EL301 - février 2004

Exercice 1 - la TF d'un signal aléatoire

$$X(f,\omega) = \lim_{T\to\infty} \int_{[T]} x(t,\omega) e^{-j2\pi f t} dt$$

1)

$$E[X(f,\omega)] = \lim_{T\to\infty} \int_{[T]} E[x(t,\omega)] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= m_x \lim_{T\to\infty} \int_{[T]} e^{-j2\pi f t} dt,$$

2pts avec $m_x = E[x(t,\omega)]$ et en supposant $\underline{x(t,\omega) \text{ stationnaire}}$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f)$ donc

$$E[X(f,\omega)] = m_x\, \delta(f)$$

2) $X(f,\omega)$ n'est pas stationnaire en fréquence, puisque

3pts son moment d'ordre 1 dépend de f.

3)

$$E[|X(f,\omega)|^2] = E[X(f,\omega) X^*(f,\omega)]$$

3pts

$$|X(f,\omega)|^2 = \int_{[T]} x(t,\omega) e^{-j2\pi f t} dt \int_{[T]} x^*(t',\omega) e^{+j2\pi f t'} dt'$$

$$= \lim_{T\to\infty} \iint_{[T]} x(t,\omega) x^*(t',\omega)\ e^{-j2\pi f(t-t')} dt\, dt'$$

4)

D'où

$$E[|X(f,\omega)|^2] = \lim \iint E[x(t,\omega) x^*(t',\omega)] e^{-j2\pi f(t-t')} dt\, dt'$$

4pts

$$= \iint_{[T]} R_{xx}(t-t') e^{-j2\pi f(t-t')} dt\, dt'$$

$$= \int_t \int_{\tau [T]} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} dt\, d\tau = \int_{[T]} TF\{R_{xx}\} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{[T]} S_{xx}(f)\, dt$$

et $E[|X(f,\omega)|^2] = \lim_{T\to\infty} T.\ S_{xx}(f)$ d'où la conclusion.

Exercice 2 (2

$$\dot{x}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x(t) - x(t-\epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t)$$

1/-

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_{x_\varepsilon x}(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} E\left[x_\varepsilon(t) x^*(t-\tau)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\frac{(x(t) - x(t-\varepsilon))}{\varepsilon} x^*(t-\tau)\right]$$

3 pts

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E\left[x(t) x^*(t-\tau)\right]}{\varepsilon} - \frac{E\left[x(t-\varepsilon) x^*(t-\tau)\right]}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(R_{xx}(\tau) - R_x(\tau-\varepsilon)\right)$$

$$= \dot{R}_{xx}(\tau)$$

2/-

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_{x_\varepsilon x_\varepsilon}(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} E\left[x_\varepsilon(t) \left(\frac{x(t-\tau) - x(t-\tau-\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^*\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(E\left[x_\varepsilon(t) x^*(t-\tau)\right] - E\left[x_\varepsilon(t) x^*(t-\tau-\varepsilon)\right]\right)$$

4 pts

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(R_{x_\varepsilon x}(\tau) - R_{x_\varepsilon x}(\tau+\varepsilon)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\dot{R}_{xx}(\tau) - \dot{R}_{xx}(\tau+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$= -\ddot{R}_{xx}(\tau)$$ et pas $+\ddot{R}_{xx}(\tau)$ comme le dit l'énoncé.

3/ la puissance de $\dot{x}(t,\omega)$ vaut

2 pts $$E\left[|\dot{x}(t,\omega)|^2\right] = R_{\dot{x}\dot{x}}(0) = -\ddot{R}_x(0)$$

Il faut donc que R_{xx} soit 2 fois dérivable en 0.

4°/

$$E\left[|\dot{x}(t) - x_\varepsilon(t)|^2\right] = E\left[|\dot{x}(t)|^2\right] + E|x_\varepsilon(t)|^2 - 2E\left[\dot{x} x_\varepsilon\right]$$

en supposant tout réel.

3 pts

$$= R_{\dot{x}}(0) + R_{\dot{x}}(0) - 2R_{\dot{x}x_\varepsilon}$$

$$= 2R_{\dot{x}}(0) - \frac{2}{\varepsilon}\left[R_{\dot{x}x}(0) - R_{\dot{x}x}(+\varepsilon)\right] = +2R_{\dot{x}}(0) + 2\dot{R}_{\dot{x}x}(0)$$

or $R_{\dot{x}x} = \dot{R}_x$ et $R_{\dot{x}} = -\ddot{R}_x$ $= -2\ddot{R}_x(0) + 2\ddot{R}_x(0) = \emptyset$.