

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris E.S.I.E.E.	Unité : EL201 Examen Date : décembre 2004 Durée : 1 heure 30 minutes	Classe I2
--	---	------------------

SUJET À TRAITER – SANS DOCUMENTS, sauf dictionnaires de langue

À rédiger sur une copie séparée

Remis par M. J.-F. BERCHER

QUESTIONS DE COURS [10 POINTS]

1. Donnez l'expression d'un produit de convolution à temps continu puis à temps discret.
2. Quel est l'effet de l'échantillonnage d'un signal temporel sur sa transformée de Fourier ?
3. Énoncez la condition de Shannon sur l'échantillonnage, sans perte d'information, d'un signal à bande limitée.
4. Calculez la transformée de Fourier de $x(t) = m(t)(1 + \alpha \cos(2\pi f_0 t))$, en notant $M(f)$ la TF de $m(t)$.
5. Comment peut-on obtenir les coefficients de la série de Fourier d'un signal périodique, à partir de la transformée de Fourier du motif élémentaire ?
6. Quelle est la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac ?
7. Énoncez la formule du retard pour la transformée de Fourier, la transformée en z et la transformée de Fourier réduite.
8. Sous quelle(s) condition(s) sur la fonction de transfert en z $H(z)$ un système discret causal est-il stable ?
9. Démontrez que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier.
10. Montrez que $\text{TF}[\text{TF}[x(n)]] = x(-n)$ si $x(n)$ est réel.

EXERCICE – 'OSCILLATEUR' NUMÉRIQUE [6 POINTS]

On note $s_N(n)$ un signal à temps discret périodique de période N . $s_N(n)$ s'exprime comme la répétition d'un signal élémentaire de durée N , selon

$$s_N(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(n - kN)$$

1. Montrez que

$$S_N(z) = \text{TZ}[s_N(n)] = \frac{S(z)}{1 - z^{-N}}$$

2. Calculez la TZ d'une porte décalée de longueur L : $\prod_L(n - L/2) = 1$ pour $n \in [0, L - 1]$ et 0 ailleurs.
3. Soit le filtre de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-N}} \frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}}$$

Donnez et représentez sa réponse impulsionnelle.

4. Écrire l'équation aux différences correspondante.

EXERCICE – INTERPOLATION DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL [6 POINTS]

Soit $X(f)$ la transformée de Fourier réduite d'une séquence discrète $x(n)$. Afin de stocker cette TF sous forme d'un fichier de données, on échantillonne $X(f)$ en prélevant N échantillons sur l'intervalle $f \in [0, 1]$ (c'est à dire un échantillon tous les $1/N$). On note $X(k)$ le k^{e} échantillon.

1. Expliquez pourquoi il est suffisant d'échantillonner $X(f)$ sur $f \in [0, 1]$
2. On note $\tilde{X}(f)$ la TF $X(f)$ échantillonnée. Donnez son expression en fonction des $X(k)$.
3. Quelle est la conséquence de cet échantillonnage fréquentiel sur le signal temporel ? On notera $\tilde{x}(n)$ la séquence obtenue.
4. Sous quelles conditions sera-il possible de retrouver la séquence temporelle de départ ?
5. Si les conditions précédentes sont remplies, on applique une porte de longueur N sur la séquence temporelle sur $\tilde{x}(n)$ et l'on retrouve $x(n)$. Déduisez-en l'expression de $X(f)$ en fonction de ses échantillons $X(k)$. [NB – Vous avez normalement calculé la TF d'une porte de longueur L dans l'exercice précédent].