Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris ————— E.S.I.E.E.	Unité : GSIGNAL Examen Date : mars 2001	Classe I3

SUJET À TRAITER – SANS DOCUMENTS.

Partie de J.-F. BERCHER

À remettre sur une copie séparée.

ÉNONCÉ

Questions de cours

Les réponses aux questions de cours ne devraient pas dépasser trois lignes par question. Elles seront donc concises, mais précises.

1) Quelle est la densité spectrale de puissance d'un bruit blanc de variance σ^2 ?
2) Quelle est la relation entre la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance (pour des signaux à puissance moyenne finie) ?
3) Un signal ergodique est-il stationnaire ?
4) Quelle est la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac ?
5) Donnez l'expression du produit de convolution à temps discret, par exemple entre 2 séquences $x(n)$ et $y(n)$.
6) Quelle est la signification physique de l'autocorrélation pour un retard nul ?
7) Quel est l'effet de l'échantillonnage d'un signal temporel sur sa transformée de Fourier ?
8) Énoncez la condition de Shannon sur l'échantillonnage d'un signal à bande limitée.
9) Donnez l'expression de la densité spectrale de puissance $S_{yy}(f)$ d'un signal $y(t)$, sortie d'un filtre de réponse en fréquence $H(f)$ et d'entrée $x(t)$, de densité spectrale $S_{xx}(f)$.

1 Exercice

Remarque : la question 3 est indépendante des questions 1 et 2, la question 4 est indépendante des questions 1,2,3.

<u>Question 1</u> : On considère l'équation aux différences

$$y(n) = x(n-1) + x(n) + x(n+1).$$

1-a Mettre cette équation aux différences sous la forme d'une convolution discrète, donnez la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$.
1-b Donnez la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre.
1-c Donnez la réponse en fréquence $H(f)$. Vous pourrez chercher à faire apparaître un cosinus.

<u>Question 2</u> : Si l'entrée est

$$x(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \phi), \quad \text{avec } f_0 = 1/3,$$

quelle est la sortie du filtre : donnez son expression et la valeur de son amplitude si $A = 1$?

<u>Question 3</u> : L'entrée est maintenant un bruit blanc à temps discret, centré, d'autocorrélation

$$\begin{cases} R_{XX}(k) = P_B \text{ si } k = 0, \\ R_{XX}(k) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3-a Quelle est la moyenne statistique m_Y de la sortie $y(n)$ du filtre ?

3-b Calculez l'autocorrélation de la sortie $R_{YY}(k)$.

Question 4 : La sortie du filtre $y(n)$ est maintenant bruitée par un bruit additif $b(n)$, centré et d'autocorrélation $R_{BB}(k)$, indépendant de $x(n)$, et par conséquent de $y(n)$

$$z(n) = y(n) + b(n).$$

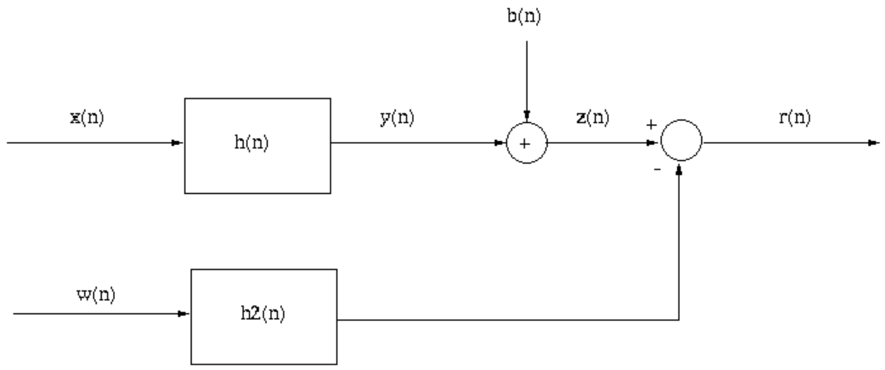
On dispose par ailleurs d'un autre signal, dit signal de référence (sortie d'un capteur) $w(n)$, centré, corrélé à $b(n)$ et indépendant de $y(n)$. On peut donc interpréter $b(n)$ comme la sortie d'un filtre $h_2(n)$ d'entrée $w(n)$:

$$b(n) = (h_2 * w)(n).$$

4-a Donnez la relation qui relie l'intercorrélation $R_{BW}(k)$, l'autocorrélation $R_{WW}(k)$ et la réponse impulsionnelle $h_2(k)$ (*cours*).

4-b Calculez l'intercorrélation R_{ZW}, et montrez que si $w(n)$ est blanc centré de variance 1, on en déduit alors la réponse impulsionnelle $h_2(n)$.

4-c Expliquez alors à quoi sert le dispositif



et donnez l'expression de $r(n)$.

4-d On a considéré ci-dessus que $w(n)$ était un bruit blanc. Si tel n'est pas le cas, et si sa densité spectrale de puissance $S_{WW}(f)$ est connue, montrez que le signal $w'(n)$ obtenu comme la sortie d'un filtre de fonction de transfert en fréquence $G(f) = 1/\sqrt{S_{WW}(f)}$ (on notera $g(n)$ sa réponse impulsionnelle) est un bruit blanc de variance unité. Comment faut-il alors modifier le dispositif précédent ?