__Sans documents__,
sauf dictionnaires de langues.
***Durée** : une heure.*
Partie de J.-F. Bercher, à rendre sur une copie séparée.

Toute affirmation, pour être prise en compte, devra être justifiée. La qualité de l'expression écrite et celle de la présentation interviendront dans l'appréciation de la copie.
Pensez à gérer votre temps. Comme toujours, il est conseillé de prendre quelques minutes pour lire attentivement l'énoncé.

I - Petites questions

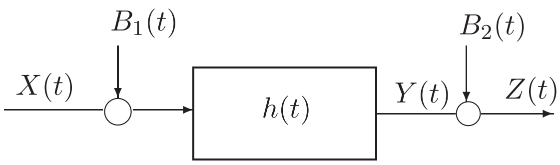
Question 1 : Soit $\Phi(\omega)$ une variable aléatoire distribuée selon une loi uniforme sur $[0 - 2\pi]$, notée $p_\Phi(\phi)$. Représentez la densité $p_\Phi(\phi)$. Exprimez $E_\Phi[\cos(2\pi f_o n + \phi)]$, où f_o est choisi pour vérifier la condition de Shannon. Quelle condition a t'on sur f_o ? Calculez $E_\Phi[2\pi f_o n + \cos(\phi)]$.

Question 2 : Sous quelles conditions peut on écrire

$$E[X(n)X^*(n-k)] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)X^*(n-k)$$

II - Identification

Soit le système



Si $B_1(t)$ et $B_2(t)$ sont décorrélés de $Y(t)$, $X(t)$ et entre eux, montrez que $R_{ZX}(\tau) = R_{YX}(\tau)$. Donnez l'expression de $Y(t)$. Montrez que $Y(t)$ peut s'exprimer sous la forme $Y(t) = Y_0(t) + Y_1(t)$, où $Y_0(t)$ et $Y_1(t)$ sont respectivement les réponses à $X(t)$ et $B_1(t)$. Montrez alors que $R_{YX}(\tau) = R_{Y_0X}(\tau)$.

Quel est l'intérêt de prendre pour $X(t)$ un bruit blanc dans le système précédent ? Que vaut alors $R_{ZX}(\tau)$?

III - Bruit blanc à temps discret

On considère un bruit blanc gaussien, centré, et de variance $No/2$. Si nécessaire, on pourra supposer ce signal stationnaire et ergodique.

1. Quelle est sa densité spectrale de puissance ? Représentez la.
2. Ce signal est-il à puissance moyenne finie ? (justifiez)
3. Soit un filtre passe-bas idéal défini par

$$\begin{cases} H(f) & = & 1 & \text{pour f} \in]-B, B[\\ & = & 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Calculez et donnez l'expression de la réponse impulsionnelle $h(t)$ correspondante.

   (b) Représentez cette réponse impulsionnelle, en indiquant notamment l'amplitude prise au maximum et les abscisses des passages par zéro.

   On note $y(t)$ le signal obtenu en sortie du filtre.
4. Énoncez le théorème de Wiener-Kintchine.
5. Énoncez la version simplifiée de la formule des interférences fournissant la densité spectrale de puissance de la sortie d'un filtre en fonction de la densité spectrale de puissance de l'entrée.
6. Quelle est la densité spectrale de puissance $S_{YY}(f)$ de $y(t)$?
7. Quelle est la puissance de $y(t)$?
8. Calculez (si nécessaire) et représentez la fonction d'autocorrelation correspondante $R_{YY}(\tau)$. Déduisez-en au passage que la convolution de deux sinus cardinaux est un sinus cardinal.
9. Est-il possible d'échantillonner $y(t)$ sans perte d'information ? Dans l'affirmative, quelle condition faut il respecter pour la fréquence d'échantillonnage f_E ? Dans la suite, vous choisirez pour f_E la fréqunce d'échantillonnage minimale.
   On note $y(k)$ le signal discret obtenu après échantillonnage à la fréquence f_E, et $R_{YY}^{(D)}$ (D pour discret) la fonction d'autocorrélation correspondante.
10. Montrez que
$$R_{YY}^{(D)}(k) = R_{YY}(kT_E)$$
11. Que devient alors la fonction d'autocorrélation calculée en 8 ? Représentez cette séquence.
12. Soit $\delta(n)$ le symbole de Kronecker

$$\begin{cases} \delta(n) & = & 1 & \text{pour } n = 0 \\ & = & 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   En utilisant l'expression de la transformée de Fourier discrète (TFD) d'une séquence, vérifiez que la TFD de $\delta(n)$ est une constante.
13. Déduisez en l'expression de la densité spectrale de puissance $S_{YY}^{(D)}(f)$ de $y(k)$.
14. En utilisant la « dualité échantillonnage-périodisation », montrez que la densité spectrale de puissance $S_{YY}^{(D)}(f)$ du signal échantillonné $y(k)$ se déduit facilement de la densité spectrale de puissance $S_{YY}(f)$ de $y(t)$ calculée en 6, et que l'on en déduit immédiatement l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_{YY}^{(D)}$ demandée en 11.