Durée : 1h, sans document.
A rendre sur une copie séparée.
J.-F. BERCHER

Exercice I.

On considère le signal

$$x(t) = s(t) + b(t),$$
$$\text{avec } s(t) = A\sin(2\pi f_o t + \phi),$$

où b(t) est un bruit blanc, stationnaire, ergodique, centré, et de variance σ^2, ϕ une phase aléatoire, indépendante de b(t), suivant une loi uniforme sur $[0,2\pi]$.

a) Le signal x(t) est-il aléatoire ? pourquoi ?
b) Calculez la moyenne $m_x(t)$ de x(t). Le signal x(t) est il stationnaire ?
c) Calculez l'autocorrélation de x(t).
d) Donnez l'expression de la fonction d'autocorrélation pour un signal certain (déterministe) de puissance moyenne finie.
e) Donnez l'autocorrélation « déterministe » de x(t).
f) Montrez que *la moyenne* (statistique) de l'autocorrélation déterministe calculée en e) est identique à la fonction d'autocorrélation obtenue en c).

Exercice II.

On considère le signal $s(t)=A\sin(2\pi f_o t)$. On échantillonne s(t) à la fréquence $Fe=Lf_o$, où L est un entier positif.

a) Comment faut il choisir L pour que la condition de Shannon sur l'échantillonnage soit vérifiée ?
b) Combien obtient-on de points par période ?
c) Donnez l'expression du signal échantillonné s(n).
d) Donnez et représentez la transformée de Fourier en fréquence réduite $S(\lambda)$[1] de s(n). (On ne demande pas forcément de calculer $S(\lambda)$: vous pouvez utiliser le résultat à temps continu et vous servir des propriétés de l'échantillonnage).

On ne retient plus qu'une période de s(t) et on considère que le signal est nul ailleurs. On échantillonne toujours de la même manière, pour obtenir un signal $s_1(n)$.

e) Donnez l'expression de $s_1(n)$ en fonction de s(n) et d'une fenêtre de pondération f(n) que vous préciserez.
f) Calculez la transformée de Fourier en fréquence réduite $F(\lambda)$ de f(n), puis la transformée $S_1(\lambda)$ de $s_1(n)$.

[1] λ est la fréquence réduite, définie comme le rapport entre la fréquence naturelle et la fréquence d'échantillonnage, $\lambda=f/Fe$.