\prime-1} = \mathcal{F}''$.

Nous avons supposé ici que \mathcal{F} et \mathcal{F}^* sont différentiables sur l'intérieur de leur domaine, ce qui est le cas si elle sont « essentiellement douces », et noterons \mathcal{F}' et $\mathcal{F}^{*\prime}$ leurs gradients. On notera également $\partial\mathcal{F}(t)$ la sous-différentielle de \mathcal{F} en t (l'ensemble des sous-gradients de \mathcal{F} en t , voir annexe D). Nous nous contenterons de donner ici les propriétés essentielles des fonctions convexes conjuguées. Pour des fonctions convexes fermées sur \mathbb{R}^M , on a les propriétés suivantes (ELLIS 1985, théorème VI.5.3, page 221)

- (a) \mathcal{F}^* est une fonction convexe fermée sur \mathbb{R}^M ,
- (b) $\langle s, t \rangle \leq \mathcal{F}(t) + \mathcal{F}^*(s)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}^M$,
- (c) $\langle s, t \rangle = \mathcal{F}(t) + \mathcal{F}^*(s)$ ssi $s \in \partial\mathcal{F}(t)$ (condition analogue à $s - \mathcal{F}'(t_s) = 0$),
- (d) $s \in \partial\mathcal{F}(t)$ ssi $t \in \partial\mathcal{F}^*(s)$ (condition analogue à la réciprocity des dérivées $\mathcal{F}^{*\prime}(s) = \mathcal{F}'^{-1}(s)$)
- (e) $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$, ce qui signifie que \mathcal{F} est aussi la convexe conjuguée de \mathcal{F}^* .

Parmi ces propriétés, la propriété (e), qui indique que la conjugaison convexe est « réversible » si la fonction initiale \mathcal{F} est convexe fermée, est particulièrement importante pour nos applications.

3.2.2 Théorème de dualité de FENCHEL

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de dualité de FENCHEL. Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux fonctionnelles, respectivement convexes et concaves définies sur \mathcal{C} et \mathcal{D} , alors

$$\mu = \inf_{x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \{\mathcal{F}(x) - \mathcal{G}(x)\} = \sup_{x^* \in \mathcal{C}^* \cap \mathcal{D}^*} \{\mathcal{G}^*(x^*) - \mathcal{F}^*(x^*)\}.$$

sous les conditions suivantes : $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ contient des points dans l'intérieur relatif de \mathcal{C} et \mathcal{D} (voir l'annexe D pour la définition de l'intérieur relatif), l'un au moins des ensembles $[\mathcal{F}, \mathcal{C}]$ et $[\mathcal{G}, \mathcal{D}]$ est d'intérieur non vide, et μ est fini.

Nous pouvons maintenant décrire avec quelques détails l'application de ces résultats au cas d'un problème de programmation convexe avec contraintes égalité. Soit \mathcal{F} une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble convexe \mathcal{C} , et considérons par exemple le problème (P_L)

$$(\text{P}_L) \quad \inf_x \mathcal{F}(x) \text{ sous les contraintes } y = Ax, x \in \mathcal{C}.$$

En introduisant \mathcal{C}_y l'ensemble convexe défini par $\mathcal{C}_y = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$, le problème (P_L) s'écrit

$$(P_L) \quad \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}_y \cap \mathcal{C}} \mathcal{F}(\mathbf{x}).$$

Si on prend maintenant $\mathcal{G} = 0$ sur \mathcal{C}_y pour la fonctionnelle concave dans le théorème de dualité de FENCHEL, on obtient alors

$$\inf_{\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_y} \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathcal{C}^* \cap \mathcal{C}_y^*} \{\mathcal{G}^*(\mathbf{x}^*) - \mathcal{F}^*(\mathbf{x}^*)\}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(\mathbf{x}^*) &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle - \mathcal{F}(\mathbf{x})\}, \\ \mathcal{G}^*(\mathbf{x}^*) &= \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}_y} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle = \inf_{\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle. \end{aligned}$$

La fonctionnelle concave conjuguée n'est finie que lorsque \mathbf{x}^* vérifie

$$\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}.$$

En effet, si \mathbf{x}_0 est un vecteur de \mathcal{C}_y , alors tout $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$, où \mathbf{u} appartient à l'espace nul de \mathbf{A} , appartient à \mathcal{C}_y ; il suffit alors de prendre $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \infty \mathbf{u}$, pour rendre $\mathcal{G}^*(\mathbf{x}^*)$ infini, à moins que $\mathbf{x}^{*t} \mathbf{u} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire si \mathbf{x}^* est de la forme $\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_y^* &= \{\mathbf{x}^* : \mathbf{x}^* = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}\}, \\ \text{et } \mathcal{G}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) &= \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y}. \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G}^*(\mathbf{x}^*) = \mathcal{G}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y}.$$

Le problème initial s'écrit donc

$$\sup_{\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{C}^* \cap \mathcal{C}_y^*} \{\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})\} = \sup_{\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{C}^* \cap \mathcal{C}_y^*} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \{\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathcal{F}(\mathbf{x})\} \right\},$$

où la maximisation est conduite pour $\boldsymbol{\lambda}$ tel que \mathbf{x}^* appartienne à $\mathcal{C}^* \cap \mathcal{C}_y^*$. S'il arrive que $\mathcal{C}^* \cap \mathcal{C}_y^* = \mathcal{C}_y^*$, alors le problème en $\boldsymbol{\lambda}$ est non contraint et devient

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda}} \{\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})\}.$$

Observons que ce résultat est cohérent avec la fonction duale obtenue à partir du lagrangien : pour le problème (P_L), le lagrangien est

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y},$$

et la condition de point-selle fournit

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} + \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \{\mathcal{F}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}\mathbf{x}\}$$

soit

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathcal{F}(\mathbf{x}) \} = \{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \}.$$

Les résultats de la théorie de la dualité de FENCHEL possèdent des extensions dans le cas d'une formulation intégrale — voir en particulier (BORWEIN & LEWIS 1991) et (ROCKAFELLAR 1970) pour une présentation complète et rigoureuse de ce sujet — par exemple pour des problèmes de minimisation « de type entropique » de la forme

$$(P_i) \quad \begin{cases} \inf_p H(p) = \inf_p \int h(p(\mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x}) \\ \text{s.c. } \mathbf{y} = \int \mathbf{A}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (V.11)$$

Lorsque h est un «intégrande convexe normal»² au sens de ROCKAFELLAR (ROCKAFELLAR 1970), alors la conjuguée convexe de $H(p)$ est simplement

$$H^*(p^*) = \int h^*(p^*(\mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x}),$$

avec p^* tel que l'intégrale soit finie. En suivant les mêmes étapes que précédemment, il apparaît que le problème intégral est équivalent à

$$(Q_i) \quad \sup_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \int h^*((\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})(\mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x}) \right\},$$

qui peut également être non contraint en $\boldsymbol{\lambda}$.

3.2.3 Relation entre les solutions des problèmes primal et dual

Lorsqu'un problème d'optimisation est résolu en utilisant sa formulation duale, nous devons exprimer la solution des problèmes de minimisation (P_L) ou (P_i), appelés *problème primals* en fonction des solutions $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ des problèmes de maximisation, les *problèmes duals*. Sous des conditions peu restrictives, les solutions optimales sont liées par une simple dérivation (voir à nouveau (BORWEIN & LEWIS 1991) ou (DECARREAU *et al.* 1992)) :

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathcal{F}'(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \Big|_{\boldsymbol{\lambda}=\bar{\boldsymbol{\lambda}}} \text{ pour les problèmes } P_L \text{ et } (Q_L) \quad (V.12)$$

$$\overline{p(\mathbf{x})} = h^*((\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})(\mathbf{x})) \Big|_{\boldsymbol{\lambda}=\bar{\boldsymbol{\lambda}}} \text{ pour les problèmes } (P_i) \text{ et } (Q_i) \quad (V.13)$$

Donnons ici un argument à l'appui de ce résultat. L'application du théorème de dualité de FENCHEL au problème d'optimisation P_i fournit

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_y} \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \right\}.$$

On identifiera les variables s et t du cas scalaire avec $\boldsymbol{\lambda}$ et \mathbf{x} selon

$$\begin{cases} s = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}, \\ t = \mathbf{x}, t_s = \mathbf{x} \boldsymbol{\lambda} \end{cases}$$

Le gradient de l'argument du $\sup\{\}$ est

$$\mathbf{y} - \frac{d\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})}{d\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{y} - \mathbf{A} \frac{d\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})}{d\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x} \boldsymbol{\lambda}.$$

2. Traduction littérale de « *normal convex integrand* ».

On a noté ci-dessus

$$\mathbf{x}_\lambda = \frac{d\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})}{d\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}};$$

et on notera $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ la valeur de $\boldsymbol{\lambda}$ qui annule ce gradient. D'après les propriétés des convexes conjugués, $\mathcal{F}^*(s) = st_s - \mathcal{F}(t_s)$, nous avons

$$\text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \right\} = \text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A} \mathbf{x}_\lambda + \mathcal{F}(\mathbf{x}_\lambda) \right\},$$

soit, pour la valeur optimale de $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}$ qui annule le gradient $\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_\lambda$,

$$\text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \right\} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}).$$

En notant enfin $\bar{\mathbf{x}}$ la valeur de \mathbf{x} qui rend minimum $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ sur $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_\mathbf{y}$,

$$\mathcal{F}(\bar{\mathbf{x}}) = \text{Inf}_{\mathbf{x} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_\mathbf{y}} \mathcal{F}(\mathbf{x}),$$

l'égalité du théorème de FENCHEL

$$\text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \right\} = \text{Inf}_{\mathbf{x} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_\mathbf{y}} \mathcal{F}(\mathbf{x})$$

devient

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}) = \mathcal{F}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Puisque le problème initial de minimisation convexe admet une solution unique $\bar{\mathbf{x}}$ et que $\mathbf{x}_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}$ appartient à $\mathcal{C}_\mathbf{y}$, on en déduit que

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}} = \mathcal{F}'^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \Big|_{\boldsymbol{\lambda}=\bar{\boldsymbol{\lambda}}}.$$

Le même type de résultats existe pour la formulation intégrale (sous quelques conditions supplémentaires sur h — voir BORWEIN & LEWIS 1992.)

Il est ainsi possible de relier les solutions des problèmes primal et dual. On peut donc résoudre un problème de programmation convexe en utilisant sa formulation duale, c'est-à-dire la maximisation de la fonction duale $D(\lambda)$, et obtenir la solution du problème primal en utilisant la relation entre les solutions des deux problèmes à l'optimum. Cette relation est appelée *relation primale-duale*. Il s'agit de la dérivée au point optimal de la convexe conjuguée de la fonction objectif initiale — relations (V.12) et (V.13) pour les problèmes (P_L) et (P_i) respectivement.

3.2.4 Exemple d'application

Une application immédiate et tentante des résultats précédents est le problème de minimisation de l'entropie relative $D(P||\mu)$, où μ est une mesure de probabilité définie sur un ensemble convexe \mathcal{C}

$$\begin{cases} \text{Inf}_{p(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{C}} p(\mathbf{x}) \log(p(\mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x}), \\ \text{sous la contrainte } \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \\ \text{et } \int_{\mathcal{C}} p(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = 1. \end{cases}$$

Par rapport aux résultats énoncés précédemment, il suffit de poser $h(p(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x}) \log(p(\mathbf{x}))$, et de noter que l'on a ici une contrainte supplémentaire (normalisation), à laquelle sera alors associée une nouvelle variable duale. La conjuguée convexe de $t \log(t)$ est $\exp(s - 1)$; on obtient alors la fonction duale en substituant h^* par sa valeur dans

$$D(\boldsymbol{\lambda}, \beta) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} + \beta - \int h^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + \beta) d\mu(\mathbf{x}),$$

ce qui fournit ici

$$D(\boldsymbol{\lambda}, \beta) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} + \beta - \int \exp(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + \beta - 1) d\mu(\mathbf{x}).$$

D'autre part, on a noté que $\overline{p(\mathbf{x})} = h^{*'}(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + \beta)$. Dans le cas de figure considéré ici, $h^{*'} = h^*$, et

$$\overline{p(\mathbf{x})} = \exp(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + \beta - 1).$$

En introduisant à nouveau la fonction de partition $-\log(Z(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})) = \beta - 1$, la fonction duale précédente se simplifie en

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \log(Z(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})),$$

qui est exactement l'expression à laquelle nous sommes déjà parvenus. Il est très important de noter que la contrainte de normalisation nous a ici permis de simplifier la fonction duale, pour parvenir à une fonction duale qui ne s'exprime plus sous forme intégrale, mais sous la forme générique

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}),$$

avec $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) = \log(Z(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}))$ (la log-fonction de partition étant convexe fermée peut être une convexe conjuguée), correspondant au problème d'optimisation convexe avec contraintes linéaires (P_L). Il est ainsi possible de faire apparaître un autre problème d'optimisation, de même fonction duale $D(\boldsymbol{\lambda})$:

$$\inf_{\mathbf{x}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \text{ sous la contrainte } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

où \mathcal{F} a pour convexe conjuguée $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) = \log(Z(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}))$. Réciproquement, \mathcal{F} est alors la convexe conjuguée de \mathcal{F}^* :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{x} - \log(Z(\boldsymbol{\lambda})) \right\}.$$

La solution de ce dernier problème d'optimisation est donnée par la dérivée de $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})$ pour la valeur de $\boldsymbol{\lambda}$ rendant maximale la fonction duale. Nous avons déjà noté que la dérivée de la log-fonction de partition fournit la moyenne sous la loi considérée. Nous avons donc obtenu trois problèmes d'optimisation qui possèdent la même valeur à leurs optima respectifs:

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_p \int_{\mathcal{C}} p(\mathbf{x}) \log(p(\mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x}), \\ \text{s. c. } \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \\ \text{et } \int_{\mathcal{C}} p(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = 1. \end{array} \right. = \sup_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \\ \text{s. c. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{array} \right.$$

Les valeurs rendant extremum chacun de ces trois problèmes sont respectivement

- $\overline{p(\mathbf{x})} = \frac{1}{Z(\boldsymbol{\lambda})} \exp(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A} \mathbf{x}),$
- $\overline{\boldsymbol{\lambda}},$
- et $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\overline{\boldsymbol{\lambda}}} = \frac{d \log(Z(\boldsymbol{\lambda}))}{d \boldsymbol{\lambda}} = E_{\overline{p(\mathbf{x})}}\{X\}.$

Le passage du problème d'optimisation sur les densités de probabilité au problème sur \mathbf{x} correspond au *principe de contraction* déjà observé au §2.2 lorsque nous présentions des résultats de grandes déviations : on peut décomposer le premier problème en deux problèmes d'optimisation « emboîtés »

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_{\mathbf{x}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_p \int_{\mathcal{C}} p(\mathbf{x}') \log(p(\mathbf{x}')) d\mu(\mathbf{x}'), \\ \text{s. c. } \int_{\mathcal{C}} \mathbf{x}' p(\mathbf{x}') d\mu(\mathbf{x}') = \mathbf{x}, \\ \text{et } \int_{\mathcal{C}} p(\mathbf{x}') d\mu(\mathbf{x}') = 1, \end{array} \right. \\ \text{s. c. } \mathbf{Ax} = \mathbf{y}. \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'à noter $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ la valeur prise par l'accolade interne pour obtenir le troisième problème d'optimisation.

4 Une construction « axiomatique-déductive »

Nous avons donc déjà vu apparaître par deux fois le critère $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ comme fonction objectif pour la résolution du problème inverse $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Cette fonctionnelle est apparue d'une part comme fonction de taux pour les grandes déviations de niveau 1, et d'autre part dans le second problème « équivalent » à la minimisation de la distance de KULLBACK sous contraintes de moyenne. La résolution du problème inverse est alors conduite en recherchant la solution du problème d'optimisation convexe

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \\ \text{sous la contrainte } \mathbf{y} = \mathbf{Ax}. \end{array} \right.$$

La valeur prise par la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est une mesure de la pertinence, ou de l'information associée à tout élément de l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N | \mathbf{y} = \mathbf{Ax}\}$. Le problème d'optimisation précédent peut ainsi être interprété comme la sélection de l'élément qui fournit le moins d'information $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, tout en étant compatible avec les données, c'est-à-dire en appartenant à $\mathcal{C}_{\mathbf{y}}$.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de poursuivre cette interprétation en terme d'information apportée par un élément de \mathcal{C} , et de vérifier que la transformée de CRAMÉR d'une mesure de référence μ présente quelques propriétés simples qui permettent de l'identifier à une mesure pertinente de l'information associée aux éléments d'un convexe \mathcal{C} muni de la mesure μ . Cette démarche s'inspire des constructions axiomatiques de (SHANNON 1948), de (SHORE & JOHNSON 1980) qui permettent de définir l'entropie comme mesure d'information et critère d'inférence, et des travaux plus récents de (CSISZÁR 1991).

Soit μ une mesure de référence, et \mathcal{C} l'enveloppe convexe fermée du support de μ . Pour simplifier, on supposera ici que μ est une mesure de probabilité. On note \bar{x}_{μ} la moyenne sous cette mesure de probabilité, $\bar{x}_{\mu} = E_{\mu}\{\mathbf{x}\}$, et on définit par $I_{\mu}(\mathbf{x})$ « l'information » associée à un élément \mathbf{x} de \mathcal{C} . Afin de préciser cette mesure d'information, énonçons quelques propriétés intuitives et désirables que devrait vérifier cette mesure d'information.

4.1 Quelques propriétés désirables

- 1. Positivité. L'information est une quantité positive :

$$I_{\mu}(\mathbf{x}) \geq 0.$$

• 2. Minimum. L'information est nulle, et minimale, pour la moyenne sous μ . Connaissant \mathcal{C} et μ , $\bar{\mathbf{x}}$ est l'objet par défaut dont l'observation n'apporte aucune information, ou dont la sélection ne nécessite aucun apport d'information :

$$\inf_{\mathbf{x}} I_{\mu}(\mathbf{x}) = I_{\mu}(\bar{\mathbf{x}}_{\mu}) = 0.$$

• 3. Convexité. L'information est une fonction convexe :

$$I_{\mu}(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq \alpha I_{\mu}(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) I_{\mu}(\mathbf{x}_2)$$

• 4. Indépendance. Si la mesure est séparable en deux blocs, *i.e.* $\mu(\mathbf{x}) = \mu_1(\mathbf{x}_1)\mu_2(\mathbf{x}_2)$, alors l'information globale est la somme des informations définies sur les blocs indépendants :

$$I_{\mu}(\mathbf{x}) = I_{\mu_1}(\mathbf{x}_1) + I_{\mu_2}(\mathbf{x}_2).$$

• 5. Additivité. Soit \mathbf{x} la somme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, où \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 appartiennent respectivement à deux convexes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 munis des mesures μ_1 et μ_2 . L'information apportée par cette somme est inférieure à la somme des informations considérées indépendamment :

$$I_{\mu_1 * \mu_2}(\mathbf{x}) \leq I_{\mu_1}(\mathbf{x}_1) + I_{\mu_2}(\mathbf{x}_2).$$

• 6. Échelle. Le changement d'échelle $\mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}$ ne modifie pas l'information. Si μ' est la mesure munissant l'ensemble $\mathcal{C}'_{a'}$ défini par la dilatation $\mathcal{C}'_{a'} = \{x' : x' = ax, x \in \mathcal{C}\}$ où \mathcal{C} est muni de la mesure μ , alors l'information mesurée sur l'un ou l'autre ensemble est identique :

$$I_{\mu'}(ax) = I_{\mu}(x).$$

4.2 Conséquences de ces propriétés

La propriété de positivité est induite par les propriétés 2 et 3 : si l'information est minimale et nulle pour la moyenne $\bar{\mathbf{x}}_{\mu}$, et est une fonction convexe, alors elle est nécessairement non négative.

On peut assurer que I_{μ} soit convexe en l'exprimant comme la convexe conjuguée d'une fonction continue ϕ_{μ} :

$$I_{\mu}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{t}} \{ \mathbf{t}^t \mathbf{x} - \phi_{\mu}(\mathbf{t}) \}.$$

L'unicité de $\phi_{\mu}(\mathbf{t})$ est en outre assurée si $\phi_{\mu}(\mathbf{t})$ est convexe fermée, et on a alors de plus

$$\phi_{\mu}(\mathbf{t}) = \sup_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{t}^t \mathbf{x} - I_{\mu}(\mathbf{x}) \}.$$

L'information s'écrit alors encore

$$I_{\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_{\mathbf{x}}^t \mathbf{x} - \phi_{\mu}(\mathbf{t}_{\mathbf{x}}),$$

pour la valeur $\mathbf{t}_{\mathbf{x}}$ rendant maximum l'argument du Sup, c'est-à-dire vérifiant $\mathbf{x} - \phi'_{\mu}(\mathbf{t}_{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Nous avons vu que son gradient est alors simplement

$$I'_{\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_{\mathbf{x}}.$$

La propriété 2, minimum et nullité pour la moyenne, entraîne que $\mathbf{t}_{\bar{\mathbf{x}}_{\mu}} = \mathbf{0}$. On en déduit alors que $I_{\mu}(\bar{\mathbf{x}}_{\mu}) = \phi_{\mu}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ d'une part, et d'autre part $\bar{\mathbf{x}}_{\mu} = \phi'_{\mu}(\mathbf{0})$.

Examinons maintenant comment sont modifiées les autres propriétés lorsque l'on exprime I_μ sous la forme d'une convexe conjuguée. Il est facile de voir que ces propriétés deviennent

- 4. Indépendance.

$$\phi_\mu(\mathbf{t}) = \phi_{\mu_1}(\mathbf{t}_1) + \phi_{\mu_2}(\mathbf{t}_2).$$

- 5. Additivité. La propriété d'additivité entraîne

$$\text{Sup}_{\mathbf{t}} \left\{ \mathbf{t}^t(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) - \phi_{\mu_1 * \mu_2}(\mathbf{t}) \right\} \leq \text{Sup}_{\mathbf{t}} \left\{ \mathbf{t}^t \mathbf{x}_1 - \phi_{\mu_1}(\mathbf{t}) \right\} + \text{Sup}_{\mathbf{t}} \left\{ \mathbf{t}^t \mathbf{x}_2 - \phi_{\mu_2}(\mathbf{t}) \right\},$$

et est en particulier vérifiée si $\phi_{\mu_1 * \mu_2}(\mathbf{t})$ est séparable en $\phi_{\mu_1 * \mu_2}(\mathbf{t}) = \phi_{\mu_1}(\mathbf{t}) + \phi_{\mu_2}(\mathbf{t})$. Cette restriction pourrait déjà nous permettre de conclure. En effet, on sait que la fonction génératrice des cumulants vérifie cette égalité et transforme ainsi un produit de convolution en une somme. Elle vérifie également la propriété 2, et il n'est pas difficile de voir que les autres propriétés sont également satisfaites. Nous allons cependant tenter d'obtenir cette solution en utilisant uniquement les autres propriétés. Dans le cas général, la propriété d'additivité impose

$$\phi_{\mu_1 * \mu_2}(\mathbf{t}) \geq \phi_{\mu_1}(\mathbf{t}) + \phi_{\mu_2}(\mathbf{t}).$$

- 6. Échelle

$$\phi_{\mu'}(\mathbf{t}) = \phi_\mu(a\mathbf{t}).$$

Posons maintenant pour $\phi_\mu(\mathbf{t})$ la forme générale suivante :

$$\phi_\mu(\mathbf{t}) = f(\mathbb{E}_\mu g(\mathbf{t}, \mathbf{x})),$$

(la forme la plus générale serait $\phi_\mu(\mathbf{t}) = \sum_i f_i(\mathbb{E}_\mu g_i(\mathbf{t}, \mathbf{x}))$) et recherchons quelles sont les possibilités pour f et g . La condition d'échelle fournit

$$\phi_{\mu'}(\mathbf{t}) = f(\mathbb{E}_{\mu'} g(\mathbf{t}, \mathbf{x})) = f(\mathbb{E}_\mu g(\mathbf{t}, a\mathbf{x})) = \phi_\mu(a\mathbf{t}).$$

On en déduit donc que $g(\mathbf{t}, a\mathbf{x}) = g(a\mathbf{t}, \mathbf{x})$, et par suite $g(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{t}^t \mathbf{x})$.

Examinons ensuite la condition d'indépendance :

$$\phi_\mu(\mathbf{t}) = \phi_{[\mu_1 \mu_2]}([\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2]) = f(\mathbb{E}_{[\mu_1 \mu_2]} \{g(\mathbf{t}_1^t \mathbf{x}_1 + \mathbf{t}_2^t \mathbf{x}_2)\})$$

doit être égale à

$$f(\mathbb{E}_{\mu_1} \{g(\mathbf{t}_1^t \mathbf{x}_1)\}) + f(\mathbb{E}_{\mu_2} \{g(\mathbf{t}_2^t \mathbf{x}_2)\}).$$

Comme ceci doit être vrai quels que soient \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 , il faut nécessairement que g soit séparable en ses arguments, ce que l'on notera $g(\mathbf{t}_1^t \mathbf{x}_1 + \mathbf{t}_2^t \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{t}_1^t \mathbf{x}_1) \bullet g(\mathbf{t}_2^t \mathbf{x}_2)$, où l'opération \bullet est soit une addition soit une multiplication (en raison de la symétrie des arguments). Dans ces conditions, g ne peut être que la fonction identité ou la fonction exponentielle, et la fonction f associée soit l'identité soit proportionnelle au logarithme. La propriété 2 permet de rejeter l'identité (condition $\phi'_\mu(\mathbf{0}) = \bar{\mathbf{x}}_\mu$), et sélectionne

$$\phi_\mu(\mathbf{t}) = \log \mathbb{E}_\mu \{ \exp(\mathbf{t}^t \mathbf{x}) \}.$$

On obtient ainsi que la mesure d'information recherchée, la mesure de l'information associée à un élément \mathbf{x} d'un convexe \mathcal{C} muni de la mesure de référence μ , est la fonctionnelle $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ définie comme la conjuguée convexe de la fonction génératrice des cumulants de μ :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \text{Sup}_{\mathbf{t} \in D_{\phi_\mu}} \left\{ \mathbf{t}^t \mathbf{x} - \phi_\mu(\mathbf{t}) \right\},$$

où D_{ϕ_μ} est le domaine de définition de $\phi_\mu(\mathbf{t})$. Notons que la minimisation de toute fonction croissante de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, $h(\mathcal{F}(\mathbf{x}))$ sous les contraintes $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ conduit à la même solution que la minimisation de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. Cependant, on ne pourra pas alors conserver toutes les propriétés que nous avons énoncées. La convexité imposera que h soit elle-même convexe, l'annulation pour la moyenne imposera $h(\mathbf{0}) = 1$, les propriétés d'échelle et d'additivité seront conservées, mais la propriété d'indépendance ne pourra être respectée.

Comme nous l'avons déjà noté à deux reprises, $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est aussi la valeur du minimum de l'information de KULLBACK-LEIBLER $D(P||\mu)$ sous la contrainte $E_P\{\mathbf{X}\} = \mathbf{x}$. On peut donc comprendre \mathcal{C} (l'enveloppe convexe fermée du support de μ) comme l'ensemble des moyennes possibles de distributions à densité par rapport à μ , et la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ comme le minimum de l'information de KULLBACK pour chacune de ces moyennes possibles. Il est ainsi satisfaisant de constater que notre recherche d'une mesure d'information nous conduise à la forme « contractée » de l'information de KULLBACK. Nous disposons maintenant de tous les arguments qui nous permettent à présent de présenter la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne.

5 La méthode du maximum d'entropie sur la moyenne

5.1 Introduction

Depuis que le principe de maximisation de l'entropie a été proposé par JAYNES (JAYNES 1957) pour la détermination de distributions de probabilité lorsqu'on dispose de contraintes de moments, son utilisation a très souvent été restreinte à un cadre strict.

En premier lieu, le maximum d'entropie a été appliqué avec comme mesure de référence (souvent implicite) la mesure de LEBESGUE $d\mathbf{x}$. Dans un article isolé intitulé « *Maximum entropy revisited* » MUKHERJEE et HURST (MUKHERJEE & HURST 1984) notent que l'application du maximum d'entropie est sévèrement limitée par le fait de figer le domaine d'intégration (traditionnellement \mathbb{R} ou \mathbb{R}^+) et la mesure de référence. Ils donnent plusieurs exemples de distributions obtenues pour différentes mesures, et des contraintes sur les deux premiers moments.

En second lieu, les contraintes de moment utilisées pour sélectionner une loi à maximum d'entropie sont considérées comme des *données* du problème. Le principe de maximisation d'entropie se résume alors à la détermination de distributions dans les problèmes où l'on dispose effectivement de moments, et à la justification du choix de lois *a priori* dans une approche bayésienne.

À notre connaissance, NAVAZA (NAVAZA 1985, NAVAZA 1986) est le premier à utiliser le principe de maximisation d'entropie en ne considérant plus les moments comme des données du problème, plus spécifiquement la moyenne, mais comme une inconnue à déterminer. Pour un problème inverse de la forme $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (un problème de synthèse de FOURIER intervenant en cristallographie), il propose de retenir comme solution la moyenne d'une distribution à maximum de μ -entropie. Le second aspect novateur du travail de NAVAZA est l'introduction d'une mesure de référence μ pour imposer ou prendre en compte des contraintes supplémentaires, en particulier l'appartenance de la solution à un domaine précis. On trouvera dans (BUCK & MACAULAY 1989) une approche similaire, étendue aux deux premiers moments de la distribution, mais qui n'utilise pas la possibilité de varier la mesure de référence, et se révèle moins féconde.

Revenons un instant sur les arguments qui conduisent à choisir comme solution du problème $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ la moyenne d'une distribution à maximum de μ -entropie. Le premier argument repose sur une analogie avec la physique statistique : en effet, en physique on considère que les observations (non bruitées), sont la valeur moyenne du phénomène observé (à la réponse de l'instrument

près) sous une distribution à maximum d'entropie, la distribution de BOLTZMANN. Dans le même esprit, on pourra considérer aussi cette observation comme une moyenne empirique, dont la probabilité est gouvernée, comme nous l'avons vu, par une entropie de niveau 1. Le second argument est de nature plus pragmatique : aucune autre hypothèse prenant en compte les observations (par exemple l'hypothèse selon laquelle l'observation serait l'argument du maximum d'une distribution de probabilité) ne pourrait nous permettre d'assigner de manière unique une distribution de probabilité. Enfin, il nous faut souligner ici, en raison des réticences de certains aux deux premiers arguments, que l'on peut *toujours* considérer l'observation comme la moyenne d'une distribution, puisque nous allons justement construire cette distribution pour cela.

Le choix de la maximisation de la μ -entropie appelle également quelques commentaires. Nous avons vu que dans le cas continu, la définition de l'entropie requiert, pour conserver une propriété d'invariance, de s'appuyer sur une mesure d'intégration. Le choix de cette mesure d'intégration peut permettre tout d'abord d'imposer un domaine, lorsque la variable \mathbf{x} est connue pour appartenir à un domaine précis ; par exemple \mathbb{R}^+ ou l'intervalle $[a_i, b_i]$, $i = 1..N$, la mesure est définie sur ce domaine, et impose ainsi à la solution d'appartenir à ce domaine. Si la mesure considérée est une mesure de probabilité, la μ -entropie est l'opposé de l'information de KULLBACK, qui peut être interprétée comme une mesure de la « distance » entre la loi à maximum d'entropie et μ . La mesure μ devient en quelque sorte une distribution *a priori* à laquelle doit ressembler la loi à maximum d'entropie compte tenu des données. Il est ainsi légitime de choisir pour μ la distribution intervenant dans un modèle de génération des données, ou la distribution *a priori* des données. On pense en particulier ici à un modèle poissonnien de formation d'images, et à une distribution exponentielle en analyse spectrale. Le choix de la mesure de référence peut ainsi être effectué selon deux points de vue, non exclusifs, d'une part pour imposer certaines contraintes de gabarit, et d'autre part pour rendre compte de connaissances sur la distribution des données.

Arrivés à cette étape du manuscrit, nous disposons de tous les éléments pour nous permettre de présenter aisément la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne. En effet, le chapitre IV nous a permis de présenter et motiver l'utilisation de l'information de KULLBACK ; les propriétés des N -échantillons et les résultats de grandes déviations nous ont amené à introduire différents niveaux d'entropie, liés par un principe de contraction. Enfin, nous avons présenté les résultats de dualité qui nous sont utiles ici, et retrouvé le principe de contraction en illustrant ces résultats sur le problème de minimisation de l'information de KULLBACK. Enfin, nous avons interprété la fonction d'entropie de niveau 1, $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ (qui, comme le lecteur sagace l'aura deviné va constituer notre *critère entropique*) comme une mesure d'information. Le principe de contraction et les résultats de dualité nous seront à nouveau utiles ici. Nous reviendrons également sur le parallèle avec les résultats de grandes déviations. Ce paragraphe traite le cas du problème sans bruit. Après avoir présenté quelques exemples de critères obtenus par la MEMM, nous reviendrons sur le problème bruité et présenterons une extension de la méthode.

5.2 Présentation de la méthode

On considère le problème inverse

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

où les composantes de \mathbf{y} sont des observations indirectes d'un objet \mathbf{x} , à l'aide d'un procédé expérimental caractérisé par la matrice de transfert \mathbf{A} . Cette matrice peut être mal-conditionnée ou incomplète. On note N la dimension de \mathbf{x} , et M la dimension de \mathbf{y} . Comme nous l'avons

décrit au chapitre I, l'inversion directe du problème est impossible, ou conduit à une solution de peu d'intérêt. Les données doivent être complétées par une information supplémentaire qui permette de sélectionner une solution acceptable. Certaines connaissances sur \mathbf{x} sont souvent disponibles.

Lorsque l'objet est une distribution d'intensité (comme dans l'exemple de la synthèse d'ouverture, chapitre II) ou une image de niveaux de gris, la solution doit être positive. Si l'objet est une proportion, il appartient naturellement au domaine $[0, 1]^N$. En spectroscopie, si on s'intéresse à un spectre d'absorption, celui-ci appartient à l'intervalle $[0, 100\%]$. En tomographie, des bornes supérieure et inférieure du coefficient d'absorption peuvent également être connues. On peut encore connaître, ou s'imposer, un *gabarit* $x_i \in [a_i, b_i]$ $i = 1..N$ auquel doit appartenir la solution ; un tel gabarit peut par exemple être fourni par une inspection des données (dans le cas d'un problème de convolution), ou défini à partir d'une reconstruction préliminaire. Ces connaissances et contraintes sont alors formalisées selon

$$\mathbf{x} \in \mathcal{C},$$

où \mathcal{C} est un ensemble convexe, muni d'une mesure de référence μ . On peut également connaître un modèle statistique des données, ou un modèle physique de formation de l'objet. On supposera que l'enveloppe convexe fermée du support de la mesure μ est la fermeture de \mathcal{C} . Cette contrainte nous permet d'assurer que la moyenne de toute distribution absolument continue par rapport à μ appartient à \mathcal{C} . Donnons dès à présent deux exemples d'ensemble \mathcal{C} : si l'objet appartient à un gabarit, on prendra

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N / x_i \in [a_i, b_i], \quad i = 1..N \}, \quad (\text{V.14})$$

et on utilisera une mesure de référence bornée, par exemple une distribution uniforme sur chacun des intervalles $[a_i, b_i]$. Le second exemple est l'utilisation d'une mesure de référence gaussienne, qui entraîne que l'ensemble \mathcal{C} est tout \mathbb{R} .

Résolution du problème MMEM. Étant donné cet ensemble convexe \mathcal{C} et la mesure de référence μ , la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne consiste à rechercher la distribution à maximum de μ -entropie, dont la moyenne vérifie la contrainte $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Comme nous l'avons annoncé, on retiendra ensuite cette moyenne comme solution du problème inverse. Le problème MMEM se formalise alors exactement comme nous l'indiquions dans le paragraphe sur la dualité §3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_P -H_\mu(P), \\ \text{s.c. } \mathbf{y} = \mathbf{A}E_P\{\mathbf{x}'\} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_{p(\mathbf{x}')} \int_{\mathcal{C}} p(\mathbf{x}') \log(p(\mathbf{x}')) d\mu(\mathbf{x}'), \\ \text{sous la contrainte } \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}\mathbf{x}' p(\mathbf{x}') d\mu(\mathbf{x}') = \mathbf{y}, \\ \text{et } \int_{\mathcal{C}} p(\mathbf{x}') d\mu(\mathbf{x}') = 1. \end{array} \right. \quad (\text{V.15})$$

Comme nous l'avons vu en résolvant le problème de maximisation de la μ -entropie (§1), et en présentant les résultats de dualité (§3), la solution du problème est un membre d'une famille exponentielle engendrée par la mesure μ . En notant \mathcal{F}^* le logarithme de la fonction de partition, le problème dual associé est alors

$$\text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda}} \{D(\boldsymbol{\lambda})\} = \text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda} \in D_{\mathcal{F}^*}} \{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \}. \quad (\text{V.16})$$

Le problème primal peut être séparé en deux problèmes successifs : d'abord une optimisation sous une contrainte de moyenne, conduisant à l'entropie de niveau 1, c'est-à-dire à la valeur de

la μ -entropie considérée comme une fonction des moyennes possibles \mathbf{x} , puis la minimisation de cette nouvelle entropie sur l'ensemble des moyennes possibles, \mathcal{C} , sous la contrainte $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_P -H_\mu(P), \\ \text{s.c. } \mathbf{y} = \mathbf{A}E_P\{\mathbf{x}'\}, \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_P \{-H_\mu(P)\}, \\ \text{s.c. } \mathbf{x} = E_P\{\mathbf{x}'\} \end{array} \right. \\ \text{s.c. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \\ \text{s.c. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

Le problème du maximum d'entropie sur la moyenne mène ainsi à un problème de minimisation convexe exprimé directement en termes de l'objet recherché. La fonctionnelle d'entropie de niveau 1 $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est définie comme la valeur prise par le minimum de l'opposé de la μ -entropie, sous la contrainte $E_P\{\mathbf{x}'\} = \mathbf{x}$. À ce problème correspond encore un problème dual, qui nous permet de retrouver que $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est la conjuguée convexe de la fonction génératrice des cumulants de μ ,

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Inf}_P -H_\mu(P), \\ \text{s.c. } \mathbf{x} = E_P\{\mathbf{x}'\} \end{array} \right. = \text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda} \in D_{\mathcal{F}^*}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{x} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}) \right\}.$$

On peut noter ici que $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est infinie pour $\mathbf{x} \notin \mathcal{C}$: si \mathbf{x} n'appartient pas à \mathcal{C} , il n'est pas possible de trouver de distribution absolument continue par rapport à μ (définie sur \mathcal{C}) qui admette cette moyenne. L'entropie relative est alors infinie, ce qui entraîne que $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est également infinie.

Transformée de CRAMÉR. Rappelons encore que $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda})$ est la log-fonction de partition, ou fonction génératrice des cumulants de μ ,

$$\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \log \left(E_\mu \left\{ \exp \left(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{x} \right) \right\} \right). \quad (\text{V.17})$$

La conjuguée convexe de cette fonction génératrice est aussi appelée transformée de CRAMÉR de μ (AZENCOTT 1978, DACUNHA-CASTELLE & DUFLO 1982). Cette transformée possède de nombreuses propriétés, qui sont particulièrement intéressantes, lorsque la transformée de CRAMÉR $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est utilisée comme critère pour la résolution d'un problème inverse. Les propriétés essentielles, dont certaines sont apparues dans notre construction axiomatique-déductive, ou dans des remarques dans le texte, sont rappelées ci-après :

- \mathcal{F} est continûment différentiable et strictement convexe sur \mathcal{C} ,
- $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = +\infty$ pour $\mathbf{x} \notin \mathcal{C}$, et sa dérivée croît à l'infini sur la frontière de \mathcal{C} ,
- $\mathcal{F}(\mathbf{x}) \geq 0$, avec égalité pour $\mathbf{x} = E_\mu\{\mathbf{x}'\}$.

La stricte convexité permet une implémentation simple, et surtout garantit l'unicité de la solution. Le fait que $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ soit infinie en dehors de \mathcal{C} et que sa dérivée soit elle-même infinie à la frontière de \mathcal{C} interdit à une méthode d'optimisation locale de s'évader de l'ensemble \mathcal{C} , et fournit de ce fait une solution dans cet ensemble, sans qu'il soit nécessaire de spécifier explicitement cette contrainte au cours de l'optimisation.³

3. Cette propriété agréable possède cependant un revers : le gradient infini sur la frontière de \mathcal{C} interdit à la solution les valeurs situées exactement sur cette frontière. Dans le cas d'une contrainte de positivité par exemple, on ne pourra jamais obtenir exactement zéro, même si on peut se rapprocher de cette valeur arbitrairement près.

Parallèle avec le résultat de grandes déviations de niveau 1. Nous pouvons maintenant revenir aux propriétés des distributions et moyennes empiriques pour donner une interprétation alternative de ce critère de reconstruction. Plutôt que de considérer que l'objet est directement, ou exactement une valeur moyenne, on imagine qu'il s'agit d'une moyenne empirique $\langle \mathbf{x} \rangle_N$. Nous avons vu que la probabilité que cette moyenne appartienne à un ensemble \mathcal{A} est donnée par

$$P(\langle \mathbf{x} \rangle_N \in \mathcal{A}) \approx \exp \left(-N \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \right).$$

Si nous définissons alors \mathcal{A} par $\mathcal{A} = \{\langle \mathbf{x} \rangle_N | \mathbf{y} = \mathbf{A} \langle \mathbf{x} \rangle_N\}$, la maximisation de cette probabilité conduit exactement au critère obtenu par la MMEM.

Mise en œuvre. Il est important de noter que la mise en œuvre d'une optimisation directement sur le second problème primal

$$\begin{cases} \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \\ \text{s.c. } \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}. \end{cases}$$

n'est certainement pas l'approche la plus efficace, et n'est d'ailleurs pas toujours possible. D'abord, la MMEM fournit directement le problème dual (V.16) associé aux deux critères primals. À l'optimum du problème dual, nous avons vu qu'il est possible par dualité d'obtenir la solution du second problème primal par une simple opération de dérivation (relation primale-duale) :

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathcal{F}^{*'}(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \Big|_{\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}}.$$

La fonction duale est une fonction strictement concave, dont la maximisation ne pose pas de difficulté. Le problème dual est en outre souvent sans contrainte et peut être de dimension plus réduite. En second lieu, l'existence d'une expression analytique de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ n'est pas garantie. En effet, le calcul de la convexe conjuguée de $\mathcal{F}^*(\mathbf{x})$ fait intervenir le calcul d'une réciproque (voir le paragraphe 3.2.1) lors duquel peuvent apparaître des équations implicites. Il semble d'ailleurs que cette situation soit plus la règle qu'une exception. Nous citerons dans la suite, à titre d'exemple, la plupart des critères *explicites* auxquels on peut parvenir par la MMEM. Cependant, dès que la mesure de référence devient plus complexe, comme c'est par exemple le cas pour la mesure de référence envisagée dans l'article « *Restoration of spiky signals: a new optimal estimate and a comparison* » (annexe F), le critère est très souvent non explicite. Il est cependant remarquable qu'en dépit de ceci le problème puisse toujours être résolu, en utilisant sa formulation duale.

Revenons un instant sur les différentes étapes qui permettent de résoudre un problème inverse en utilisant la méthodologie de la MMEM.

1. La première étape consiste à spécifier le convexe \mathcal{C} et une mesure de référence μ .
2. On doit ensuite calculer, analytiquement, la fonction génératrice des cumulants \mathcal{F}^* (V.17), ainsi que son domaine d'existence $D_{\mathcal{F}^*}$.

$$\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \log \left(E_{\mu} \{ \exp(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{x}) \} \right).$$

La relation primale-duale est ensuite donnée par

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{F}^{*'}(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}).$$

On en déduit alors facilement l'expression de la fonction duale $D(\boldsymbol{\lambda})$,

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}),$$

et de son gradient, $D'(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_\lambda$. On peut encore rechercher — bien que cela ne soit pas nécessaire pour la résolution du problème — la conjuguée convexe de \mathcal{F}^* , qui fournit alors l'expression du problème primal. Comme nous l'avons déjà noté, il n'est pas toujours possible de parvenir à une expression analytique de \mathcal{F} .

3. La maximisation de la fonction duale doit ensuite être effectuée.

$$\text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda} \in D_{\mathcal{F}^*}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \right\}.$$

Puisqu'il s'agit d'une fonctionnelle strictement concave, l'existence et l'unicité de la solution sont garanties. Lorsque le domaine d'existence $D_{\mathcal{F}^*}$ est \mathbb{R}^M tout entier, ce problème est non contraint. Il est de plus possible de mettre en œuvre des méthodes de descente (on minimise alors l'opposé de la fonction duale) performantes ; — nous utilisons un algorithme de gradient conjugué, et lorsque la dimension du problème le permet, un algorithme du second ordre de type NEWTON.

4. Lorsque le maximum de la fonction duale est atteint, pour une valeur $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$, il ne reste plus qu'à calculer la solution du problème primal en utilisant à nouveau la relation primale-duale :

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathcal{F}'^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \Big|_{\boldsymbol{\lambda}=\bar{\boldsymbol{\lambda}}}.$$

Mise en œuvre automatique de la MEM. Ces différentes étapes s'enchaînent de façon très claire, et il est ainsi possible d'imaginer une procédure pratiquement automatique pour la résolution de problèmes inverses, allant de la « génération » d'un critère convexe spécifique à l'obtention d'une solution numérique au problème. Nous avons développé un tel programme en nous appuyant sur les logiciels MAPLE (calcul formel) et MATLAB. À partir de la spécification d'une mesure de référence et d'un ensemble convexe \mathcal{C} , le calcul de la fonction génératrice des cumulants et de sa dérivée (relation primale-duale) est mené par calcul formel. On crée alors, de manière automatique, trois fichiers distincts qui constitueront des fonctions MATLAB (nous pourrions sans plus de difficulté créer des fonctions C ou FORTRAN) permettant respectivement le calcul de la fonction duale, de son gradient et de la transformation primale-duale (cette dernière fonction est évidemment utilisée pour le calcul du gradient). On dispose également d'un algorithme d'optimisation standard, dont l'entrée est constituée par les données, et les noms des procédures calculant la fonction objectif et son gradient. Enfin, on génère automatiquement un programme principal enchaînant cette optimisation et le calcul de la solution. Ce programme principal sert également pour spécifier le problème direct à l'aide de deux fonctions supplémentaires, qui effectuent le calcul de $\mathbf{A}\mathbf{x}$ et de $\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}$ (lorsque \mathbf{A} est une matrice de FOURIER ou une matrice de convolution, ces produits peuvent également être effectués de manière économique en utilisant la transformée de FOURIER rapide).

5.3 Exemples de critères

Nous donnons dans ce paragraphe quelques exemples de critères obtenus par la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne. Ces critères sont également développés dans l'un des articles présentés en annexe (annexe E). L'objet de ces exemples est d'une part d'illustrer la mise en œuvre de la MEM décrite ci-dessus, d'autre part de montrer que la MEM fournit un cadre unificateur et explicatif pour la plupart des critères employés pour la résolution de problèmes inverses ; et enfin de montrer qu'il est possible de construire de nouveaux régulariseurs.

5.3.1 Mesure de référence gaussienne

Avec une mesure de référence gaussienne $\mu = \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{\Gamma})$, c'est-à-dire aucune contrainte sur l'objet, le calcul de la transformée de CRAMÉR mène facilement au critère quadratique

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{m})^{\dagger} \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}),$$

classiquement utilisé dans les critères régularisés, et en particulier dans les méthodes des moindres carrés régularisés. Observons que la solution par défaut, obtenue sans contrainte, est simplement \mathbf{m} .

5.3.2 Mélange de distributions

En échographie appliquée au contrôle non destructif, au génie biomédical et à la géophysique, on recherche une séquence de réflecteurs du signal échographique. On utilise souvent un modèle Bernoulli-Gaussien comme modèle de ce signal, qui est constitué par une série de pics (auxquels on affecte une amplitude gaussienne) correspondant aux interfaces rencontrées par l'onde dans le milieu. Nous avons utilisé ce modèle pour la déconvolution de séquences impulsionnelles en prenant comme mesure de référence un mélange de lois normales centrées, ce mélange étant pondéré par un facteur de BERNOULLI : $\mu = \alpha \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma}_1) + (1 - \alpha) \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma}_2)$. Les deux lois normales sont de variances très différentes, l'une rendant compte des réflecteurs, et l'autre des inhomogénéités du milieu ; le coefficient de BERNOULLI représente quant à lui le taux de réflecteurs dans la séquence étudiée.

Cette approche fait l'objet d'une communication au congrès ICASSP 1995 ; l'article qui figurera dans les actes est rapporté en annexe F. Cette mesure de référence ne conduit pas à un critère explicite, et le problème doit alors être résolu dans le domaine dual (les expressions peuvent être trouvées dans l'article). Les résultats obtenus sur des exemples de simulation montrent que la méthode fournit des résultats de bonne qualité, qui se situent entre des méthodes très élaborées conçues spécifiquement pour ce problème et les méthodes d'inversion gaussiennes. La charge calculatoire reste par contre faible et la mise en œuvre aisée (maximisation d'un critère strictement concave). Nous pouvons d'autre part garantir l'unicité et l'optimalité de notre solution. Enfin, il s'avère que la méthode proposée est très robuste au bruit d'observation.

Le bon comportement du critère pour l'estimation d'une séquence de pics isolés peut être illustré au moyen d'« une fonction de transfert » : nous traçons ci-dessous la solution \bar{x} obtenue par l'algorithme en fonction des valeurs possibles de l'entrée. Les courbes obtenues pour deux jeux de paramètres du modèle montrent « un effet de seuil » : en dessous de ce « seuil », la méthode fournit une reconstruction proche de zéro ; au-dessus de ce seuil, la reconstruction est pratiquement linéaire. Il est tout à fait remarquable d'obtenir un tel effet de seuil, — qui correspond à l'intuition du comportement que devrait avoir une méthode pour ce problème, forcer des valeurs à zéro au-dessus d'un seuil pour retrouver une séquence de pics isolés — à l'aide d'un critère régulier et convexe de surcroît.

Il est également possible d'imposer une contrainte de positivité sur la reconstruction en utilisant un mélange de distributions gamma plutôt que gaussiennes. Ceci pourrait être utilisé en analyse spectrale et en traitement d'antenne (nous donnons dans l'article rapporté en Annexe G. les expressions de la fonction duale associée et de la relation primale duale).

5.3.3 Mesure de référence gamma et critère d'ITAKURA-SAITO

Nous avons déjà rencontré le critère d'ITAKURA-SAITO lorsque nous avons présenté la méthode de SHORE, au §4.2 du chapitre précédent. Il s'agissait alors de la seconde illustration du

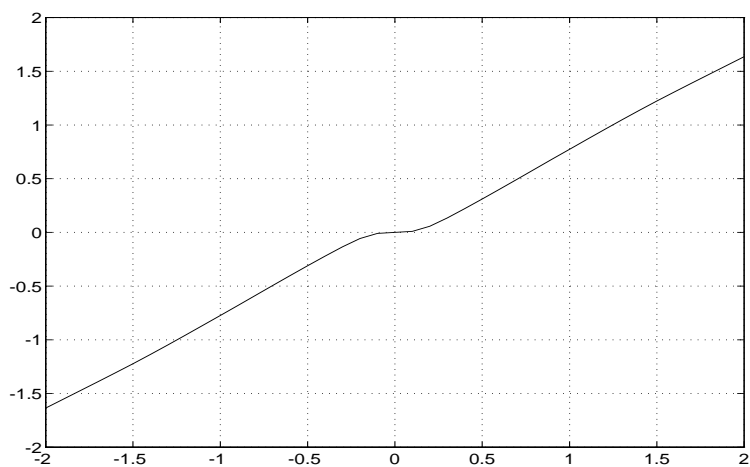


FIG. V.1 - *Fonction de transfert du critère associé à une mesure de référence constituée par un mélange de gaussiennes. Premier jeu de paramètres du modèle.*

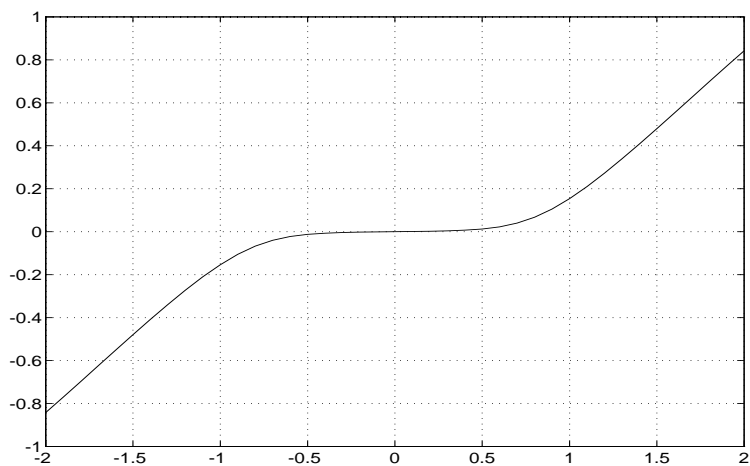


FIG. V.2 - *Fonction de transfert du critère associé à une mesure de référence constituée par un mélange de gaussiennes. Second jeu de paramètres du modèle.*

raisonnement MEM. On impose la positivité en choisissant le convexe $\mathcal{C} = [0, +\infty[$, muni d'une distribution exponentielle pour mesure de référence. Considérons alors la fonction génératrice des cumulants

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*(\mathbf{s}) &= \log(\mathbb{E}_\mu\{\exp(\mathbf{s}^t \mathbf{x})\}) \\ &= \log\left(\int_0^\infty \exp(\mathbf{s}^t \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}^t \mathbf{x}) d\mathbf{x}\right) + \sum_i^N \log(\alpha_i) \\ &= \sum_i^N \log(\alpha_i - s_i) + \log(\alpha_i)\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{\alpha}$ est le paramètre de la mesure de référence exponentielle. Il est important de noter que l'existence de cette intégrale limite cette fois-ci le domaine $\mathcal{D}_{\mathcal{F}^*}$ de cette fonction: il faudra respecter $\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{0}$, et l'optimisation duale est cette fois-ci contrainte. Le calcul de la convexe conjuguée de \mathcal{F}^* passe alors par le calcul de $\mathcal{F}'(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{*'}(\mathbf{x})$:

$$\mathcal{F}'(\mathbf{x})\Big|_i = \mathcal{F}^{*'}(\mathbf{x})\Big|_i = \alpha_i - \frac{1}{x_i}.$$

La conjuguée convexe $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est alors obtenue par (voir le paragraphe §3.2.1, et la relation (V.10))

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \mathcal{F}'(\mathbf{x}) - \mathcal{F}^*(\mathcal{F}'(\mathbf{x})),$$

soit

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_i^N \alpha_i x_i - \log(\alpha_i x_i) - 1,$$

qui est le critère d'ITAKURA-SAÏTO établi au paragraphe §4.2. Le minimum de ce critère est atteint pour la moyenne de la distribution de référence, $x_i = 1/\alpha_i$ $i = 1..N$. Le calcul de la transformée de CRAMÉR de la mesure de référence nous permet ainsi d'obtenir directement ce résultat. Notons que pour une mesure de référence qui serait une mesure produit de lois gamma de paramètres β_i, α_i ,

$$d\mu(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N \frac{\alpha_i^{\beta_i}}{\Gamma(\beta_i)} x_i^{\beta_i-1} \exp(-\alpha_i x_i) dx_i,$$

on obtient de la même manière

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*(\mathbf{s}) &= \sum_{i=1}^N \beta_i \log\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i - s_i}\right) \\ \mathcal{F}^{*'}(\mathbf{x})\Big|_i &= \alpha_i - \frac{\beta_i}{x_i},\end{aligned}$$

et on arrive finalement à

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i x_i - \beta_i) + \beta_i \log\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i x_i}\right).$$

Il est facile de vérifier que ce dernier critère prend son minimum et s'annule pour la moyenne de la mesure de référence, $x_i = \beta_i/\alpha_i$.

5.3.4 Mesure de POISSON et entropie de SHANNON

On a étudié dans le paragraphe précédent le cas où le convexe \mathcal{C} est \mathbb{R}^+ , et la mesure de référence une loi Γ . Les distributions Γ ne sont bien entendu pas les seules mesures de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ . En particulier, la mesure de POISSON nous permettra ici de retrouver la méthode du « Maximum d'entropie » (de régularisation par l'entropie de SHANNON ou l'entropie croisée), déjà citée au chapitre IV, relation (IV.16).

On considère donc toujours $\mathcal{C} = [0, \infty[$ et on utilise cette fois pour mesure de référence une distribution de POISSON, que l'on supposera séparable, en l'absence de connaissance sur une éventuelle corrélation. Ce modèle peut être un modèle de formation d'image, qui représente l'accumulation de grains d'énergie (par exemple des photons), selon un processus de POISSON, et de telle sorte que la moyenne au site i soit m_i . Un tel modèle peut par exemple être rencontré en astronomie. La mesure de référence est alors

$$\mu(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N \mu(x_i) = \prod_{i=1}^N \frac{m_i^{x_i}}{x_i!} \exp(-m_i).$$

Les observations sont à nouveau une transformation linéaire d'un objet inconnu \mathbf{x} , et nous sélectionnons comme solution la moyenne sous la distribution la plus proche de μ satisfaisant la contrainte pour cette moyenne, la distance étant mesurée par l'information de KULLBACK-LEIBLER.

Bien qu'il soit ici possible de calculer la forme de distribution et l'expression de sa moyenne en fonction des paramètres de LAGRANGE, puis d'exprimer l'entropie relative uniquement en fonction de la moyenne, ceci conduisant alors au critère $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, il est bien plus simple de rechercher directement la transformée de CRAMÉR de μ . La fonction génératrice des cumulants est

$$\log(Z_i) = m_i(\exp(\chi_i) - 1),$$

et la transformée de CRAMÉR s'écrit

$$\mathcal{F}(x_i) = \text{Sup}_{\chi_i} \{ \chi_i x_i - m_i \exp(\chi_i) + m_i \}.$$

Le maximum du terme entre accolades est atteint pour $x_i = m_i \exp(\chi_i)$, c'est-à-dire $\chi_i = \log(x_i/m_i)$, et par conséquent

$$\mathcal{F}(x_i) = \frac{x_i}{m_i} \log \left(\frac{x_i}{m_i} \right) + m_i - x_i.$$

On obtient finalement

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i}{m_i} \log \left(\frac{x_i}{m_i} \right) + m_i - x_i \right],$$

qui est la version généralisée de l'entropie de SHANNON (le terme correctif $(m_i - x_i)$ assure la positivité de \mathcal{F} dans le cas où \mathbf{x} , ou \mathbf{m} ne serait pas normalisé à l'unité).

5.3.5 Sommes poissonniées

Une famille intéressante de mesures de référence peut être obtenue en utilisant des sommes poissonniées ; l'idée d'utiliser ce type de mesures doit être mise à l'actif de F. GAMBOA. Considérons donc le vecteur aléatoire \mathbf{Z} dont chaque composante Z_i , $i = 1..N$ est définie par la somme de K_i variables aléatoires X_k , $k = 1..K_i$, indépendantes et de même loi. Le nombre de termes dans chacune des sommes, K_i , est une variable aléatoire de POISSON de paramètre f_i . Ce modèle peut être considéré comme une extension du modèle de formation d'image développé dans le paragraphe précédent. Chaque composante de \mathbf{Z} représente toujours un site ou un pixel de l'image, et plutôt que d'accumuler sur les différents sites (selon une loi de POISSON) des « grains d'intensité » de valeur constante, on considère que l'intensité de chacun des grains est variable et gouvernée, au site i , par une distribution μ_i .

Il n'est pas difficile de montrer que la fonction génératrice de l'« amplitude » Z_i au site i est

$$\exp(-f_i + f_i \phi_i(s)),$$

où ϕ_i est la fonction génératrice associée à la mesure μ_i . On en déduit que la seconde fonction génératrice, la fonction génératrice des cumulants, est simplement

$$\mathcal{F}^*(s) = -f_i + f_i \phi_i(s).$$

Pour le vecteur complet \mathbf{Z} , on obtient alors

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^N -f_i + f_i \phi_i(s_i).$$

On peut par exemple appliquer cette construction pour une distribution Gamma pour \mathbf{X} (le critère correspondant a été exhibé en (GAMBOA & LAVIELLE 1994)) :

$$d\mu_i(x_i) = \frac{\beta_i^{\beta_i}}{m_i^{\beta_i} \Gamma(\beta_i)} e^{-\frac{\beta_i}{m_i} x_i} x_i^{\beta_i-1} dx_i,$$

dans laquelle on a fait apparaître, par rapport au paragraphe §5.3.3, la moyenne $m_i = \beta_i/\alpha_i$. La fonction génératrice des cumulants s'écrit alors

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^N f_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - m_i s_i} \right)^{\beta_i} - f_i,$$

et conduit au critère

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N f_i \left\{ \beta_i \frac{x_i}{m_i} + 1 - (\beta_i + 1) \left(\frac{x_i}{m_i} \right)^{\frac{\beta_i}{\beta_i+1}} \right\}. \quad (\text{V.18})$$

Cette expression peut être reliée au critère entropique introduit par JONES et *al.* (JONES & BYRNE 1990, JONES & TRUTZER 1989) (voir également l'article *A new look at the entropy for solving linear inverse problems* en annexe G). Il est particulièrement intéressant d'observer que pour $\beta_i = 1$, on fait apparaître un critère en racine carrée, pour lequel a longtemps été cherchée une justification, voir par exemple (NARAYAN & NITYANANDA 1986).

5.3.6 Mesure de référence uniforme

Nous avons signalé lors de l'introduction de la méthode qu'il est possible de choisir le convexe \mathcal{C} afin d'imposer un « gabarit » sur la reconstruction (NAVAZA 1985, GAMBOA 1989). On peut par exemple supposer, ou imposer, que chacun des pixels de l'objet, x_i , appartienne à un intervalle $[a_i, b_i]$. Le convexe \mathcal{C} est alors défini par

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} | x_i \in [a_i, b_i], i = 1..N\}.$$

Il reste à munir ce convexe d'une mesure de référence. La mesure la plus intuitive est une mesure de référence uniforme sur chacun des intervalles $[a_i, b_i]$. Dans le paragraphe suivant, nous examinerons le cas d'une mesure de BERNOULLI. En supposant à nouveau la mesure séparable en un produit de mesures uniformes sur chacun des intervalles, nous avons

$$d\mu(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{b_i - a_i} \mathbf{1}_{[a_i, b_i]}(x_i) dx_i,$$

où $\mathbf{1}_{[a_i, b_i]}$ est l'indicatrice de l'intervalle $[a_i, b_i]$. La fonction génératrice des cumulants est alors

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{\exp(a_i s_i) - \exp(b_i s_i)}{s_i} \right).$$

Le calcul de la transformée de CRAMÉR conduit ici à une équation implicite (calcul de la réciproque de $\mathcal{F}^{*'}(\mathbf{s})$) qui nous empêche d'obtenir une expression explicite de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. Il sera cependant possible de résoudre le problème non explicite

$$\begin{cases} \text{Inf}_{\mathbf{x}} \mathcal{F}(\mathbf{x}), \\ \text{s.c. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \end{cases}$$

en utilisant sa formulation duale :

$$\text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \right\},$$

la relation primale-duale étant

$$x_i = -\frac{1}{s_i} + \frac{b_i \exp(b_i s_i) - a_i \exp(a_i s_i)}{\exp(b_i s_i) - \exp(a_i s_i)},$$

où $s_i = [\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}]_i$.

5.3.7 Mesure de référence de BERNOULLI

Plutôt qu'une mesure uniforme, on peut choisir une mesure de BERNOULLI sur chacun des intervalles $[a_i, b_i]$. Bien que cette mesure soit ici moins intuitive, on peut pressentir que cette mesure va favoriser, par rapport à la mesure uniforme, les bords du domaine. D'autre part, les moyennes empiriques formées à partir de variables de BERNOULLI appartiennent à l'enveloppe convexe fermée de $[a_i, b_i]$. Cette mesure nous permet ici d'obtenir un critère explicite pour le problème de gabarit à bornes variables. La mesure de BERNOULLI est

$$d\mu(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N (\alpha_i \delta(x_i - a_i) + (1 - \alpha_i) \delta(b_i - x_i)),$$

avec δ la mesure de DIRAC, et α_i le paramètre de BERNOULLI (nous choisissons ici de traiter le cas d'un paramètre de BERNOULLI variable afin de nous réserver la possibilité de modifier le niveau de la solution par défaut). La fonction génératrice des cumulants correspondante est

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^N \log (\alpha_i \exp(s_i a_i) + (1 - \alpha_i) \exp(s_i b_i)) ;$$

et la relation primale duale est quant-à-elle

$$x_i = \mathcal{F}'^*(\mathbf{s}) \Big|_i = \frac{\alpha_i a_i \exp(s_i a_i) + (1 - \alpha_i) b_i \exp(s_i b_i)}{\alpha_i \exp(s_i a_i) + (1 - \alpha_i) \exp(s_i b_i)}.$$

En factorisant $\exp(s_i a_i)$ au numérateur et au dénominateur, il est possible de calculer la réciproque :

$$\exp(s_i(b_i - a_i)) = \frac{\alpha_i(x_i - a_i)}{(1 - \alpha_i)(b_i - x_i)},$$

ce qui fournit ensuite

$$s_i = \frac{1}{(b_i - a_i)} \log \left(\frac{\alpha_i(x_i - a_i)}{(1 - \alpha_i)(b_i - x_i)} \right).$$

On en déduit immédiatement l'expression de la conjuguée convexe de $\mathcal{F}^*(\mathbf{s})$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - a_i}{b_i - a_i} \log \left(\frac{x_i - a_i}{1 - \alpha_i} \right) + \frac{b_i - x_i}{b_i - a_i} \log \left(\frac{b_i - x_i}{\alpha_i} \right) - \log(b_i - a_i) \right).$$

Il est facile de vérifier ici encore que cette expression s'annule pour la solution par défaut $x_i = \alpha_i a_i + (1 - \alpha_i) b_i$, $i = 1..N$. Pour $a_i = 0$, $b_i = 1$, et $\alpha_i = 1/2$, on obtient l'entropie de FERMI-DIRAC :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N (x_i \log(x_i) + (1 - x_i) \log(1 - x_i)) + N \log(2).$$

Il peut maintenant être intéressant de comparer les critères obtenus pour une mesure uniforme et une mesure de BERNOULLI. Sur la figure V.3, nous représentons l'entropie de FERMI-DIRAC et l'entropie associée à une mesure uniforme. Cette entropie ne possédant pas d'expression analytique, nous l'avons évaluée point par point en calculant

$$\mathcal{F}(x) = \text{Sup}_s \{sx - \mathcal{F}^*(s)\};$$

(il suffit pour cela de maximiser la fonction duale habituelle en prenant $\mathbf{A} = 1$, et $\mathbf{y} = x$, ceci pour différentes valeurs de x).

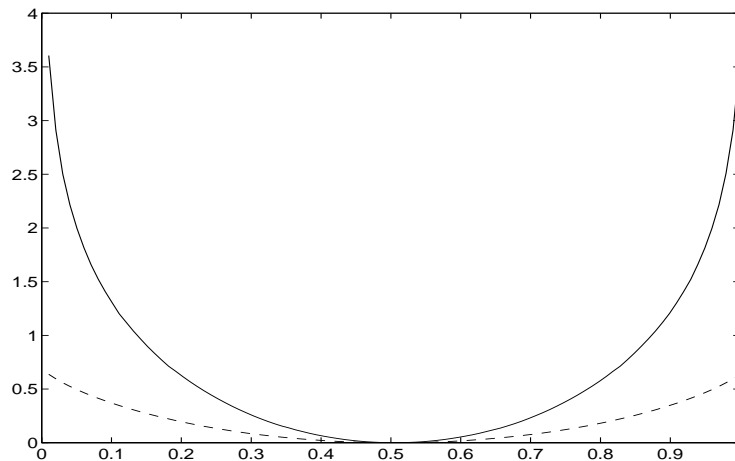


FIG. V.3 - Comparaison des critères obtenus pour une mesure uniforme (trait plein) et une mesure de BERNOULLI de paramètre $\alpha = 0.5$ (tirets).

Il est clair sur cette figure que la mesure de BERNOULLI pénalise beaucoup moins les bords du domaine que la mesure uniforme. Si nous reprenons une interprétation en terme de moyennes empiriques, nous retrouvons le fait que la loi de cette moyenne empirique converge beaucoup moins vite vers $\delta_{0.5}$ dans le cas BERNOULLI que dans le cas uniforme, la probabilité de déviations étant, d'après les résultats de grandes déviations de niveau 1, de l'ordre de $\exp(-N\mathcal{F}(x))$.

Dans le cas de la mesure de BERNOLLI, le paramètre α permet en outre de modifier la solution par défaut et la forme du critère. L'entropie associée à la mesure de BERNOLLI est représentée pour plusieurs valeurs du paramètre α sur la figure V.4. Dans l'article « *A new*

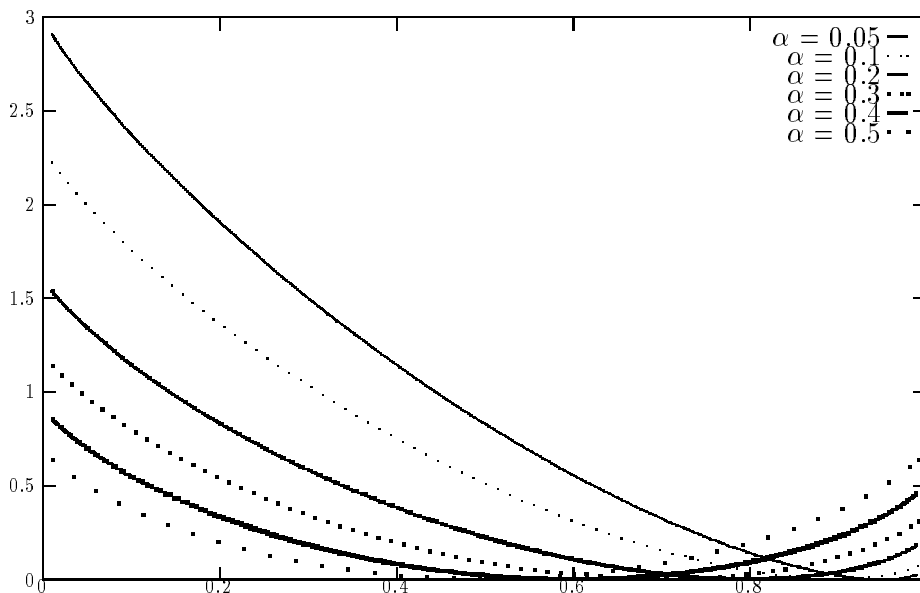


FIG. V.4 - Entropie $\mathcal{F}(x)$ associée à une mesure de BERNOLLI pour différentes valeurs du paramètre de BERNOLLI α .

look at the entropy for solving linear inverses problems» (annexe G), nous étudions comment on peut étendre cette possibilité de modifier la solution par défaut et la forme du critère pour d'autres mesures de référence.

Dans l'article « *The maximum entropy on the mean method, noise and sensitivity*» (annexe E), nous comparons différents critères de reconstruction issus de la MEM pour les mesures de référence gaussienne, poissonnienne et uniforme, ceci sur un exemple synthétique de synthèse de FOURIER monodimensionnel. Ces exemples de reconstruction indiquent clairement que plus l'information prise en compte par la mesure de référence est pertinente, meilleure est la reconstruction.

On peut également proposer comme illustration la déconvolution des données de la Supernova SN1987a observée par le télescope de HUBBLE alors que celui-ci était encore « myope ». Les données brutes sont représentées sur la figure V.5.(a), et la réponse impulsionnelle du système sur la figure (b). On bâtit alors un gabarit dans lequel doit se trouver la reconstruction (figure (c)), et on utilise une mesure uniforme sur chacun des intervalles ainsi définis. Le résultat obtenu par la MEM est représenté en échelle logarithmique (en raison de la très grande dynamique de l'image après déconvolution) sur la figure (d). Une autre reconstruction est représentée figure (e); on a utilisé pour cette reconstruction une mesure de POISSON, c'est-à-dire simplement une contrainte de positivité (maximum d'entropie « classique »). La prise en compte d'un gabarit semble améliorer sensiblement les résultats, en particulier en ce qui concerne le fond du ciel. Sur cet exemple de déconvolution, la pénalisation du bruit (voir plus bas) est une pénalisation quadratique. Il convient de rester prudent sur la qualité des reconstructions obtenues, qui n'ont

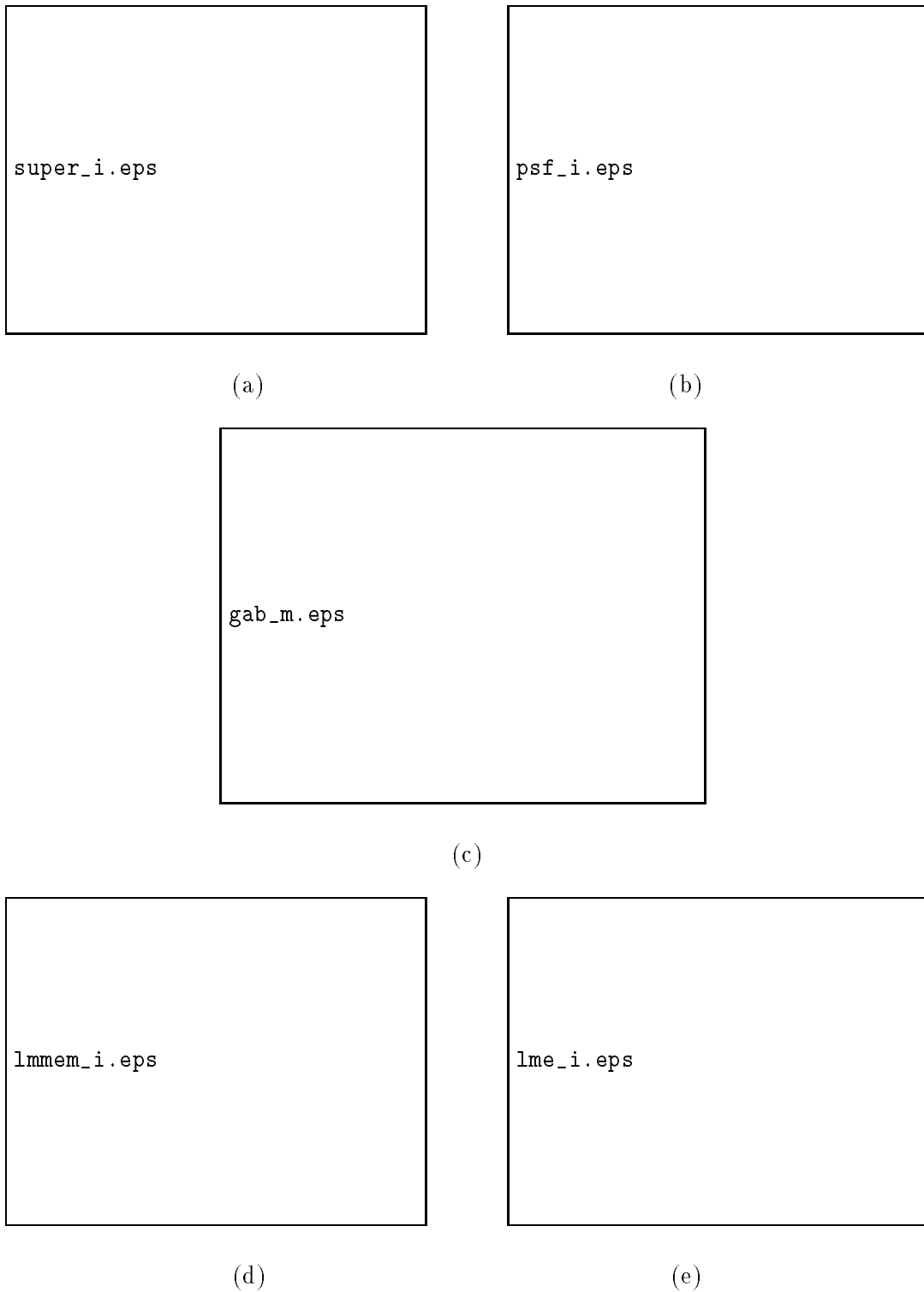


FIG. V.5 - Illustration sur la déconvolution de la supernova SN1987a observée par le télescope de HUBBLE avant sa correction en Janvier 1994.

pas pour le moment été validées par des astronomes.

5.4 Prise en compte du bruit d'observation

Nous avons présenté ci-dessus une méthodologie générale pour construire des critères convexes en vue de la résolution de problèmes inverses, lorsqu'une contrainte non linéaire de la forme $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ doit être satisfaite. Ces critères proviennent de la maximisation de la μ -entropie sous une contrainte de moment exacte. Le problème d'optimisation auquel on parvient alors est

$$\inf_{\mathbf{x}: \mathbf{y}=\mathbf{Ax}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) \right\},$$

et $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est une mesure de dissemblance définie sur l'ensemble des moyennes possibles. Cependant, tout bruit d'observation remet en cause la contrainte exacte et par conséquent les deux formulations de notre problème d'optimisation. Cette contrainte exacte nous était utile pour interpréter les observations comme une transformation linéaire de la moyenne, nous permettant alors d'exhiber le critère entropique $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. En raison des nombreuses propriétés agréables de notre construction, nous allons persister à considérer l'objet comme une moyenne, mais il nous faudra modifier la procédure. Nous revenons ci-dessous sur une prise en compte classique d'un bruit d'observation, à l'aide d'une contrainte quadratique, puis nous montrons que cette technique peut être généralisée à des situations plus complexes en prenant en compte le bruit par un autre critère de nature entropique issu de la procédure MMEM.

5.4.1 La contrainte du χ^2

Une manière classique de prendre en compte un bruit d'observation consiste à construire un intervalle de confiance pour la valeur moyenne de l'observation. Pour un bruit gaussien, par exemple, on utilise ainsi la contrainte du χ^2 , $\|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2 \leq \rho$, où ρ est une constante fixée à partir de la statistique du bruit. Le problème devient ainsi

$$\inf_{\mathbf{x}: \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2 \leq \rho} \mathcal{F}(\mathbf{x}). \quad (\text{V.19})$$

On peut toujours trouver un paramètre positif α (le paramètre de LAGRANGE associé à la contrainte du χ^2) tel que le problème sous contrainte et le problème pénalisé

$$\inf_{\mathbf{x}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2 \quad (\text{V.20})$$

admettent la même solution. Dans le cadre des critères entropiques, il est possible que nous ne disposions pas d'une expression analytique de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, alors que nous disposons toujours d'une expression de sa conjuguée $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda})$. Il est alors nécessaire de rechercher une formulation duale du problème (V.20). De sorte à utiliser les résultats de dualité, nous devons transformer (V.20) en un problème contraint. L'idée exposée en (DECARREAU *et al.* 1992) est d'introduire un nouvel ensemble de paramètres, noté $\boldsymbol{\xi}$, tel que

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{y} - \mathbf{Ax},$$

et par conséquent de transformer (V.20)

$$\begin{cases} \inf_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \\ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{y} - \mathbf{Ax}, \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

dont le lagrangien est

$$\tilde{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) + \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\xi},$$

où $L()$ est le lagrangien du problème sans bruit. Ce lagrangien peut être minimisé séparément en \mathbf{x} et $\boldsymbol{\xi}$, ceci conduisant à la nouvelle fonction duale \tilde{D} :

$$\tilde{D}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) - \frac{1}{2\alpha} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 = D(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{2\alpha} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2,$$

avec $\boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\lambda}/(2\alpha)$. Ainsi, la seule modification introduite par l'introduction d'une pénalisation dans le domaine direct est l'addition d'un terme à la fonction duale. La relation primale-duale est inchangée, et par conséquent la solution \mathbf{x}_λ appartient toujours au convexe spécifié \mathcal{C} .

5.4.2 Prise en compte du bruit dans la procédure MMEM

Ces résultats peuvent être généralisés à des pénalisations plus compliquées résultant de la prise en compte du bruit par une fonction entropique spécifique. Le résultat précédent, obtenu pour un bruit gaussien, peut être obtenu directement au sein de la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne.

Pour cela, il nous suffit d'introduire un *objet étendu* $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}, \mathbf{b}]$, et de considérer la relation $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}$, où $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}, \mathbf{1}]$. Le nouveau vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$ évolue dans un convexe $\tilde{\mathcal{C}}$ de \mathbb{R}^{N+M} , qui s'exprime comme le produit du convexe \mathcal{C} et du convexe \mathcal{B} , l'enveloppe convexe du support de la mesure de référence que nous utiliserons pour le bruit :

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \times \mathcal{B}.$$

En supposant que l'objet et le bruit sont statistiquement indépendants, la mesure de référence sur l'ensemble étendu $\tilde{\mathcal{C}}$ s'exprime comme le produit $\tilde{\mu} = \mu \otimes \nu$ de la mesure de référence μ relative à l'objet initial \mathbf{x} , et de la mesure relative au bruit ν . La mesure de référence sur l'objet est choisie de la même manière que précédemment, soit en recherchant une mesure sur un convexe \mathcal{C} afin d'imposer l'appartenance de la solution à ce convexe, soit en choisissant la mesure d'après un modèle de génération du signal (voir par exemple le modèle de génération poissonnien exposé au §5.3.4, et les mélanges de gaussiennes) ou la connaissance de la distribution (voir le modèle de SHORE). En ce qui concerne la mesure de référence relative au bruit, nous choisirons une mesure reflétant les caractéristiques statistiques connues ou estimées du bruit. Pour un bruit additif gaussien, ou un bruit dont nous ne connaissons que les deux premiers moments, nous utiliserons ainsi une mesure gaussienne. Pour un bruit poissonnien, nous utiliserons une distribution de POISSON.

On peut ensuite reprendre le raisonnement du maximum d'entropie sur la moyenne, c'est-à-dire rechercher la distribution la plus proche de $\tilde{\mu}$ au sens de l'information de KULLBACK, si $\tilde{\mu}$ est une mesure de probabilité, ou la distribution à maximum de μ -entropie dans le cas contraire, tel que l'objet étendu soit la moyenne de cette distribution. Ceci nous conduit alors à une nouvelle entropie de niveau 1, $\mathcal{F}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mathbf{x}})$, définie comme la transformée de CRAMÉR de $\tilde{\mu}$. En raison de l'indépendance entre \mathbf{x} et \mathbf{b} , cette nouvelle entropie s'exprime comme la somme des entropies construites à partir des mesures μ et ν :

$$\mathcal{F}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \text{Sup}_{\tilde{\mathbf{s}}=[\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2]} \left\{ \tilde{\mathbf{s}}^t \tilde{\mathbf{x}} - \mathcal{F}_{\mu}^*(\mathbf{s}_1) - \mathcal{F}_{\nu}^*(\mathbf{s}_2) \right\},$$

soit

$$\mathcal{F}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathcal{F}_{\mu}(\mathbf{x}) + \mathcal{F}_{\nu}(\mathbf{b}).$$

La minimisation de cette entropie globale sous la contrainte fournie par les observations est alors simplement

$$\begin{cases} \text{Inf}_{\tilde{\mathbf{x}}} \{ \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}) + \mathcal{F}_\nu(\mathbf{b}) \} \\ \text{s. c. } \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}. \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

La contrainte linéaire sera automatiquement satisfaite en utilisant $\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}$, ce qui nous conduit maintenant au problème sans contrainte

$$\text{Inf}_{\mathbf{x}} \{ \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}) + \mathcal{F}_\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \}, \quad (\text{V.23})$$

et la solution recherchée $\bar{\mathbf{x}}$ réalise le minimum de ce critère composite. On peut modifier la mesure de référence sur \mathcal{C} en utilisant la distribution de la moyenne de N variables indépendantes et de même distribution μ . Cette distribution, notée μ_N , possède le même support que μ et l'enveloppe convexe de ce support est toujours \mathcal{C} . Il est d'autre part facile de vérifier que la transformée de CRAMÉR de μ_N , \mathcal{F}_{μ_N} s'exprime simplement en fonction de la transformée de CRAMÉR de μ : $\mathcal{F}_{\mu_N} = N\mathcal{F}_\mu$. La modification de la mesure de référence sur \mathcal{C} comme indiqué ci-dessus nous permet ainsi d'introduire un paramètre variable, jouant le rôle d'un coefficient de régularisation, dans le critère mixte (V.23) :

$$N\mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}) + \mathcal{F}_\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}). \quad (\text{V.24})$$

Nous pouvons encore utiliser pour résoudre ce problème des résultats de dualité, ce qui se révélera en particulier utile si l'une des fonctions entropiques est non explicite. Le problème dual de (V.22) est simplement

$$\text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda}} \{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}_{\tilde{\mu}}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \tilde{\mathbf{A}}) \},$$

et en tenant compte de la décomposition

$$\mathcal{F}_{\tilde{\mu}}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \tilde{\mathbf{A}}) = \mathcal{F}_\mu^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A}) + \mathcal{F}_\nu^*(\boldsymbol{\lambda}^t),$$

le problème à résoudre dans le domaine dual est

$$\text{Sup}_{\boldsymbol{\lambda}} \{ \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{y} - \mathcal{F}_\mu^*(\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{F}_\nu^*(\boldsymbol{\lambda}) \}. \quad (\text{V.25})$$

Nous pouvons retrouver sur cette dernière expression le résultat obtenu dans le paragraphe 5.4.1 traitant de la contrainte du χ^2 : nous avons vu que la transformée de CRAMÉR associée à une mesure gaussienne est un terme quadratique $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{m})^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})$. Il est aisé de vérifier que sa convexe conjuguée est $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{m}$. En se restreignant au cas où la matrice de covariance est proportionnelle à l'identité et la moyenne nulle, on retrouve qu'il faut ajouter un terme quadratique en $\boldsymbol{\lambda}$ dans la fonction duale.

Lorsque le problème dual (V.25) est résolu, une relation primale duale nous permet d'obtenir la solution du problème direct :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{d\mathcal{F}_{\tilde{\mu}}^*(\boldsymbol{\lambda}^t \tilde{\mathbf{A}})}{d(\tilde{\mathbf{A}}^t \boldsymbol{\lambda})},$$

et grâce à la séparabilité de \mathcal{F}_μ^* , l'objet $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\lambda}}$ et le vecteur des paramètres de LAGRANGE $\boldsymbol{\lambda}$ sont liés par exactement la même relation que dans le cas sans bruit :

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{d\mathcal{F}_\mu^*(\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{A})}{d(\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda})}.$$

Nous pouvons donc prendre en compte des distributions de bruit spécifiques, sans perdre les propriétés et les avantages des critères entropiques : le critère mixte reste convexe, et la contrainte $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ est vérifiée automatiquement par la solution. Dans le cas où l'une des deux fonctionnelles entropiques ne présente pas d'expression explicite, nous pouvons toujours résoudre le problème en utilisant sa formulation duale, qui est toujours définie. La relation primale-duale est inchangée par rapport au cas non bruité, et la solution optimale $\bar{\mathbf{x}}$, comme tout \mathbf{x}_λ , appartient à \mathcal{C} par construction. Des exemples de prise en compte d'un bruit poissonnien sont donnés dans l'article « *The maximum entropy on the mean method, noise and sensitivity* » (annexe E), et comparés avec les résultats obtenus avec une fonction de pénalisation quadratique. La prise en compte du bruit par une fonctionnelle entropique spécifique conduit à une amélioration nette de la reconstruction.

Sensibilité de la solution Il est possible d'étudier la sensibilité de la solution à des variations sur les données. Pour cette étude de sensibilité, nous établissons l'expression de la dérivée

$$\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{x}_{\bar{\lambda}}}{d\mathbf{y}^t}.$$

La matrice de sensibilité \mathbf{H} peut alors être utilisée pour étudier la sensibilité de la solution à telle ou telle donnée, et pour établir des « barres de sensibilité » pour la reconstruction. En effet, dans la limite de faibles variations, on peut considérer que l'effet d'un bruit d'observation sur la solution est approximativement $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{H}\Delta\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{b}$; on en déduit une matrice de sensibilité $\mathbf{R}_x = \mathbf{H}\mathbf{E}\{\mathbf{b}\mathbf{b}^t\}\mathbf{H}^t$ dont les termes diagonaux nous servent à établir ces barres de sensibilité.

Le calcul de ces fonctions de sensibilité est mené dans l'article « *The maximum entropy on the mean method, noise and sensitivity* » (annexe E), ainsi que dans « *A new look at the entropy for solving linear inverse problems* » (annexe G). Nous nous contenterons donc ici de donner le résultat :

$$d\mathbf{x}_{\bar{\lambda}} = \mathcal{F}_\mu^{*''} \mathbf{A}^t \left[\mathbf{A} \mathcal{F}_\mu^{*''} \mathbf{A}^t + \mathcal{F}_\nu^{*''} \right]^{-1} d\mathbf{y}.$$

Il est intéressant de noter encore que le calcul a été mené dans le domaine dual, et fait alors apparaître les Hessiens des fonctions \mathcal{F}^* . Un calcul analogue peut être mené dans le domaine direct, et fournit la solution

$$d\bar{\mathbf{x}} = \left[\mathcal{F}_\mu'' - \mathbf{A}^t \mathcal{F}_\nu'' \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^t d\mathbf{y}.$$

En fait les propriétés des convexes conjugués fournissent $\mathcal{F}_\mu''^{-1} = \mathcal{F}_\mu^{*''}$ (voir le paragraphe §3). Cette propriété, et l'utilisation d'une des formes du lemme d'inversion matriciel (F. CHAMPAGNAT, communication personnelle), permet de vérifier que ces deux relations de sensibilité sont identiques.

L'utilisation de ces fonctions de sensibilité pour donner un intervalle de confiance autour de la solution est illustrée en annexe E. Mentionnons également que des développements analogues peuvent permettre d'étudier l'influence de paramètres de la mesure de référence (hyperparamètres) sur la solution.

Discussion. Notre procédure de prise en compte du bruit peut paraître surprenante puisqu'elle revient à identifier la réalisation de bruit présente sur les données à une moyenne. Il s'agit simplement de la moyenne d'une distribution que nous déterminons pour cela. En effet, nous construisons une distribution, la distribution la plus proche (au sens de l'information de KULLBACK) de la distribution (supposée) du bruit, qui admette cette réalisation particulière

comme moyenne. Ce problème de minimisation de l'information de KULLBACK fait alors apparaître le critère entropique $\mathcal{F}_\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$. Ce dernier critère est parfaitement adapté à la mesure de la pertinence de la reconstruction \mathbf{x} :

(i) le critère est positif et minimal pour la moyenne de la distribution du bruit,

$$\mathcal{F}_\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = 0 \text{ pour } \hat{\mathbf{x}} \mid (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{E}_\nu\{\mathbf{b}\},$$

(ii) il n'est défini que sur le support de la distribution du bruit S_ν ,

$$\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} \in S_\nu,$$

ce qui interdit les reconstructions telles que l'erreur de reconstruction ne soit pas compatible avec le support du bruit (par exemple une erreur négative alors que le bruit est à support sur \mathbb{R}^{+M}).

On peut donner une autre interprétation du critère obtenu : nous avons été amené à considérer la transformée de CRAMÉR comme une mesure d'information §4. Le critère mixte que nous obtenons peut alors être interprété comme la recherche d'une solution $[\mathbf{x}, \mathbf{b}]$ la plus générale possible (c'est-à-dire la moins informative) lorsque l'on pondère les mesures d'information associées aux deux composantes du vecteur étendu. On peut également interpréter le critère comme la recherche de la solution \mathbf{x} la moins informative lorsque l'information associée à l'erreur est contrainte à être inférieure à une valeur prescrite :

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}) \\ \mathcal{F}_\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \leq \rho. \end{aligned}$$

Nous retrouvons alors une notion d'intervalle de confiance (le problème précédent est, comme nous l'avons déjà signalé, équivalent au critère mixte (V.23)).

Nous avons également noté que la transformée de CRAMÉR peut être considérée comme une mesure de dissemblance à la solution par défaut constituée par la moyenne de la mesure de référence. Le critère mixte est alors un compromis entre une distance à la solution par défaut sous μ , $\mathcal{F}_\mu(\mathbf{x})$ et un terme d'adéquation aux données représenté par la distance $\mathcal{F}_\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ entre le résidu $\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}$ et la moyenne du bruit.

Le raisonnement que nous avons effectué n'est pas contraire à une analyse bayésienne. En effet, $\mu(\mathbf{x})$ peut être considéré comme une distribution *a priori*, et $\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ comme la vraisemblance dans le paradigme bayésien. Le critère mixte permet alors de comparer les mesures d'information associées à chacune de ces deux distributions. La solution définie par le minimum du critère mixte est alors la solution la « moins informative » pour une pondération particulière entre les informations associées à l'*a priori* et à la vraisemblance.

Parallèle avec les résultats de grandes déviations de niveau 1 Il est possible d'apporter une interprétation bayésienne du critère en terme de maximum *a posteriori* dans le cadre de sommes empiriques et de résultats de grandes déviations. Le modèle d'observation est de la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\langle \mathbf{x} \rangle_{N_1} + \langle \mathbf{b} \rangle_{N_2},$$

c'est-à-dire que l'objet et le bruit $\langle \mathbf{b} \rangle_{N_2}$ sont considérés comme des moyennes empiriques. Dans le schéma des grandes déviations, nous avons vu que la probabilité est approximativement

$$\begin{cases} P(\langle \mathbf{x} \rangle_{N_1} \in \mathcal{A}) \approx \exp\left(-N_1 \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x})\right), \\ P(\langle \mathbf{b} \rangle_{N_2} \in \mathcal{B}) \approx \exp\left(-N_2 \inf_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_\nu(\mathbf{b})\right) \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

La probabilité conjointe est alors

$$P(\langle \mathbf{x} \rangle_{N_1} \in \mathcal{A}, \langle \mathbf{b} \rangle_{N_2} \in \mathcal{B}) \approx \exp\left(-N_1 \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}) - N_2 \inf_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_\nu(\mathbf{b})\right)$$

On peut refléter l'acquisition des données \mathbf{y} en l'ensemble \mathcal{B}

$$\mathcal{B} = \{\langle \mathbf{b} \rangle_{N_2} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\langle \mathbf{x} \rangle_{N_1}, \langle \mathbf{x} \rangle_{N_1} \in \mathcal{A}\}.$$

On en déduit la probabilité *a posteriori*

$$P(\langle \mathbf{x} \rangle_{N_1} \in \mathcal{A} | \mathbf{y}) \propto \exp\left(-\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \left\{ N_2 \inf_{\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}} \mathcal{F}_\nu(\mathbf{b}) + N_1 \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}) \right\}\right) \quad (\text{V.27})$$

soit encore

$$P(\langle \mathbf{x} \rangle_{N_1} \in \mathcal{A} | \mathbf{y}) \propto \exp\left(-\inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \{N_2 \mathcal{F}_\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) + N_1 \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x})\}\right). \quad (\text{V.28})$$

et la recherche de la solution maximisant la probabilité *a posteriori* conduit à évaluer cette probabilité lorsque \mathcal{A} évolue dans \mathcal{C} , c'est-à-dire finalement à rechercher le maximum sur \mathcal{C} de

$$N_2 \mathcal{F}_\nu(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) + N_1 \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}),$$

qui est similaire au critère mixte (V.23). Notons que la relation (V.27) est analogue à un résultat donné récemment par (GAMBOA 1994).⁴

Ce modèle suppose que les variations du bruit sur les données soient très faibles, afin de pouvoir modéliser celui-ci comme une moyenne empirique. Dans le cas contraire, l'identification de la distribution du bruit à la distribution d'une moyenne empirique conduit à choisir pour les variables intervenant dans la moyenne empirique une variance très importante (proportionnelle à N_2), un choix qui peut ne pas être physiquement très cohérent.

5.4.3 Critères entropiques et distributions *a priori*

Pour conclure ce document, nous voulons terminer sur un thème qui pourrait constituer une prolongation de ce travail. Il s'agit ici de l'intervention de nos critères entropiques dans la construction de distributions *a priori* pour une approche bayésienne. Nous avons obtenu $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ comme une mesure d'information sur un convexe \mathcal{C} . Chacun des points de ce convexe est tour à tour considéré comme la moyenne d'une distribution, et l'information $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est la valeur du minimum de l'information de KULLBACK entre une distribution de référence et une distribution possédant la moyenne prescrite. Considérons alors deux points distincts \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, et $P_{\mathbf{x}}$

4. Dans cet article GAMBOA considère un modèle dans lequel objet et bruit subissent une même transformation ϕ ; il obtient alors une fonction de taux similaire à celle de la relation (V.27), mais l'opérateur ϕ étant supposé non inversible, la minimisation sur \mathbf{b} ne peut être simplifiée pour obtenir (V.28).

et $P_{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}}$ les distributions associées. La distance entre ces deux points peut alors être évaluée comme la « distance » entre ces deux distributions, $D(P_{\mathbf{x}}||P_{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}})$. Un développement limité de cette distance fournit alors (KULLBACK 1959, page 28)

$$D(P_{\mathbf{x}}||P_{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}}) = \Delta\mathbf{x}^t \mathbf{H}(\mathbf{x}) \Delta\mathbf{x},$$

où la matrice $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ est la matrice d'information de FISHER pour le paramètre \mathbf{x} :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = E_{\mu} \left\{ p_{\mathbf{x}} \left(p'_{\mathbf{x}}/p_{\mathbf{x}} \right)^2 \right\}.$$

Au sein de la famille exponentielle engendrée par μ , on peut identifier la matrice de FISHER et le critère entropique $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. En effet, il est facile de vérifier que $\text{Var}_{p_{\mathbf{x}}} \{ \mathbf{X} \} \mathbf{H} = \mathcal{F}_{\mu}^{*''}(\bar{\lambda}) \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$. Or $\mathcal{F}^{*''-1} = \mathcal{F}''$, et on a alors $\mathcal{F}''(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$. Sur le convexe \mathcal{C} , la matrice de FISHER est la représentation matricielle d'une métrique. L'élément de volume s'écrit alors $\sqrt{\det[\mathcal{F}_{\mu}''(\mathbf{x})]} d\mathbf{x}$, et génère ainsi une mesure sur \mathcal{C} , qui est la mesure invariante vis-à-vis de la métrique de FISHER. Supposons maintenant que nous connaissions l'information moyenne sur \mathcal{C} , (mesurée bien entendu par rapport à la métrique de FISHER) :

$$\bar{\mathcal{F}} = \int p(\mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{x}) \det[\mathcal{F}_{\mu}''(\mathbf{x})]^{1/2} d\mathbf{x}.$$

Cette donnée ne nous suffit pas à identifier une densité $p(\mathbf{x})$ qui admette cette information moyenne. Pour obtenir cette densité, nous choisissons alors de maximiser son entropie relative à la nouvelle métrique

$$\begin{cases} \text{Max}_p \int p(\mathbf{x}) \log(p(\mathbf{x})) \det[\mathcal{F}_{\mu}''(\mathbf{x})]^{1/2} d\mathbf{x}, \\ \text{s. c. } \bar{\mathcal{F}} = \int p(\mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{x}) \det[\mathcal{F}_{\mu}''(\mathbf{x})]^{1/2} d\mathbf{x}. \end{cases} \quad (\text{V.29})$$

On identifie alors la distribution

$$P(\mathbf{x}) = \exp(-\alpha \mathcal{F}(\mathbf{x})) \det[\mathcal{F}_{\mu}''(\mathbf{x})]^{1/2}, \quad (\text{V.30})$$

qui, sélectionnée comme distribution *a priori* dans une approche bayésienne, peut permettre d'encoder des informations diverses, comme par exemple une information de gabarit, et de profiter des propriétés agréables des fonctions entropiques. Sous certaines conditions (convexité de la log-vraisemblance, comportement de $\det[\mathcal{F}_{\mu}''(\mathbf{x})]$), la recherche de la solution du maximum *a posteriori* pourra être menée à l'aide d'une approche duale.

La distribution (V.30) que nous avons exhibée ci-dessus est très proche, mais obtenue de façon très différente, des *entropic priors* de C. RODRÍGUEZ (RODRÍGUEZ 1991). La géométrie suggérée dans ce paragraphe est une géométrie riemannienne fondée sur la métrique de l'information (KASS 1989).

ANNEXE C

Probabilistic Issues in Fourier Synthesis

*First International School in computing and programming in Systems,
December 1993.*

ANNEXE D

Compléments et notes de lecture

ANNEXE E

The maximum entropy on the mean method, noise and sensitivity
*14^e colloque Maximum entropy and Bayesian methods, Cambridge,
Août 1994.*

ANNEXE F

Restoration of spiky signals : a new optimal estimate and a comparison
Accepté pour une présentation au colloque ICASSP, Août 1995.

ANNEXE G

A new look at the entropy for solving linear inverse problems

Soumis à IEEE transactions on Information Theory.

Références

- H. AKAIKE (1966), « Note on higher order spectra », *Ann. Inst. Statist. Math.*, **18**, pages 123–126.
- R. AZENCOTT (1978), « Grandes déviations et applications », dans P. L. HENNEQUIN, éditeur, *École D'été de Probabilité de Saint Flour VIII-1978*, pages 2–172, Springer-Verlag, 1978.
- R. BALIAN (1982), *Du microscopique au macroscopique, cours de physique statistique de l'École Polytechnique*, volume 1, Ellipses, Paris.
- M. BARTLETT (1955), *Introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, London.
- J.-F. BERCHER (1993), « Un algorithme de factorisation bispectrale », dans *Actes Du 14^e Colloque GRETSI*, pages 117–120, Juan-les-pins, France.
- J.-F. BERCHER & P. LARZABAL (1994), « Traitement d'antenne avec adéquation de modèle », *Traitement du Signal*, **10**, n° 5-6, pages 349–359.
- J.-F. BERCHER, G. LE BESNERAIS & G. DEMOMENT (1994), « The maximum entropy on the mean method, noise and sensitivity », dans S. SIBISI & J. SKILLING, éditeurs, *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, Dordrecht, Kluwer.
- J.-F. BERCHER, G. LE BESNERAIS & G. DEMOMENT (1995), « Building Convex Criteria for Solving Linear Inverse Problems », dans *Actes Du Colloque Inverse Problems*, Saïgon.
- M. A. BERGER (1992), *An Introduction to Probability and Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York.
- A. BLANC-LAPIERRE & R. FORTET (1953), *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, France.
- P. BONDON & B. PICINBONO (1991), « De la blancheur et de ses transformations », *Traitement du Signal*, **5**, n° 5 spécial.
- M. BORN & E. WOLF (1978), *Principle of Optics*, Pergamon Press, Oxford.
- J. BORWEIN & A. LEWIS (1991), « Duality Relationships for Entropy-like Minimization Problems », *SIAM Journal of Control and Optimization*, **29**, n° 2, pages 325–338.
- J. M. BORWEIN & A. S. LEWIS (1992), « Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory », *Mathematical Programming*, **57**, pages 15–48.
- J. M. BORWEIN & A. S. LEWIS (1992), « Partially finite convex programming, Part II: Explicit lattice models », *Mathematical Programming*, **57**, pages 49–83.

- P. BRÉMAUD (1993), *Signaux aléatoires pour le traitement du signal et les communications*, Ellipses.
- D. BRILLINGER (1965), « An introduction to polyspectra », *Annals of mathematical Statistics*, **36**, pages 1351–1374.
- D. BRILLINGER (1977), « The identification of a particular nonlinear time series system », *Biometrika*, **65**, pages 509–515.
- D. BRILLINGER & M. ROSENBLATT (1967), « Asymptotic theory of estimates of k-th order spectra », dans B. HARRIS, éditeur, *Spectral Analysis of Time Series*, pages 153–188, Wiley, New York.
- D. BRILLINGER & M. ROSENBLATT (1967), « Computation and interpretation of k-th order spectra », dans B. HARRIS, éditeur, *Spectral Analysis of Time Series*, pages 189–232, Wiley, New York.
- L. BRILLOUIN (1956), *Science and Information Theory*, Academic Press.
- BUCK & MACAULAY (1989), « Linear Inversion by the Method of Maximum Entropy », dans J. SKILLING, éditeur, *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- CIARLET (1982), *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*, Paris, masson edition.
- T. M. COVER & J. A. THOMAS (1991), *Elements of Information Theory*, John Wiley and Sons, New York.
- I. CSISZÁR (1975), « I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems », *The Annals of Probability*, **3**, pages 146–158.
- I. CSISZÁR (1984), « Sanov property, generalized I -projection and a conditional limit theorem », *The Annals of Probability*, **12**, n° 3, pages 768–793.
- I. CSISZÁR (1985), « An extended maximum entropy principle and a bayesian justification », dans J. M. BERNARDO, M. H. DEGROOT & A. F. M. SMITH, éditeurs, *Bayesian Statistics 2*, pages 83–98, Elsevier Science Publishers, North-Holland.
- I. CSISZÁR (1991), « Why least-squares and maximum entropy? An axiomatic approach to inference for linear inverse problems », *The Annals of Statistics*, **19**, n° 4, pages 2032–2066.
- I. CSISZÁR & J. KÖRNER (1981), *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*, Academic Press.
- D. DACUNHA-CASTELLE & M. DUFLO (1982), *Probabilités et statistiques, 1. Problème à temps fixe*, Masson, Paris.
- D. DACUNHA-CASTELLE & F. GAMBOA (1990), « Maximum d'entropie et problème des moments », *Annales de l'Institut Henry Poincaré*, **26**, n° 4, pages 567–596.
- A. DECARREAU, D. HILHORST, C. LEMARÉCHAL & J. NAVAZA (1992), « Dual Methods in Entropy Maximization. Application to some Problems in Crystallography », *SIAM Journal of Optimization*, **2**, n° 2, pages 173–197.

-
- A. DEMBO & O. ZEITOUNI (1992), *Large Deviations Techniques*, Jones and Bartlett Publishers, Boston.
- G. DEMOMENT (1987), « Déconvolution des signaux », dans *Cours ESE*, volume 5883, École Supérieure d'Électricité.
- D. L. DONOHO, I. M. JOHNSTONE, J. C. HOCH & A. S. STERN (1992), « Maximum Entropy and the Nearly Black Objects », *Journal of Royal Statistical Society B*, **54**, n° 1, pages 41–81.
- R. S. ELLIS (1985), *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, New York.
- B. FRIEDEN (1972), « Restoring with Maximum Likelihood and Maximum Entropy », *Journal of Optical Society America*, **62**, n° 4, pages 511–518.
- F. GAMBOA (1989), *Méthode du maximum d'entropie sur la moyenne et applications*, Thèse de doctorat, Dépt.de Mathématiques, Université. de Paris-Sud., Orsay, France.
- F. GAMBOA (1994), « New Bayesian Methods for Ill Posed Problems », Soumis.
- F. GAMBOA & É. GASSIAT (1991), « Extension of the maximum entropy method on the mean and a bayesian interpretation of the method », Soumis.
- F. GAMBOA & É. GASSIAT (1991), « MEM Techniques for Solving Moment Problems », *Prob. Theory and Related Fields*.
- F. GAMBOA & É. GASSIAT (1994), « Bayesian methods and Maximum entropy for ill posed inverse problems », soumis à *The Annals of Statistics*.
- F. GAMBOA & É. GASSIAT (1994), « The Maximum Entropy Method on the Mean: Applications to Linear Programming and Superresolution », *Mathematical Programming*, n° 66, pages 103–122.
- F. GAMBOA & É. GASSIAT (1994), « Sets of Superresolution and the Maximum Entropy Method on the Mean », Accepté à *SIAM Journal of Mathematical Analysis*.
- F. GAMBOA & M. LAVIELLE (1994), « On Two-Dimensional Spectral Realization », *IEEE Transactions on Information Theory*, **40**, n° 5, pages 1603–1608.
- G. GIANNAKIS (1989), « Signal reconstruction from multiple correlations: frequency and time domain approaches », *Journal of Optical Society America*, **6**, n° 5, pages 682–697.
- G. GIANNAKIS & A. SWAMI (1990), « On Estimating Noncausal Nonminimum Phase ARMA Models of Non-Gaussian Processes », *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, **38**, n° 3, pages 478–495.
- S. F. GULL & G. J. DANIELL (1978), « Image reconstruction from incomplete and noisy data », *Nature*, **272**, pages 686–690.
- R. V. L. HARTLEY (1928), « Transmission of Information », *Bell System Technical Journal*, **7**, pages 535–563.
- H. HASSELMANN, M. MUNK & G. MC DONALD (1962), « Bispectra of ocean waves », dans M. ROSENBLATT, éditeur, *Proc. Symp. On Time Series Analysis*, pages 125–139, 1962.

-
- ITAKURA & SAITO (1970), « A Statistical Method for Estimation of Speech Spectral Density and Formant Frequencies », *Electron. and Commun.*, **53-A**, pages 36–43.
- E. T. JAYNES (1957), « Information Theory and Statistical Mechanics I », *Physical review*, **106**, pages 620–630.
- E. T. JAYNES (1957), « Information Theory and Statistical Mechanics II », *Physical review*, **108**, pages 171–190.
- E. T. JAYNES (1982), « On the Rationale of Maximum-Entropy Methods », *Proceedings of the IEEE*, **70**, pages 939–952.
- L. K. JONES & C. L. BYRNE (1990), « General Entropy Criteria for Inverse Problems, with Applications to Data Compression, Pattern Classification and Cluster Analysis », *IEEE Transactions on Information Theory*, **36**, n° 1, pages 23–30.
- L. K. JONES & V. TRUTZER (1989), « Computationally feasible high-resolution minimum-distance procedures which extend the maximum-entropy method », *Inverse Problems*, **5**, pages 749–766.
- R. E. KASS (1989), « The geometry of asymptotic inference », *Statistical Science*, **4**, n° 3, pages 188–234.
- S. KULLBACK (1959), *Information Theory and Statistics*, Wiley, New York.
- A. LABEYRIE (1970), « Attainment of diffraction-limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images », *Astron. Astrophys.*, **6**, pages 85.
- A. LABEYRIE (1976), « High resolution techniques in optical interferometry », dans E. WOLF, éditeur, *Progress in Optics*, pages 46–87, 1976.
- H. LANDAU & H. POLLACK (1961), « Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-II », *Bell Syst. Tech. J.*, **40**, pages 65–84.
- H. LANDAU & H. POLLACK (1962), « Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty - III », *Bell Syst. Tech. J.*, **41**, pages 1295–1336.
- G. LE BESNERAIS (1993), *Méthode du maximum d'entropie sur la moyenne, critères de reconstruction d'image et synthèse d'ouverture en radio-astronomie*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud.
- G. LE BESNERAIS (1994), « Problèmes de calibration en synthèse d'ouverture par voie interférométrique », *Traitement du Signal*, pages nnn–nnn.
- J. P. LE CADRE *et al* (1993), « Calibration d'antennes », Rapport de synthèse, GdR TdSI.
- K. LIH & M. ROSENBLATT (1982), « Deconvolution and Estimation of Transfer Function Phase and coefficients for Nongaussian Linear Processes », *The Annals of Statistics*, **10**, n° 4, pages 1195–1208.
- A. W. LOHMANN & B. WIRNITZER (1984), « Triple correlations », *Proceedings of the IEEE*, **72**, n° 7, pages 889–901.
- A. W. LOHMANN, G. P. WEIGELT & B. WIRNITZER (1983), « Speckle masking in astronomy – Triple correlation theory and applications », *Applied Optics*, **22**, n° 24, pages 4028–4037.

- D. LUENBERGER (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, J., New York, 1 edition.
- B. LUMEAU & J.-F. BERCHER (1991), « Critère optimisant un compromis biais-variance pour estimer l'ordre d'un processus autorégressif mono ou multivariable. », dans *13^e colloque GRETSI*, pages 361–364, Septembre 1991.
- B. LUMEAU & H. CLERGEOT (1990), « Méthode d'estimation de la matrice de densité spectrale : optimisation du compromis biais-variance », *Traitement du Signal*, **7**, n° 2.
- B. LUMEAU, J.-C. PESQUET, J.-F. BERCHER & L. LOUVEAU (1992), « Optimization of bias-variance trade-off in non-parametric spectral analysis by decomposition into wavelets packets. », dans *International Conference Wavelets and Applications*, Toulouse.
- J. M. MENDEL (1991), « Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some applications », *Proceedings of the IEEE*, **79**, n° 3, pages 278–305.
- D. MUKHERJEE & D. HURST (1984), « Maximum Entropy Revisited », *Statistica Neerlandica*, **38**.
- R. NARAYAN & R. NITYANANDA (1986), « Maximum entropy image restoration in astronomy », *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **24**, pages 127–170.
- J. NAVAZA (1985), « On the maximum entropy estimate of electron density function », *Acta Crystallographica*, pages 232–244.
- J. NAVAZA (1986), « The Use of Non-Local Constraints in Maximum-Entropy Electron Density Reconstruction », *Acta Crystallographica*, pages 212–223.
- J. NAVAZA (1990), « Accurate solutions of the maximum entropy equations. Their impact on the foundations of direct methods. », dans *Int. School Comp.*, Bishenberg, Germany.
- C. NIKIAS & M. RAGHUVEER (1987), « Bispectrum Estimation : A Digital Signal Processing Framework », *Proceedings of the IEEE*, **75**, n° 7.
- R. PAN & C. L. NIKIAS (1988), « The complex cepstrum of higher moments », *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, **36**, pages 186–205.
- PAPOULIS (1984), *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New-York, 2 edition.
- A. RÉNYI (1966), *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris.
- C. ROBERT (1990), « An entropy concentration theorem : Applications in artificial intelligence and descriptive statistics », *Journal of Applied Probability*, **27**, pages 303-313.
- R. T. ROCKAFELLAR (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press.
- R. T. ROCKAFELLAR (1993), « Lagrange Multipliers and Optimality », *SIAM Review*, **35**, n° 2, pages 183-238.
- C. RODRÍGUEZ (1991), « Entropic priors », *Distribué sous forme électronique, sous Mosaic*, [http:// omega.albany.edu/8008/carlos](http://omega.albany.edu/8008/carlos).
- M. ROSENBLATT (1962), *Random Processes*, Oxford press, New York.

- M. ROSENBLATT (1980), « Linear Processes and Bispectra », *Journal of Applied Probability*, **17**, pages 265–270.
- M. ROSENBLATT & J. W. VAN NESS (1965), « Estimation of the bispectrum », *Annals of mathematical Statistics*, **36**, pages 1120–1136.
- T. SATO & K. SASAKI (1977), « Bispectral holography », *Journal of the Acoustical Society of America*, **62**, pages 404–408.
- T. SATO, S. WADAKA, J. YAMAMOTO & J. ISHIJ (1978), « Imaging System using an intensity triple correlator », *Applied Optics*, **17**, n° 13, pages 2047–2052.
- F. SCHWAB (1984), « Optimal Gridding of Visibility Data in Radio Interferometry », dans *Indirect Imaging*, pages 333–346, Roberts, J.A., 1984.
- C. SHANNON (1948), « The Mathematical Theory of Communication », *Bell System Technical Journal*, **27**, pages 379–423, 623–656.
- J. SHORE & R. JOHNSON (1980), « Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy », *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-26**, pages 26–37.
- J. SHORE & R. JOHNSON (1983), « Comments and Corrections on Axiomatic Derivation of the Principle of Maximum Entropy and the Principle of Minimum Cross-entropy », *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-29**.
- J. SHORE & R. JOHNSON (1984), « Which is the Better Entropy Expression for Speech Processing: $-S \log S$ or $\log S$? », *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, **ASSP-32**, n° 1.
- J. E. SHORE (1981), « Minimum cross-entropy spectral analysis », *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, **ASSP-29**, n° 2, pages 230–237.
- J. SKILLING (1984), « The maximum entropy method », *Nature*, **309**, pages 748–749.
- J. SKILLING (1989), « The Axioms of Maximum Entropy », dans ERICKSON & SMITH, éditeurs, *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, pages 173–187, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- J. SKILLING (1989), « Classical Maximum Entropy », dans J. SKILLING, éditeur, *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, pages 45–52, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- A. M. TEKALP & A. T. ERDEM (1989), « Higher-order spectrum factorization in one and two dimensions with applications in signal modeling and non minimum phase system identification », *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, **37**, pages 1537–1549.
- THOMPSON, MORAN & SWENSON (1984), *Interferometry and Synthesis in Radio-astronomy*, Wiley Interscience, New-York.
- D. M. TITTERINGTON (1984), « “The maximum entropy method for data analysis” suivi d’une réponse de J. SKILLING », *Nature*, **312**, pages 381–382.

J. W. VAN NESS (1966), « Asymptotic normality of bispectral estimates », *Annals of mathematical Statistics*, **37**, pages 1257-1272.

G. P. WEIGELT (1977), « Modified astronomical speckle interferometry “speckle masking” », *Optics Communication*, **21**, n° 1, pages 55–59.

N. WIENER (1948), *Cybernetics, or control and communication in the animal and the machine*, The MIT Press and Wiley.

Table des matières

I	Introduction aux problèmes inverses	1
1	Généralités	1
2	Caractère mal-posé d'un problème	2
3	Inverse généralisée	3
3.1	Définition	3
3.2	Propriétés et limitations	3
4	Régularisation d'un problème mal-posé	4
5	Minimisation d'un critère mixte	5
II	Synthèse d'ouverture	7
1	Synthèse d'ouverture	7
1.1	Cadre général	8
1.2	Spécification du modèle de propagation	10
1.3	Exploitation du modèle de propagation, théorème de VAN CITTERT-ZERNICKE	11
2	Synthèse d'ouverture par rotation terrestre	13
2.1	Reconstruction par transformée de FOURIER inverse	15
2.2	Reconstruction par formation de voie	18
3	Introduction au traitement d'antenne	20
	Annexe A : Traitement d'antenne avec adéquation de modèle	21
III	Analyse bispectrale et clôture de phase	33
1	Relations de clôture en interférométrie	33
2	Interférométrie optique	35
2.1	Principe des mesures	36
2.2	Interférométrie de <i>speckle</i>	37
2.3	Triples corrélations et <i>speckle masking</i>	37
3	Cumulants et polyspectres	39
3.1	Généralités	40
3.1.1	Motivations	40
3.1.2	Définitions et propriétés	40
3.1.3	Multicorrélations et polyspectres	42
3.1.4	Estimation des polyspectres et multicorrélations	44
3.2	Une procédure de lissage bispectral	45
3.2.1	Procédure générale	45
3.2.2	Application au domaine bispectral	46
3.2.3	Illustration	47
3.3	Applications à l'identification	47

3.3.1	Méthodes paramétriques	49
3.3.2	Une méthode bicepstrale de factorisation	51
3.3.3	Un algorithme de factorisation bispectrale	53
Annexe B : <i>Un algorithme de factorisation bispectrale</i>		55
IV Entropie		61
1	Quelques notes historiques	62
2	Entropie et théorie de l'information	62
2.1	Entropies jointes et conditionnelles	64
2.2	Gain d'information – entropie relative	66
2.3	Séquences typiques, lois des grands nombres et distribution empirique	68
2.3.1	Suites typiques	69
2.3.2	Théorème de SANOV	70
2.4	Un principe d'inférence	73
2.5	Cas continu	75
3	Entropie et modèle de BOLTZMANN	76
3.1	Le modèle de BOLTZMANN	76
3.2	États et distributions à entropie maximale	78
3.2.1	Distribution microcanonique	78
3.2.2	Distribution canonique	79
3.2.3	Distribution grand canonique	80
3.2.4	Cas d'un nombre quelconque de contraintes	80
3.3	Propriétés de la distribution de BOLTZMANN	81
4	Premières applications pour la résolution des problèmes inverses	82
4.1	La méthode de GULL et DANIELL	82
4.2	La méthode de SHORE en analyse spectrale	84
V Critères de nature entropique		87
1	Solution du problème de maximisation de la μ -entropie	89
2	Propriétés de grandes déviations et entropies de niveau 1	92
2.1	Motivations	92
2.2	Principe de contraction, entropies de niveau 1	93
3	Quelques résultats de dualité	95
3.1	Dualité de LAGRANGE	95
3.2	Dualité de FENCHEL	96
3.2.1	Fonctions convexes conjuguées	96
3.2.2	Théorème de dualité de FENCHEL	97
3.2.3	Relation entre les solutions des problèmes primal et dual	99
3.2.4	Exemple d'application	100
4	Une construction « axiomatico-déductive »	102
4.1	Quelques propriétés désirables	102
4.2	Conséquences de ces propriétés	103
5	La méthode du maximum d'entropie sur la moyenne	105
5.1	Introduction	105
5.2	Présentation de la méthode	106
5.3	Exemples de critères	110
5.3.1	Mesure de référence gaussienne	111

5.3.2	Mélange de distributions	111
5.3.3	Mesure de référence gamma et critère d'ITAKURA-SAÏTO	111
5.3.4	Mesure de POISSON et entropie de SHANNON	113
5.3.5	Sommes poissonnées	114
5.3.6	Mesure de référence uniforme	115
5.3.7	Mesure de référence de BERNOULLI	116
5.4	Prise en compte du bruit d'observation	120
5.4.1	La contrainte du χ^2	120
5.4.2	Prise en compte du bruit dans la procédure MEM	121
5.4.3	Critères entropiques et distributions <i>a priori</i>	125
Annexe C : Probabilistic Issues in Fourier Synthesis		127
Annexe D : Compléments et notes de lecture		157
Annexe E : The maximum entropy on the mean method, noise and sensitivity		175
Annexe F : Restoration of spiky signals : a new optimal estimate...		186
Annexe G : A new look at the entropy for solving linear inverse problems		191
Références		237
Table des matières		245
Index		248

Index

Analyse spectrale,	84	Entropie de niveau 2,	92
Bicepstre,	51	Entropies de niveau 1,	93
Bicorrélation,	42	Principe de contraction,	93
Bispectre,	42	Information,	62
Définition,	42	Information moyenne,	63
Convexes conjuguées,	96	Information de KULLBACK,	
Cumulants,	40	<i>voir</i> Information de KULLBACK-	
Définitions,	40	LEIBLER	
Propriétés,	41	Information mutuelle,	65
Distance de KULLBACK,		Information relative,	
<i>voir</i> Information de KULLBACK-		<i>voir</i> Information mutuelle	
LEIBLER		Inverse généralisée,	3
Distorsion linéaire,	1	Information de KULLBACK-LEIBLER, ...	67
Distribution empirique,	68, 70	et distributions continues,	76
Distribution exponentielle,	89	Propriétés	
Divergence d'ITAKURA-SAÏTO,	84, 111	additivité,	68
Dualité,	91, 95	convexité,	67
Dualité de FENCHEL,	96, 97	positivité,	67
Dualité de LAGRANGE,	95	Matrice bispectrale,	45, 53
Fonction duale,	91	Factorisation,	53
Fonctions convexes conjuguées,	96	Minimum d'information de KULLBACK-	
lagrangiens,	95	LEIBLER,	72
Entropie,	62	Minimum d'information de KULLBACK-	
μ -entropie,	76, 89	LEIBLER (Principe du),	73
Notes historiques,	62	Minimum d'entropie croisée,	72
Entropie de BURG,	84, 111	Multicorrélations,	42
Entropie de FERMI-DIRAC,	117	Estimation,	44
Entropie de SHANNON,	62, 63, 83	Polyspectres,	42
et distributions continues,	75	Définition,	42
Entropie conditionnelle,	64	Estimation,	44
Entropie conjointe,	64	Factorisation,	43
Entropie et physique,	75	Principe de contraction	
Entropie relative,	66	Dualité,	102
Fonction de partition,	90	Grandes déviations,	93
Gain d'information,	66	Problème inverse,	1
Grandes déviations,	70, 92	Critère mixte,	5
		Discrétisation,	2
		Mal posé,	2

Régularisation	
Critère mixte,	5
Généralités,	4
Synthèse d'ouverture,	7
Synthèse d'ouverture	
par rotation terrestre,	13
Synthèse de FOURIER,	15
Séquences typiques,	68
Théorème de SANOV,	70
Théorème de VAN CITTERT-ZERNICKE, .	11
Traitement d'antenne,	8
Formation de voies,	18
Généralités,	20
Modèle de propagation,	8, 10