Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris —————— E.S.I.E.E.	Unité : ST4-SIG Examen d'estimation et analyse spectrale Date : décembre 2004 Durée : deux heures	Majeure I4 TTS

SUJET À TRAITER – AVEC DOCUMENTS. ***Tous documents autorisés***

Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Questions (habituelles) de cours et compréhension [4 points]

Le correcteur appréciera non seulement la justesse de vos réponses, mais également leur concision.

1. Énoncez la règle de Bayes.
2. Quelles sont les différences entre estimateur MAP et Maximum de vraisemblance ?
3. Quelles sont les difficultés posées par l'analyse spectrale d'un processus aléatoire à partir de données limitées dans le temps ?
4. Pourquoi définit on deux estimateurs de la fonction d'autocorrélation ? Quel est l'avantage de l'estimateur biaisé, du point de vue de l'analyse spectrale ?
5. Pourquoi le périodogramme n'est-il pas un estimateur satisfaisant de la densité spectrale de puissance ?
6. Dans la méthode du périodogramme moyenné, comment évoluent la variance et la capacité de résolution lorsque l'on augmente le nombre de segments, lors de l'analyse de données de longueur N ?
7. Dans la méthode du corrélogramme, quelle doit être la propriété vérifiée par la fenêtre $w(k)$ pour que l'estimateur de la densité spectale de puissance soit physiquement raisonnable ?
8. Montrez que $\widehat{\mu} = \frac{1}{2(N+2)} \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p) + \frac{1}{2(N-2)} \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p+1) + \frac{N}{N^2-1/2}$ est un estimateur non biaisé de la moyenne statistique.
9. Énoncer la loi des grands nombres.
10. Dans quels cas le maximum de vraisemblance et le maximum a posteriori conduisent ils au même résultat ?
11. Soient deux sinusoïdes de fréquences respectives 100 kHz et 110 kHz échantillonnées à 500 kHz. Quelle est la durée minimale d'analyse (et le nombre de points à acquérir) pour séparer ces deux raies ?
12. On souhaite lisser un périodogramme par une fenêtre rectangulaire. Peut-on réaliser cette opération via un corrélogramme, en choisissant une fenêtre de pondération appropriée (laquelle) sur la corrélation ?
13. Dans la méthode du périodogramme lissé, comment évoluent la variance et la capacité de résolution lorsque l'on augmente la largeur de la fenêtre de lissage ?
14. Soient deux sinusoïdes de fréquences respectives 100 kHz et 110 kHz échantillonnées à 500 kHz. Quelle est la durée minimale d'analyse (et le nombre de points à acquérir) pour séparer ces deux raies ?
15. Quels sont les critères de choix d'une fenêtre de pondération en analyse spectrale (3 items) ?
16. Soient N variables aléatoire $\{X_i\}, i = 1 \ldots N$, indépendantes et de même variance σ^2. On pose $Y_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$. Montrez que Var[$Y_N$]=$\frac{\sigma^2}{N}$
17. On estime la fonction de corrélation par l'estimée « instantanée » (i.e. sans moyennage) par $\hat{R}_{XX}(n,k) = X(n)X(n-k)$.
    – Montrez que cet estimateur est non-biaisé (si le signal est stationnaire).
    – Calculez la variance d'estimation dans le cas (simple) ou $X(n)$ est un bruit blanc (centré) de variance σ_X^2.

Exercice 1 – Estimation et modèle AR

On modélise un signal réel $x(n)$ comme répondant au modèle autorégressif $x(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i) + u(n)$, où $u(n)$ est un bruit blanc gaussien de variance σ_b^2. Le signal est connu sur N points et on pose

$$\boldsymbol{x} = [x(p+1) \dots x(N)]^T,$$

$$\boldsymbol{u} = [u(p+1) \dots u(N)]^T.$$

Le vecteur des paramètres AR est désigné par $\boldsymbol{a} = [a_1 \dots a_p]^T$

1. Montrez que $\boldsymbol{x}$ peut s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u},$$

   où $\boldsymbol{X}$ est une matrice $(N-p) \times p$ que vous préciserez.
2. Donnez l'expression de la vraisemblance $p_{X|A}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$.
3. Montrez que l'estimateur $\hat{\boldsymbol{a}}_{MV}$ de $\boldsymbol{a}$ au sens du maximum de vraisemblance s'écrit $\hat{\boldsymbol{a}}_{MV} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x}$.
4. Donnez l'expression du terme générique de la matrice $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ puis du vecteur $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x}$. Montrez, ou déduisez en, que l'estimateur est non biaisé.
5. On prend maintenant une loi a priori gaussienne centrée, de matrice de corrélation $\boldsymbol{R}_A$ sur $\boldsymbol{a}$. Donnez l'expression de la loi a posteriori.
6. Donnez l'expression de l'estimateur $\hat{\boldsymbol{a}}_{MAP}$ de $\boldsymbol{a}$ au sens du maximum a posteriori.

Exercice 2 – Interspectre (presque du cours)

On s'intéresse à la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$ et l'on note $S_{XY}(f)$ cet interspectre.

1. Soit

$$\hat{R}_{XY}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=k}^{N-1} X(n)Y^*(n-k) \quad \text{pour } k > 0$$

   un estimateur de l'intercorrélation. Montrez que cet estimateur est biaisé.
2. Calculez la moyenne de $\hat{S}_{XY}(f)$, l'interspectre estimé comme TF de $\hat{R}_{XY}$ et montrez qu'il est asymptotiquement (ie si $N \to +\infty$) non biaisé.
3. Montrez que $\hat{S}_{XY}(f)$ s'exprime également comme

$$\hat{S}_{XY}(f) = \frac{1}{N} X_N(f) Y_N^*(f),$$

   où $X_N(f)$ et $Y_N(f)$ sont les transformées de Fourier de $x(n)$ et $y(n)$ sur N points.
4. Si $y(n)$ est la sortie d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$ et d'entrée $x(n)$, on rappelle que $R_{YX}(k) = (h * R_{XX})(k)$. Que vaut alors $S_{YX}(f)$?