Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris ——— E.S.I.E.E.	Unité : EL301 Examen Date : janvier 2002	Classe I3

SUJET À TRAITER – SANS DOCUMENTS.

Partie de J.-F. BERCHER

À remettre sur une copie séparée.

ÉNONCÉ

RAPPELS

On rappelle que (TFD) est la transformée de Fourier discrète définie par

$$\begin{cases} X(m) = \theta \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi mn}{N}}, \\ x(n) \quad = \beta \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{\frac{j2\pi mn}{N}}, \end{cases}$$

avec $\beta\theta = 1/N$. On utilisera ici $\theta = 1/N$, $\beta = 1$
Par ailleurs, $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos a + b + \cos a - b]$
$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$
$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$

EXERCICE 1

Soit le signal, défini pour $n \in [0, N-1]$

$$x(n) = A\cos(2\pi m_o n/N + \phi),$$

où
– A est une variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance σ^2,
– ϕ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$
– A et ϕ sont indépendantes.

1) Montrez que

$$\text{TFD}\left\{e^{j2\pi m_o n/N}\right\} = \delta(m - m_o),$$

où $\delta(u) = 1$ si $u = 0$, et 0 sinon.
2) Calculez la moyenne de $x(n)$.
3) Calculez la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(k)$ de $x(n)$.
4) Si on prend

$$\tilde{R}_{XX}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x(i)x^*(i-k),$$

montrez que $E[\tilde{R}_{XX}(k)] = R_{XX}(k)$.
5) Calculez la transformée de Fourier discrète $X(m)$ de $x(n)$.
6) Le signal $X(m)$ est-il certain ou aléatoire ? Calculez la moyenne de $X(m)$.
7) Donnez $|X(m)|^2$.
8) Calculez la moyenne de $|X(m)|^2$.
9) Calculez la TFD de $R_{XX}(k)$, et comparez la au résultat précédent.
10) On considère maintenant le signal modulé en amplitude,

$$x(n) = g(n)\cos(2\pi m_o n/N + \phi),$$

avec $n \in [0, N-1]$, et où $g(n)$ est une fonction aléatoire, indépendante de ϕ.
a) Calculez l'autocorrélation de $x(n)$,
b) déduisez en sa densité spectrale de puissance, en fonction de la densité spectrale de puissance de g, $S_{gg}(f)$.

EXERCICE 2

Une image est un signal à deux dimensions (2D). Considérons une image $i(x, y)$ où x et y sont deux variables spatiales continues. Cette image est de dimensions finies, par exemple $L_x \times L_y$. On définit par

$$I(f_x, f_y) = \int i(x, y)e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)}dxdy$$

la transformée de Fourier 2D de cette image.

1. On souhaite échantillonner cette image. Quelle condition(s) devrait on vérifier pour choisir la (les) fréquence(s) d'échantillonnage ? Dans la mesure ou l'image est de dimensions limitées, est il possible de l'échantillonner sans perte d'information (réponse qualitative svp).
2. On choisit des fréquences d'échantillonnage Fe_x et Fe_y de sorte à obtenir une image discrète $i(m, n)$ de taille $M \times N$. Comment s'exprimera alors la transformée de Fourier en fréquences réduites correspondante ?
3. Donnez l'expression d'une transformée de Fourier discrète $I(k, l)$ à deux dimensions, en notant k et l les indices discrets des fréquences. Quelle est l'opération qui est alors réalisée dans le plan fréquentiel ?
4. Considérons un signal $s(n)$, sur N points, de TFD $S(m)$. On construit un signal $S_2(m)$ de longueur double en insérant un zéro entre les échantillons consécutifs de $S(m)$: $S_2(2m) = S(m)$ et 0 sinon. Que devient sa TFD inverse $s_2(n)$.
5. On « double » la longueur de l'image en insérant des zéros sur les lignes et les colonnes de sa TFD. Que devient l'image initiale ?
6. Montrez que la TFD 2D $I(k, l)$ peut être calculée comme la succession de deux TFD 1D, appliquées sur les lignes puis sur les colonnes de l'image.
7. L'image peut être perturbée par un bruit d'observation. Supposons que ce bruit soit essentiellement haute fréquence. Afin de minimiser ce bruit, on se propose de filtrer l'image : pour cela, on considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(m, n) = 1$ pour $m = 0 : 2$ et $n = 0 : 2$ et 0 sinon. Donnez l'équation aux différences correspondant à cette opération de filtrage.
8. En remarquant (éventuellement) que $h(m, n)$ peut se mettre sous la forme $h_1(m)h_2(n)$ donnez l'expression de la fonction de transfert $H(k, l)$, et expliquez pourquoi ce filtrage correspond bien à un filtrage passe-bas. Quel peut enfin être l'avantage de prendre un filtre séparable $h(m, n) = h_1(m)h_2(n)$?