Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris ——— E.S.I.E.E.	Unité : EL01 Examen partiel Date : décembre 2002 Durée indicative : 1 heure	Classe N+I

SUJET À TRAITER – SANS DOCUMENTS, sauf dictionnaires de langue

Remis par M. J.-F. BERCHER
À rédiger sur une copie séparée

ÉNONCÉ

QUESTIONS DE COURS

1. Quelle est la densité spectrale de puissance d'un bruit blanc de variance σ^2 ?
2. Quelle est la relation entre la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance (pour des signaux à puissance moyenne finie) ?
3. Un signal ergodique est-il stationnaire ?
4. Quelle est la signification physique de l'autocorrélation pour un retard nul ?
5. Donnez l'expression de la densité spectrale de puissance $S_{yy}(f)$ d'un signal $y(t)$, sortie d'un filtre de réponse en fréquence $H(f)$ et d'entrée $x(t)$, de densité spectrale $S_{xx}(f)$.

RAPPELS

On rappelle que (TFD) est la transformée de Fourier discrète définie par

$$\begin{cases} X(m) = \theta \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi mn}{N}}, \\ x(n) \;\; = \beta \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{\frac{j2\pi mn}{N}}, \end{cases}$$

avec $\beta\theta = 1/N$. On utilisera ici $\theta = 1/N$, $\beta = 1$

EXERCICE 1

Soit le signal, défini pour $n \in [0, N-1]$

$$x(n) = A\cos(2\pi m_o n/N + \phi),$$

où
- A est une variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance σ^2,
- ϕ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$
- A et ϕ sont indépendantes.

1) Montrez que

$$\text{TFD}\left\{e^{j2\pi m_o n/N}\right\} = \delta(m - m_o),$$

où $\delta(u) = 1$ si $u = 0$, et 0 sinon.
2) Calculez la moyenne $E[x(n)]$ de $x(n)$.
3) Calculez la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(k)$ de $x(n)$.
4) Si on prend, pour $k \geq 0$,

$$\tilde{R}_{XX}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^{N} x(i) x^*(i-k),$$

montrez que $E[\tilde{R}_{XX}(k)] = R_{XX}(k)$, pour $k < N$
5) [**utilise le résultat de la question 1**] Calculez la transformée de Fourier discrète $X(m)$ de $x(n)$, et montrez qu'elle vaut

$$X(m) = A/2e^{j\phi}\delta(m - m_o) + A/2e^{-j\phi}\delta(m + m_o).$$

6) Le signal $X(m)$ est-il certain ou aléatoire ? Calculez la moyenne $E[X(m)]$.
7) [**utilise le résultat de la question 5**] Donnez $|X(m)|^2$.
8) Calculez la moyenne statistique de $|X(m)|^2$, c'est-à-dire $E[|X(m)|]^2$.
9) [**utilise le résultat de la question 3**] Calculez la TFD de $R_{XX}(k)$, et comparez la au résultat précédent.

EXERCICE – FILTRAGE

On considère un filtre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ décrit par l'équation aux différences

$$y(n) = x(n) - x(n-1).$$

1. Ce filtre est-il stable ?
2. Donnez la fonction de transfert $H(z) = Y(z)/X(z)$ de ce filtre.
3. Donner la réponse impulsionnelle du système
4. Donnez la réponse en fréquence $H(f)$. Vous pourrez chercher à faire apparaître un cosinus ou un sinus.
5. Représentez |H(f)|.
6. Pourquoi la réponse en fréquence obtenue est elle périodique ?
7. Le filtre est-il de type passe-bas, passe-bande, ou passe-haut ?

<u>Questions supplémentaires : points de bonification : à traiter s'il vous reste du temps)</u>

8. Calculez la sortie du filtre pour un échelon $x(n) = u(n)$.
9. En remarquant que l'équation aux différences est une approximation de

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},$$

(en quel sens ?), peut-on interpréter la sortie précédente ?

10. Quelle serait la fontion de transfert en fréquence $H(f)$ du filtre défini par $y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$. Comparez cette réponse à celle du filtre à temps discret.