CORRIGÉ DU TD SIGNAL I3 / IFC

Signaux aléatoires

EXERCICE 1 :

$$x(t) = B + A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

moyenne : $E[x(t)] = E[B] + E[A]\,E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)]$

(indépendance entre A et ϕ).

Il faut déterminer

$E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)]$ où ϕ est uniforme sur $[0, 2\pi]$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi)\,d\phi \qquad p(\phi) = \frac{1}{2\pi} \text{ pour } \phi \in [0, 2\pi].$$

$= 0$ (intégrale d'un cos sur une période).

Il reste alors

$$E[x(t)] = m_B + m_A \cdot 0 = m_B$$

autocorrélation :

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)\,x(t-\tau)]$$
$$= E\Big[\big(B + A\cos(2\pi f_0 t + \phi)\big)\big(B + A\cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \phi)\big)\Big]$$
$$= E\Big[B^2 + AB\cos(2\pi f_0 t + \phi) + AB\cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \phi)$$
$$+ A^2\cos(2\pi f_0 t + \phi)\cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \phi\Big].$$

* $E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)\cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \phi)]$

$$= E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 (2t-\tau) + 2\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

avec $E[\cos(\dots + k\phi)] = 0$

En utilisant en plus l'indépendance entre A, B et ϕ, il reste :

$$R_{xx}(\tau) = E[B^2] + E[A]E[B]\,\overbrace{E[\cos(\dots)]} + E[A]E[B]\,\overbrace{E[\cos(\dots)]}$$
$$+ E[A^2]\,E[\cos(\ )\cos(\ )]$$

$$R_{xx}(\tau) = e_B^{\,2} + \frac{e_A^{\,2}}{2}\cos(2\pi f_0 \tau).$$

Le moment d'ordre 1 ne dépend pas du temps et le moment d'ordre 2 (autocorrélation) ne dépend que du retard : le signal aléatoire est faiblement stationnaire d'ordre 2.

EXERCICE 2 :

moyennes : $E[y(n)] = E[x(n)]\,E[\cos(2\pi f_0 n + \phi)]$

par indépendance entre $x(n)$ et ϕ.

$= m_x \cdot 0$ (c.f. exercice 1).

$E[z(n)] = m_x \cdot 0 = 0$

autocorrélations :

$E[y(n)\,y(n-r)] = E[x(n)\,x(n-r)] \times$

$E[\cos(2\pi f_0 n + \phi)\cos(2\pi f_0 (n-r) + \phi)]$

soit $R_y(r) = R_x(r) \cdot \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 r)$.

$E[z(n)\,z(n-r)] = E[x(n)\,x(n-r)] \times$

$E[\cos((2\pi f_0 + \lambda)n + \phi)\cos((2\pi f_0 + \lambda)(n-r) + \phi)]$

et $R_z(r) = \frac{1}{2} R_x(r)\cos(2\pi(f_0 + \lambda)r)$.

Les moments d'ordre 1 sont indépendants de n, les autocorrélations ne dépendent que du retard r : les signaux $y(n)$ et $z(n)$ sont faiblement stationnaires du second ordre.