

Partie de J.-F. BERCHER, à rendre sur une copie séparée

Question 1 : On considère l'équation aux différences

$$y(n) = x(n - 1) + x(n) + x(n + 1).$$

- 1-a Mettre cette équation aux différences sous la forme d'une convolution discrète, donnez la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$.
- 1-b Donnez la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre.
- 1-c Donnez la réponse en fréquence $H(f)$. Vous pourrez chercher à faire apparaître un cosinus.
- 1-d Déduisez en le module de $H(f)$ et sa phase $\phi(f)$. Représentez $|H(f)|$, en précisant clairement le domaine de variation de f .

Question 2 : Si l'entrée est

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \phi), \text{ avec } f_0 = 1/3,$$

quelle est la sortie du filtre ?

Question 3 : L'entrée est maintenant un bruit blanc à temps discret, centré, d'autocorrélation

$$\begin{cases} R_{XX}(k) = P_B \text{ si } k = 0, \\ R_{XX}(k) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- 3-a Quelle est la moyenne statistique m_Y de la sortie $y(n)$ du filtre ?
- 3-b Calculez l'autocorrélation de la sortie $R_{YY}(k)$.

Question 4 : La sortie du filtre $y(n)$ est maintenant bruitée par un bruit additif $b(n)$, centré et d'autocorrélation $R_{BB}(k)$, indépendant de $x(n)$, et par conséquent de $y(n)$

$$z(n) = y(n) + b(n).$$

On dispose par ailleurs d'un signal de référence (sortie d'un capteur) $w(n)$, centré, corrélé à $b(n)$ et indépendant de $y(n)$. On peut donc interpréter $b(n)$ comme la sortie d'un filtre $h_2(n)$ d'entrée $w(n)$:

$$b(n) = (h_2 * w)(n).$$

- 4-a Donnez la relation qui relie l'intercorrélation $R_{BW}(k)$, l'autocorrélation $R_{WW}(k)$ et la réponse impulsionnelle $h_2(k)$ (*cours*).
- 4-b Calculez l'intercorrélation R_{ZW} , et montrez que si $w(n)$ est blanc centré de variance 1, on en déduit alors la réponse impulsionnelle $h_2(n)$.
- 4-c Expliquez alors à quoi sert le dispositif

et donnez l'expression de $r(n)$.

Question subsidiaire

- 4-d On a considéré ci-dessus que $w(n)$ était un bruit blanc. Si tel n'est pas le cas, et si sa densité spectrale de puissance $S_{WW}(f)$ est connue, montrez que le signal $w'(n)$ obtenu comme la sortie d'un filtre de fonction de transfert en fréquence $G(f) = 1/\sqrt{S_{WW}(f)}$ (on notera $g(n)$ sa réponse impulsionnelle) est un bruit blanc de variance unité. Comment faut-il alors modifier le dispositif précédent ?