

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris E.S.I.E.E.	Unité : TDS1 Examen d'estimation et modélisation spectrale Date : 19 octobre 2000 Durée : 1 heure	Classe I4 TTS
--	--	-------------------------

SUJET À TRAITER – SANS DOCUMENTS.

Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Rendre sur une copie séparée.

Questions de cours et compréhension [10 points]

1. Quel est le lien entre fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance ?
2. Pourquoi définit-on deux estimateurs de la fonction d'autocorrélation ? Quel est l'avantage de l'estimateur biaisé, du point de vue de l'analyse spectrale ?
3. Expliquez pourquoi le corrélogramme, défini par

$$\hat{S}_{XX}^{(C)}(f) = \text{TF}\{w(k)\hat{R}_{XX}^{(B)}(k)\}$$

est équivalent à un lissage du périodogramme.

4. Dans la méthode du corrélogramme, quelle doit être la propriété vérifiée par la fenêtre $w(k)$ pour que l'estimateur de la densité spectrale de puissance soit « physiquement » raisonnable ?
5. Pourquoi le périodogramme n'est-il pas un estimateur satisfaisant de la densité spectrale de puissance ?
6. Dans la méthode du périodogramme moyenné, comment évoluent la variance et la capacité de résolution lorsque l'on augmente le nombre de segments, lors de l'analyse de données de longueur N ?
7. Soit un filtre de réponse en fréquence $H(f)$ et d'entrée un bruit blanc (à temps discret) de variance σ^2 . Comment s'exprime alors la densité spectrale de puissance de la sortie de ce filtre ?
8. Donnez la fonction de transfert en z et l'équation aux différences d'un filtre ARMA général. S'agit-il d'un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?
9. La densité spectrale de puissance obtenue après modélisation ARMA est-elle continue ou discrète (en d'autres termes peut-on calculer la valeur de la dsp pour n'importe quelle fréquence) ?
10. Quel est l'intérêt de la modélisation spectrale, et en particulier de la modélisation AR, par rapport aux méthodes de Fourier du type périodogramme, en ce qui concerne l'analyse spectrale ?

Exercice 1 – Programmation [4 points]

Proposez un programme, dans le langage de votre choix, qui permette de calculer le périodogramme moyenné (sans recouvrement des segments), à partir d'un tableau de données x de longueur N , et du nombre de segments, K .

Exercice 2 – Biais du périodogramme [6 points]

1. Soit $g(n)$ une fenêtre de pondération. On définit un signal $\tilde{x}(n)$ par

$$\tilde{x}(n) = g(n)x(n).$$

Dans cet exercice, on considèrera uniquement le cas où $x(n)$ est un bruit blanc (discret) centré et de variance σ^2 .

- (a) Quelle est sa densité spectrale de puissance théorique $S_{XX}(f)$?
- (b) Quelle est la densité spectrale de puissance du signal $\tilde{x}(n)$?
- (c) Déduisez en qu'il faut que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = 1$$

pour que la fonction de pondération $g(n)$ ne modifie pas la puissance de $x(n)$.

- (d) En utilisant la relation de Parseval, déduisez en que ceci est équivalent à

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |g(n)|^2 = 1.$$

2. On choisit pour $g(n)$ la fenêtre rectangulaire

$$\begin{cases} g(n) = A & \text{pour } n = 0 : N - 1, \\ = 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- (a) En utilisant les résultats précédents, quelle amplitude A faut-il choisir pour ne pas perturber le niveau de puissance, dans le cas du bruit blanc ?
- (b) Si on prend néanmoins $A = 1$, et que l'on note $x_N(n) = \tilde{x}(n) = g(n)x(n)$ et $\tilde{X}(f) = X_N(f)$ sa transformée de Fourier, montrez que l'estimateur

$$\hat{S}_{X_N X_N}(f) = \frac{1}{N} |X_N(f)|^2$$

est non biaisé, dans le cas du bruit blanc.