Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris —————— E.S.I.E.E.	Unité : TdSI Estimation et modélisation spectrale Date : mars 2004 Durée : 2 heures	Classe I4-SE

SUJET À TRAITER – AVEC DOCUMENTS. ***Tous documents autorisés***

Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Questions (relativement nouvelles) de cours et compréhension

1. Montrez que $\widehat{\mu} = \frac{1}{2(N+2)} \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p) + \frac{1}{2(N-2)} \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p+1) + \frac{N}{N^2-1/2}$ est un estimateur non biaisé de la moyenne statistique.
2. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne statistique, à partir d'un jeu de N données ?
3. Quel est le lien entre théorème de Wiener-Kinchine et théorème de Van Cittert-Zernicke (à part que ce sont de jolis noms) ?
4. Le périodogramme est un corrélogramme particuler : lequel ?
5. Dans la méthode du périodogramme lissé, comment évoluent la variance et la capacité de résolution lorsque l'on augmente la largeur de la fenêtre de lissage ?
6. Soient deux sinusoïdes de fréquences respectives 100 kHz et 110 kHz échantillonnées à 500 kHz. Quelle est la durée minimale d'analyse (et le nombre de points à acquérir) pour séparer ces deux raies ?
7. Quel argument permet de remplacer un modèle ARMA par un AR ?
8. On souhaite lisser un périodogramme par une fenêtre rectangulaire. Peut-on réaliser cette opération via un corrélogramme, en choisissant une fenêtre de pondération appropriée (laquelle) sur la corrélation ?

Petit exercice 1 -

On considère un signal $x(n)$ dont on a estimé les trois premiers coefficients d'autocorrélation : $R_{XX}(0) = 1$, $R_{XX}(1) = -1/2$ et $R_{XX}(2) = 1/4$.

1. Calculez les estimées de la DSP de $x(n)$ par un AR(1), puis par un AR(2). Quelle supposition implicite est faite sur les coefficients de corrélation inconnus ?
2. On nous donne gentiment un coefficient de corrélation supplémentaire : $R_{XX}(3) = -1/8$. Ce nouveau coefficient permet-il de confirmer que $x(n)$ peut-être AR(2), ou au contraire l'infirme t'il ?

Petit exercice 2 -

Soit une antenne linéaire uniforme, composée de M=32 capteurs élémentaires. La longueur d'onde est de 20 cm et la distance intercapteurs est de 5 cm. L'antenne est illuminée par des ondes planes, et l'on recueille le long de l'antenne un signal $x(m)$, dont on calcule le périodogramme.

1. On observe sur le périodogramme des maxima pour les fréquences 0.1, 0.2 et 0.22. Quels sont les angles d'arrivée des sources correspondantes ?
2. Quel est le pouvoir de résolution angulaire de cette antenne ? Que devient il si l'on prend une distance intercapteurs de 10 cm ?

Exercice 3 -

On considère le signal

$$x(n) = A_1 e^{j(2\pi f_1 n + \phi_1)} + A_2 e^{j(2\pi f_2 n + \phi_2)} + b(n),$$

où A_1 et A_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, centrées, de variances respectives P_1 et P_2. Les phases ϕ_1 et ϕ_2 sont indépendantes et distribuées uniformément sur $[0, 2\pi]$, et est un bruit blanc additif gaussien, centré, de variance σ^2.

1. Montrez que la fonction d'autocorrélation de $x(n)$ est

$$R_{XX}(k) = P_1 \exp(j2\pi f_1 k) + P_2 \exp(j2\pi f_2 k) + \sigma^2 \delta(k),$$

2. Calculez, puis tracez la DSP théorique (pour des valeurs quelconques, mais raisonnables, des paramètres), sur une échelle de fréquences réduites.
3. En pratique, la fonction d'autocorrélation estimée est limitée entre $-N$ et N et on a $E\left[\hat{R}_{XX}(k)\right] = w(k) R_{XX}(k)$, où $w(k)$ est une fenêtre de pondération.
   (a) Déduisez en l'expression de la moyenne de la densité spectrale de puissance estimée à partir de $\hat{R}_{XX}(k)$.
   (b) Tracez un exemple de cette DSP, pour un ensemble de paramètres pertinents, et évaluez graphiquement la limite de résolution, c'est-à-dire l'écart entre f_1 et f_2 en dessous duquel on ne peut plus distinguer les composantes en f_1 et f_2.
4. On cherche à comparer cette estimée au périodogramme, et à expliquer certaines observations du TP.
   (a) Calculez, pour commencer, la TF d'*une* sinusoïde $x(n) = A_1 e^{j(2\pi f_1 n + \phi_1)}$ définie sur N points avec $n = 0..N-1$.
   (b) Déduisez en le périodogramme $P(f)$ de $x(n)$, et montrez en particulier que celui-ci dépend des phases ϕ_1 et ϕ_2, via un terme que l'on notera $D(f)$.
   (c) Placez vous à la limite de résolution et représentez le module du terme $D(f)$ pour
      i. $\phi_1 = \phi_2$
      ii. $\phi_1 = \phi_2 + \pi$

      Commentez ces résultats
   (d) En utilisant les différentes hypothèses sur les variables aléatoires mises en jeu, montrez que $E[D(f)] = 0$,
   (e) puis que la moyenne du périodogramme $E[P(f)]$ converge vers la vraie densité spectrale de puissance.