Sans documents,
sauf dictionnaires de langues.
***Durée**: une heure.*
Partie de J.-F. Bercher, à rendre sur une copie séparée.

Toute affirmation, pour être prise en compte, devra être justifiée. La qualité de l'expression écrite et celle de la présentation interviendront dans l'appréciation de la copie.
Pensez à gérer votre temps. Comme toujours, il est conseillé de prendre quelques minutes pour lire attentivement l'énoncé.

Exercice 1 : Sinus cardinaux à temps continu et à temps discret

Soit le signal $z(t) = \text{rect}_T(t)$ défini par $z(t) = 1$ pour $t \in [-T/2, T/2]$ et 0 ailleurs.

1. Calculer la TF $Z(f)$ de $z(t)$.

2. Représenter le module de cette TF, $|Z(f)|$, en précisant les points où celle-ci s'annule, et calculez la valeur du module pour $f = 3/2T$ et $f = 5/2T$.

3. Montrez que la TF du signal retardé $x(t - t_0)$ vaut
$$TF\{x(t-t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} TF\{x(t)\}.$$

4. Déduisez en quelle est la TF de $z(t - T/2)$. Représentez le signal $z(t - T/2)$.

On échantillonne maintenant le signal $z(t) = \text{rect}_T(t)$ avec la fréquence d'échantillonnage $F_E = 5/T$.

5. Cette fréquence d'échantillonnage vérifie t'elle les conditions du théorème de Shannon ?

6. Quelle est la période d'échantillonnage T_E ? Combien obtient on d'échantillons de valeur non nulle ? Représentez le signal échantillonné $z_E(t)$ obtenu.

7. *Cours* Dans le cas génnéral, si $x(t)$ est le signal analogique considéré et $x_E(t)$ sa version échantillonnée à une fréquence f_E, rappelez
   - quelle est l'expression de $x_E(t)$,
   - quelle est l'expression de $X_E(f)$, et quelle est sa caractéristique essentielle par rapport à $X(f)$.

8. Calculez la TF $Z_E(f)$ du signal échantillonné $z_E(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(nT_E)\delta(t - nT_E)$. Vous chercherez à mettre le résultat sous la forme du rapport de deux sinus, $\sin(5\pi f T_E)/\sin(\pi f T_E)$, en vous souvenant que
   - $\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$,
   - $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$.

9. Tracez le module du résultat entre $-F_E/2$ et $F_E/2$, en précisant les points où celui-ci s'annule, et calculez la valeur du module pour $f = 3/2T$ et $f = 5/2T$. Comparez ce résultat à celui obtenu en 2.

10. A l'aide des questions 5. et 7., expliquez pourquoi la TF du rectangle échantillonné n'est pas exactement un sinus cardinal, pourquoi il manque un facteur T_E pour que les deux TF $Z(f)$ et $Z_E(f)$ aient même amplitude en $f = 0$, et pourquoi l'amplitude des lobes secondaires de $T_E Z_E(f)$ est plus élevée.

Exercice 2 : Bloqueurs

Remarque : Cet exercice ne requiert aucun calcul, autre que celui effectué aux 1 et 4 de l'exercice 1.

On considère le signal échantillonné $x_E(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(t - nT_E)$, avec

$$\{x(0)\ x(1)\ x(2)\ x(3)\ x(4)\ x(5)\} = \{\ 1\ 2\ 1\ 0\ \ -2\ \ -1\},$$

et 0 ailleurs.

Ce signal est passé dans un filtre (bloqueur d'ordre 0) de réponse impulsionnelle $h(t) = \mathrm{rect}_{T_E}(t - T_E/2)$.

1. Représentez la sortie $y(t)$ du filtre.

2. On suppose que la condition de Shannon est (même approximativement) vérifiée.
   - Représentez un exemple de TF $|X_E(f)|$,
   - Donnez l'expression de $Y(f)$ (cf. 1-4) et représentez son module, que vous comparerez à $|X_E(f)|$.

3. Rappelez comment se transforme le produit de convolution par TF.

4. Évaluez graphiquement le produit de convolution $\mathrm{rect}_T(t) * \mathrm{rect}_T(t)$.

5. On montre que la fonction triangle $tri_{2T}(t) = 1 - \frac{|t|}{T}$, pour $t \in [-T, T]$ et 0 ailleurs, s'écrit $tri_{2T}(t) = \frac{1}{T}\ \mathrm{rect}_T(t) * \mathrm{rect}_T(t)$. Que vaut sa TF $Tri_{2T}(f)$?

6. Le signal $x_E(t)$ est maintenant passé dans un filtre de réponse impulsionnnelle $tri_{2T_E}(t)$. Représentez le signal de sortie $z(t)$.

7. Représentez $|Z(f)|$, que vous comparerez à $|Y(f)|$ et à $|X_E(f)|$.

8. La réponse impulsionnnelle $tri_{2T_E}(t)$ correspond-elle à un filtre causal ?