***Tous documents autorisés**,*
***Durée** : une heure.*

Partie de J.-F. BERCHER, à rendre sur une copie séparée

Les réponses aux questions seront concises, mais précises. Les justifications sont aussi importantes que le résultat brut. Le correcteur appréciera la clarté de la rédaction et de la présentation. Les résultats utiles sont donnés dans le texte (montrez que. . .) ou dans les questions suivantes... En cas de difficulté sur une question, vous pouvez admettre le résultat, le signaler, et poursuivre.

Il est conseillé de lire attentivement l'énoncé.

Questions (classiques) de cours et compréhension

1. Quel est le lien entre fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance ?
2. Pourquoi définit on deux estimateurs de la fonction d'autocorrélation ? Quel est l'avantage de l'estimateur biaisé, du point de vue de l'analyse spectrale ?
3. Expliquez pourquoi le corrélogramme, défini par
$$\hat{S}_{XX}^{(C)}(f) = \mathrm{TF}\{w(k)\hat{R}_{XX}^{(B)}(k)\}$$
est équivalent à un lissage du périodogramme.
4. Dans la méthode du corrélogramme, quelle doit être la propriété vérifiée par la fenêtre $w(k)$ pour que l'estimateur de la densité spectale de puissance soit « physiquement » raisonnable ?
5. Quels sont les critères de choix d'une fenêtre de pondération ?
6. Pourquoi le périodogramme n'est-il pas un estimateur satisfaisant de la densité spectrale de puissance ?
7. Dans la méthode du périodogramme moyenné, comment évoluent la variance et la capacité de résolution lorsque l'on augmente le nombre de segments, lors de l'analyse de données de longueur N ?

Exercice 1 - Analyse d'un AR bruité

1. On considère un signal autorégressif d'ordre 1 $y(n)$.
   (a) Donnez son équation aux différences.
   (b) Montrez que $a_1 = -R_{YY}(1)/R_{YY}(0)$.
2. Soit $z(n) = y(n) + b(n)$, où $b(n)$ est un bruit blanc centré de variance σ_b^2. Si on estime le paramètre AR, noté maintenant $\hat{a}_1$ dans ce cas bruité, montrez que l'on a alors
$$\hat{a}_1 = \frac{\rho}{\rho+1} a_1,$$
où $\rho = R_{YY}(0)/\sigma_b^2$ est le rapport signal-à-bruit.

3. Généralisez ce résultat à un modèle AR(p) réel perturbé par un bruit blanc centré de variance σ_b^2 et montrez que
$$\hat{\mathbf{a}} = \left(\mathbf{R}_{YY} + \sigma_b^2 \mathbf{1}\right)^{-1} \mathbf{R}_{YY}\mathbf{a},$$
où $\mathbf{R}_{YY}$ est la matrice de corrélation de $y(n)$ et $\mathbf{1}$ la matrice identité de dimensions convenables.

Exercice 2 – Biais du périodogramme

Les deux premières questions sont un peu délicates. Ne vous acharnez pas forcément dessus.

On considère un signal aléatoire stationnaire et ergodique $x(n)$. La fonction d'autocorrélation est définie par
$$R_{XX}(k) = \mathrm{E}\left[x(n)x^*(n-k)\right].$$

1. En admettant que les composantes spectrales sont décorrélées, c'est-à-dire
$$\mathrm{E}\left[X(f)X^*(f')\right] = 0 \;\text{ pour }\; f \neq f',$$
montrez que
$$R_{XX}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}\left[|X(f)|^2\right] e^{+j2\pi fk} df.$$
Déduisez en que
$$S_{XX}(f) = \mathrm{TF}\{R_{XX}(k)\} = \mathrm{E}\left[|X(f)|^2\right].$$
2. Soit $g(n)$ une fenêtre de pondération. On définit un signal $\tilde{x}(n)$ par
$$\tilde{x}(n) = g(n)x(n).$$
Montrez, toujours en supposant que les composantes spectrales sont décorrélées, que
$$S_{\tilde{X}\tilde{X}}(f) = |G(f)|^2 * \mathrm{E}\left[|X(f)|^2\right] = |G(f)|^2 * S_{XX}(f)$$
3. Supposons, pour cette question, que $x(n)$ soit un bruit banc centré de variance σ^2.
   (a) Quelle est sa densité spectrale de puissance théorique $S_{XX}(f)$?
   (b) Quelle est la densité spectrale de puissance du signal $\tilde{x}(n)$?
   (c) Déduisez en qu'il faut que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = 1$$
   pour que la fonction de pondération $g(n)$ ne modifie pas la puissance de $x(n)$.
   (d) En utilisant la relation de Parseval, déduisez en que ceci est équivalent à
   $$\sum_{-\infty}^{+\infty} |g(n)|^2 = 1.$$
4. On choisit pour $g(n)$ la fenêtre rectangulaire
$$\begin{cases} g(n) & = \; A \quad \text{pour } n = 0 : N-1, \\ & = \; 0 \quad \text{ailleurs.} \end{cases}$$
   (a) Calculez et donnez l'expression de $G(f)$ (vous pourrez utiliser la somme d'une suite géométrique...).
   (b) En utilisant les résultats du 3, quelle amplitude A faut-il choisir pour ne pas perturber le niveau de puissance, dans le cas du bruit blanc ?
   (c) Si on prend néanmoins $A = 1$, et que l'on note $x_N(n) = \tilde{x}(n) = g(n)x(n)$ et $\tilde{X}(f) = X_N(f)$ sa transformée de Fourier, montrez que l'estimateur
   $$\hat{S}_{X_N X_N}(f) = \frac{1}{N}|X_N(f)|^2$$
   est non biaisé (dans le cas du bruit blanc).