__Sans documents__,
sauf dictionnaires de langues.
***Durée :** une heure.*

Toute affirmation, pour être prise en compte, devra être justifiée. La qualité de l'expression écrite et celle de la présentation interviendront dans l'appréciation de la copie.
Concours externe de recrutement des Professeurs des Écoles — Académie de Dijon, 1997.

Exercice 1 : Transformée de Hilbert

On rappelle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{Echelon}(t) & \rightleftharpoons & \frac{1}{2}\left[\delta(f) - \frac{j}{\pi f}\right] \\ \mathrm{Signe}(t) & \rightleftharpoons & \frac{-j}{\pi f} \\ \frac{1}{2}\left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right] & \rightleftharpoons & \mathrm{Echelon}(f) \\ \frac{j}{\pi t} & \rightleftharpoons & \mathrm{Signe}(f) \end{array}\right. ,$$

où $\rightleftharpoons$ désigne le fait que les deux fonctions mises en relation forment une paire de transformées de Fourier.

On note

$$X_H(f) = -j\mathrm{Signe(f)}X(f).$$

1 – Montrez graphiquement que

$$Z(f) = \frac{1}{2}\left[X(f) + jX_H(f)\right]$$

est un signal qui ne possède pas de fréquences négatives.

2 – Montrez que

$$x_H(t) = \mathrm{TF}^{-1}\{X_H(f)\},$$

peut être vu comme la sortie d'un filtre, dont vous donnerez la réponse impulsionnelle $h(t)$.

On appelle *transformée de Hilbert* la transformation reliant $x_H(t)$ et $x(t)$:

$$x_H(t) = \mathrm{TH}\{x(t)\}.$$

3 – Donnez l'expression de $z(t)$ en fonction de $x(t)$ et de $\mathrm{TH}\{x(t)\}$. En raisonnant à partir des transformées de Fourier, montrer que

$$\mathrm{TH}\{\mathrm{TH}\{x(t)\}\} = -x(t).$$

Donnez alors l'expression de la transformée de Hilbert de $z(t)$. Déduisez en l'expression de $x(t)$ en fonction de $z(t)$ et de $\mathrm{TH}\{z(t)\}$.

On considère maintenant un système de réponse impulsionnelle $g(t)$. Si ce système est causal, alors

$$g(t) = g(t)\mathrm{Echelon}(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{Signe}(t)\right]g(t).$$

4 – Montrez que dans ces conditions,

$$G(f) = -j\mathrm{TH}\{G(f)\}.$$

En décomposant $G(f)$ en ses parties réelle et imaginaire, notées respectivement $G_R(f)$ et $G_I(f)$, montrez que

$$\left\{\begin{array}{l} G_R(f) = \mathrm{TH}\{G_I(f)\}, \\ G_I(f) = -\mathrm{TH}\{G_R(f)\}. \end{array}\right.$$

Ces relations sont les relations de Bayard et Bode. Elles indiquent que la TF d'un système causal n'est pas quelconque, et qu'il suffit de connaître la partie réelle ou la partie imaginaire pour caractériser complètement le système.

Exercice 2 : Séquence aléatoire binaire

Soit une série de variables aléatoires binaires indépendantes $\{a_k\}$, pour $k = -\infty..\infty$. On a

$$\begin{cases} \Pr(a_k = 0) = 1/2, \\ \Pr(a_k = 1) = 1/2, \end{cases}$$

c'est-à-dire une densité de probabilité

$$p(a_k) = \frac{1}{2}\left[\delta(a_k) + \delta(a_k - 1)\right],$$

où $\delta(\bullet)$ est l'impulsion de Dirac.

1 – Calculez

$$\begin{array}{l} \mathrm{E}\{a_k\}, \\ \mathrm{Var}\{a_k\} \end{array}$$

où $\mathrm{E}\{\bullet\}$ désigne l'espérance mathématique, et $\mathrm{Var}\{\bullet\}$ la variance.

2 – On définit un signal aléatoire $x(t)$ selon

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_b),$$

où T_b est la « période bit ». On supposera que les a_k sont indépendants entre eux.

Représentez une réalisation (quelconque) de ce signal aléatoire.

3 – On considère un filtre de réponse impulsionnelle $s(t)$, où $s(t)$ est une fonction déterministe définie sur $[0, T_b]$. On note $y(t)$ la sortie de ce filtre soumis à l'entrée $x(t)$.

Donnez l'expression générale de $y(t)$.

À titre d'illustration, on considèrera $s(t) = \mathrm{rect}_{T_b/2}(t - T_b/4) - \mathrm{rect}_{T_b/2}(t - 3T_b/4)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} s(t) = 1 \quad \text{pour} \quad t \in [0, T_b/2] \\ s(t) = -1 \quad \text{pour} \quad t \in [T_b/2, T] \end{cases} \tag{1}$$

Représentez graphiquement la sortie du filtre pour la réalisation

$$\{\ldots\ a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ \ldots\}.$$

4 – Calculez la moyenne statistique de $y(t)$, $\mathrm{E}\{y(t)\}$ (on demande ici l'expression générale en fonction de $s(t)$). Représentez $\mathrm{E}\{y(t)\}$ dans le cas particulier (1). Ce signal est-il stationnaire ? Dans le cas particulier, donnez également la moyenne temporelle de $y(t)$.

5 – Lorsqu'on le système n'est pas synchrone, on ne connaît pas les instants d'apparition du signal, et on modélise le signal comme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k s(t - kT_b + \theta),$$

où θ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, T_b]$. On considèrera que les $\{a_k\}$ et θ sont indépendants. On notera qu'une somme infinie d'intégrales définies sur des intervalles consécutifs est une intégrale définie sur $[-\infty, \infty]$, et on notera $m_a = \mathrm{E}\{a_k\}$, et $m_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\mathrm{d}u$. Calculez la moyenne statistique de $x(t)$. Ce signal est-il stationnaire ?