Examen de filtrage numérique

Partie de J.-F. Bercher, Durée : 1h
ELME – 26 novembre 1999,
Sans documents, sauf dictionnaires de langues,
On fournit un barême indicatif.

Questions de cours [6 points]

1) [1 point] Que veut dire « phase linéaire » ? Quel est l'intérêt d'avoir un filtre à phase linéaire ? Peut on synthétiser un filtre numérique à phase linéaire ? Si oui, par quelle(s) méthode(s) ?

2) [1 point] Qu'est ce qu'une réponse impulsionnelle causale ? Un filtre causal est-il stable ?

3) [1 point] Soit un filtre numérique de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

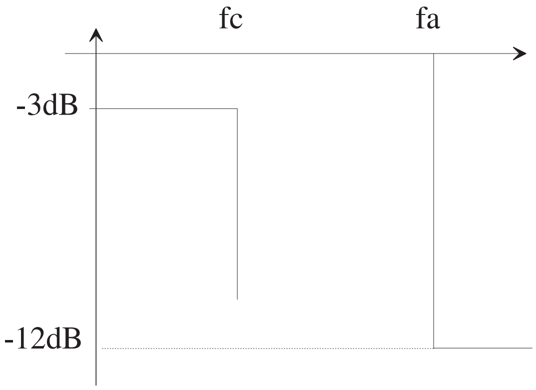
Écrire l'équation aux différences entrée-sortie de ce filtre, en notant $x(n)$ l'entrée et $y(n)$ la sortie.

4) [2 points] Décrivez en quelques phrases la méthode de synthèse appelée « méthode des fenêtres ».

5) [1 point] Quels sont les critères de choix d'une fenêtre de pondération (forme) et de sa largeur (nombre de points) ?

Exercice 1 : transformée bilinéaire [7 points]

On cherche à synthétiser un filtre passe-bas numérique, selon le gabarit ci-dessous, en utilisant la transformation bilinéaire, à partir d'un prototype de Butterworth.



Gabarit du filtre passe bas, avec fc=10.24 kHz, f_a=29.52 kHz, et F_e=100 kHz.

Vous effectuerez la synthèse à partir d'une approximation de Butterworth dans le domaine analogique. Les fonctions d'approximation sont de la forme $1/D(p)$, avec

$$\begin{array}{ll} D(p) = p + 1 & \text{pour un ordre 1,} \\ D(p) = p^2 + \sqrt{2}p + 1 & \text{pour un ordre 2,} \\ D(p) = (p+1)(p^2+p+1) & \text{pour un ordre 3.} \end{array}$$

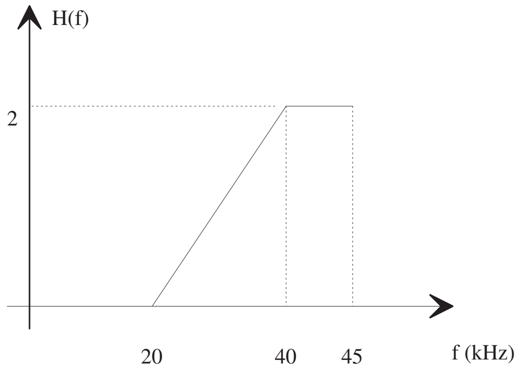
a) [2 points] Transposez le gabarit en un gabarit analogique et calculez l'ordre du filtre de Butterworth à utiliser.

b) [3 points] Calculez les coefficients du filtre numérique.

c) [2 points] Donnez l'équation aux différences du filtre synthétisé. S'agit-t'il d'un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?

Exercice 2 : Échantillonnage en fréquence [7 points]

On cherche à synthétiser un filtre numérique approchant la fonction de transfert représentée ci-après



Filtre idéal.

On utilisera une fréquence d'échantillonnage $F_e = 90$ kHz.

a) [2 points] Sachant que l'on cherche une réponse impulsionnelle réelle et discrète (échantillonnée), utilisez les symétries disponibles pour tracer $H(f)$ entre $-F_e$ et $+F_e$.

b) [2 points] Sur la représentation précédente, le filtre a l'allure d'un passe-bande. Pourquoi, en pratique, se comporte t'il comme un passe-haut ?

c) [3 points] Calculez une réponse impulsionnelle, de longueur $N = 9$, *causale*, correspondant à $H(f)$, par la méthode de l'échantillonnage en fréquence (c'est-à-dire : calculez les valeurs des échantillons de la réponse impulsionnelle causale). On rappelle que la TFD inverse d'une suite $X(k)$ de longueur N s'écrit

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}}.$$