Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris —————— E.S.I.E.E.	Unité : TdSI Estimation et modélisation spectrale Date : février 2001 Durée : 2 heures	Classe I4-SE

SUJET À TRAITER – AVEC DOCUMENTS. ***Tous documents autorisés***

Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Questions (classiques) de cours et compréhension

1. Pourquoi définit on deux estimateurs de la fonction d'autocorrélation ? Quel est l'avantage de l'estimateur biaisé, du point de vue de l'analyse spectrale ?
2. Expliquez pourquoi le corrélogramme, défini par
$$\hat{S}_{XX}^{(C)}(f) = \mathrm{TF}\{w(k)\hat{R}_{XX}^{(B)}(k)\}$$
est équivalent à un lissage du périodogramme.
3. Dans la méthode du corrélogramme, quelle doit être la propriété vérifiée par la fenêtre $w(k)$ pour que l'estimateur de la densité spectale de puissance soit « physiquement » raisonnable ?
4. Pourquoi le périodogramme n'est-il pas un estimateur satisfaisant de la densité spectrale de puissance ?
5. Dans la méthode du périodogramme moyenné, comment évoluent la variance et la capacité de résolution lorsque l'on augmente le nombre de segments, lors de l'analyse de données de longueur N ?

Exercice 1 -

On considère un signal $x(n)$ dont on a estimé les trois premiers coefficients d'autocorrélation : $R_{XX}(0) = 1$, $R_{XX}(1) = 1/2$ et $R_{XX}(2) = 1/4$.

1. Quelles méthodes peut-on employer pour estimer la densité spectrale de ce processus ?
2. Calculez puis tracez l'estimée de la DSP de $x(n)$ par la méthode du corrélogramme. Quelle supposition implicite est faite sur les coefficients de corrélation inconnus ?
3. Calculez et tracez les estimées de la DSP de $x(n)$ par un AR(1), puis par un AR(2). Quelle supposition implicite est faite sur les coefficients de corrélation inconnus ?

Exercice 2 -

On considère le signal
$$x(n) = A_1 \sin(2\pi f_1 n) + A_2 \sin(2\pi f_2 n) + b(n),$$
où A_1 et A_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, centrées, de variances respectives P_1 et P_2. $b(n)$ est un bruit blanc additif gaussien, centré, de variance σ^2.

1. Montrez que la fonction d'autocorrélation de $x(n)$ est
$$R_{XX}(k) = \frac{P_1}{2}\cos(2\pi f_1 k) + \frac{P_2}{2}\cos(2\pi f_2 k) + \sigma^2\delta(k),$$
2. Calculez, puis tracez la DSP théorique (pour des valeurs quelconques, mais raisonnables, des paramètres), sur une échelle de fréquences réduites.

3. En pratique, la fonction d'autocorrélation estimée est limitée entre $-N$ et N et on a $\mathrm{E}\left\{\hat{R}_{XX}(k)\right\} = w(k)R_{XX}(k)$, où $w(k)$ est une fenêtre de pondération.
   (a) Déduisez en l'expression de la moyenne de la densité spectrale de puissance estimée à partir de $\hat{R}_{XX}(k)$.
   (b) Si $w(k)$ est une fenêtre triangulaire, donnez l'expression de sa TF $W(f)$ [1], et représentez son module, en précisant les abscisses des passages par zéro.
   (c) Montrez que $\int W(f)\mathrm{d}f = w(0)$.
   (d) Donnez l'expression de la moyenne de la DSP estimée par corrélogramme, pour le signal de départ $x(n)$, avec une fenêtre $w(k)$ triangulaire. Tracez un exemple de cette DSP, pour un ensemble de paramètres pertinents.
   (e) Évaluez graphiquement la limite de résolution, c'est-à-dire l'écart entre f_1 et f_2 en dessous duquel on ne peut plus distinguer les composantes en f_1 et f_2.
4. Pour simplifier l'exercice (mais on utilisera avec profit les formules de trigonométrie fournies en fin de sujet), pour le moment, on considère une seule sinusoïde d'amplitude A_1 gaussienne centrée et de variance P_1 :
$$s(n) = A_1 \sin(2\pi f_1 n)\,.$$
   (a) Montrez, comme en 1, que la fonction d'autocorrélation est $R_{SS}(k) = \frac{P_1}{2}\cos(2\pi f_1 k)\,.$
   (b) Donnez les équations de Yule-Walker, ou équations normales, permettant de déterminer les coefficient d'un modèle AR d'ordre $p = 2$ pour le signal $s(n)$.
   (c) Résolvez ces équations et montrez que l'on obtient $a_1 = 2\cos(2\pi f_1)$ et $a_2 = -1$.
   (d) Montrez que la variance du bruit générateur du modèle AR, σ_u^2, est nulle. Donnez l'équation aux différences vérifiée par $s(n)$.
   (e) Déduisez en que le vecteur $[1 - a_1 - a_2]^t$ appartient au noyau de la matrice de corrélation d'ordre 3.
5. En notant $A(z)$ la transformée en z de la séquence $\{1 - a_1 - a_2\}$, déduisez de l'équation aux différences sur $s(n)$ que $A(z)S(z) = 0$.
6. Considérons un signal composé de deux sinusoïdes $x(n) = s_1(n) + s_2(n)$, et notons $A_1(z)$ et $A_2(z)$ les TZ respectives des coefficients AR correspondant à $s_1(n)$ et $s_2(n)$.
   (a) Montrez que l'on a alors $A_1(z)A_2(z)X(z) = 0$.
   (b) Déduisez en que le signal $x(n)$ possède un modèle AR d'ordre 4, avec une variance de bruit générateur nulle ; puis que le vecteur $[1 - \mathbf{a}]$ appartient au noyau de la matrice de corrélation d'ordre 5.
   (c) Si $x(n)$ est une somme de sinusoïdes, alors $X(z)$ est non nul pour $z = z_k = e^{\pm j2\pi f_k}$. Déduisez en que les z_k sont les zéros du polynôme $A(z) = A_1(z)A_2(z)$.
7. Dans le cas d'une somme de sinusoïde bruitée, on peut montrer que les vecteurs propres de la matrice de corrélation sont inchangés, alors que les valeurs propres sont augmentées de σ^2. Compte tenu des résultats précédents, décrivez une méthode permettant de déterminer les fréquences des différentes sinusoïdes ainsi que la puissance du bruit additif.

Trigonométrie

$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$
$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$

[1] On ne vous demande pas de la calculer, vu que vous avez droit aux documents.