Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris —————— E.S.I.E.E.	Unité : EL301 Examen Date : février 2004 Durée : 45 minutes	Classe I3

SUJET À TRAITER – ***Tous documents autorisés***

Partie de J.-F. BERCHER

À remettre sur une copie séparée. *Ne partez pas battu d'avance. L'énoncé peut paraître long et compliqué, mais les réponses sont (assez) simples.*

ÉNONCÉ

EXERCICE 1 — LA TF D'UN SIGNAL ALÉATOIRE

Soit $X(f,\omega)$

$$X(f,\omega) = \mathrm{TF}\left[X(t,\omega)\right] = \lim_{T\to+\infty} \int_{[T]} X(t,\omega) e^{j2\pi ft} \mathrm{d}t,$$

si vous avez envie de travailler à temps continu, ou par

$$X(f,\omega) = \mathrm{TF}\left[X(t,\omega)\right] = \lim_{N\to+\infty} \sum_{[N]} X(n,\omega) e^{j2\pi fn},$$

si vous préférez les signaux à temps discret. $[T]$ et $[N]$ désignent respectivement des intégrations ou sommation sur une durée T ou N.
$X(f,\omega)$ est la transformée de Fourier d'une réalisation d'un signal aléatoire, pour laquelle on introduit un passage à la limite, car le signal n'est pas nécessairement sommable.

1. Montrez que $E[X(f,\omega)] = m_X \delta(f)$, où m_X est la moyenne statistique, et $\delta()$ désigne l'impulsion de Dirac.
2. Compte tenu de la réponse précédente, peut-on considérer $X(f,\omega)$ comme stationnaire « en fréquence » (c'est-à-dire en fonction de f) ?
3. Exprimez $|X(f,\omega)|^2$
4. Et montrez, en travaillant un peu $E[|X(f,\omega)|^2]$ (une espérance, l'utilisation d'une définition, un changement de variable et l'intégration d'une constante), que

$$S_{XX}(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E\left[|X(f,\omega)|^2\right]$$

ou la même expression avec des N pour ceux qui auront travaillé en discret.

EXERCICE 2 — LA DÉRIVÉE D'UN SIGNAL ALÉATOIRE

La dérivée d'un signal aléatoire (supposons le stationnaire pour la suite), est le signal aléatoire $\dot{X}(t,\omega)$, s'il existe, tel que

$$\dot{X}(t,\omega) = \lim_{\epsilon\to0} X_\epsilon(t,\omega) = \lim_{\epsilon\to0} \frac{X(t,\omega) - X(t-\epsilon,\omega)}{\epsilon},$$

où l'on en a profité pour définir un signal $X_\epsilon(t,\omega)$. Pour donner un sens à l'égalité précédente, il faudrait définir l'égalité pour des signaux aléatoires, et on pourra par exemple utiliser une égalité en moyenne quadratique, qui s'écrit

$$\lim_{\epsilon\to0} E\left[|\dot{X}(t,\omega) - X_\epsilon(t,\omega)|^2\right] = 0.$$

1. Montrez que

$$\lim_{\epsilon\to0} R_{X_\epsilon X}(\tau) = \dot{R}_{XX}(\tau).$$

On en déduit que si $\dot{X}(t,\omega)$ existe, alors $R_{\dot{X}X}(\tau) = \dot{R}_{XX}(\tau)$ (NB - ce n'est pas une question).

2. Montrez que

$$\lim_{\epsilon\to0} R_{X_\epsilon X_\epsilon}(\tau) = \ddot{R}_{XX}(\tau),$$

et donc, si $\dot{X}(t,\omega)$ existe, alors $R_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) = \ddot{R}_{XX}(\tau)$.

3. Compte tenu du résultat précédent, sous quelle condition sur la fonction d'autocorrélation la puissance de $\dot{X}(t,\omega)$ est elle finie ?
4. À partir des deux premiers résultats, et en supposant que la dérivée de la fonction d'autocorrélation existe est nulle en zéro, vous devriez pouvoir montrer en à peu près trois lignes, que

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} E\left[|\dot{X}(t,\omega) - X_\epsilon(t,\omega)|^2\right] = 0.$$

   Mais comme je doute qu'il ne vous reste assez de temps ou simplement assez de force, cette question servira de bonus.