Partie de J.-F. BERCHER, à rendre sur une copie séparée
Sans document

La plupart des questions appellent des réponses concises, mais précises. Les justifications sont aussi importantes que le résultat brut. Le correcteur appréciera la clarté de la rédaction et de la présentation. L'exercice n'est pas *un exercice à tiroirs insurmontable : tous les résultats utiles sont donnés dans le texte (montrez que. . .) ; en cas de difficulté sur une question, vous povez admettre le résultat, le signaler, et poursuivre. Certaines questions sont pratiquement des questions de cours. Pensez à gérer votre temps.*

Exercice :

On considère le schèma de la figure 1, où $X(t,\omega)$ est un signal aléatoire stationnaire et ergodique, $f_T(t)$ une fonction déterministe (certaine), et $h(t)$ la réponse impulsionnelle du système. On notera $X_T(t,\omega)$ le produit $f_T(t)X(t,\omega)$.

Figure 1: Système considéré

Question 1 :

1-a Donnez l'autocorrélation de la sortie, $R_{YY}(\tau)$, et l'intercorrélation sortie-entrée $R_{YX}(\tau)$ en fonction de l'autocorrélation de l'entrée R_{XX} et de la réponse impulsionnelle h.

1-b Dans le cas où $h(t) = \exp(j2\pi f_0 t)$, donnez l'expression de la sortie $Y(t,\omega)$, et montrez que $Y(0,\omega) = X_T(f_0,\omega)$, la transformée de Fourier de $X_T(t,\omega)$ à la fréquence f_0.

1-c Toujours dans le cas où $h(t) = \exp(j2\pi f_0 t)$, donnez l'expression de l'autocorrélation de la sortie, $R_{YY}(\tau)$ et montrez que $R_{YY}(0) = \mathrm{E}\left\{|X_T(f_0)|^2\right\}$.

Question 2 :

En notant toujours $X_T(t,\omega) = f_T(t)X(t,\omega)$, et en définissant

$$\hat{R}_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t,\omega)X_T^*(t-\tau,\omega)\mathrm{d}t,$$

2-a montrez que

$$\mathrm{E}\left\{\hat{R}_{XX}(\tau)\right\} = g(\tau)R_{XX}(\tau),$$

où $g(\tau)$ est une fonction dont vous donnerez l'expression. Représentez $g(\tau)$ lorsque $f_T(t) = \mathrm{rect}_T(t/T)$.

2-b En utilisant l'égalité de Plancherel-Parseval, montrez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)e^{j2\pi f\tau}\mathrm{d}f,$$

et déduisez en que la transformée de Fourier de $R_{xy}(\tau)$ vaut $X(f)Y^*(f)$, où $X(f)$ et $Y(f)$, sont respectivement les transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$. [1]

2-c Déduisez en que

$$\hat{S}_{XX}(f) = \mathrm{TF}\left[\hat{R}_{XX}(\tau)\right] = |X_T(f)^2.$$

2-d Montrez que

$$\mathrm{E}\left\{\hat{S}_{XX}(f)\right\} = \mathrm{TF}\left[\mathrm{E}\left\{\hat{R}_{XX}(\tau)\right\}\right] = G(f) * S_{XX}(f),$$

où $G(f)$ est la transformée de Fourier de $g(\tau)$ et $S_{XX}(f)$ la densité spectrale de l'entrée $X(t,\omega)$.

[1] Les x et y donnés dans les deux dernières relations sont des signaux « généraux » : ce ne sont *pas nécessairement* $X(t,\omega)$ et $Y(t,\omega)$.

Question 3 :

Dans le cas où $f_T(t) = \mathrm{rect}_T(t/T)$, donnez $G(f)$, et représentez $S_XX(f)$, si

- $X(t,\omega)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $N_0/2$,
- $X(t,\omega)$ est une sinusoïde à phase aléatoire, uniforme sur $[0, 2\pi[$, de fréquence f_0.

Question 4 :

4-a Donnez la densité spectrale de la sortie, $S_{YY}(f)$, en fonction de la densité spectrale de l'entrée, $S_{XX}(f)$, de $G(f)$, et de la fonction de transfert $H(f)$.

4-b Considérons maintenant

$$f_T(t) = \mathrm{rect}_T(t/T)\exp\left(j2\pi f_1 t\right).$$

- Montrez que $S_{YY}(f) = S_{XX}(f_0 - f_1)$, (*cf* 1-b)
- donnez $Y(t,\omega)$ et $Y(0,\omega)$,
- montrez enfin que $\hat{S}_{YY}(f) = |X_T(f_0 - f_1,\omega)|^2 = |Y(t,\omega)|^2$, où $X_T(f,\omega)$ désigne ci-dessus la transformée de Fourier du produit $\mathrm{rect}_T(t/T)X(t,\omega)$. (*cf* 2-c)

Question subsidiaire

À quoi peut servir le dispositif

dans lequel on peut faire varier la fréquence f_1 ? Quel serait l'intérêt d'ajouter une intégration supplémentaire en sortie ?