Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris —————— E.S.I.E.E.	Unité : ST4-SIG Examen d'estimation et modélisation spectrale Date : décembre 2003 Durée : deux heures	Majeure I4 TTS

SUJET À TRAITER – AVEC DOCUMENTS. ***Tous documents autorisés***

Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Questions (habituelles) de cours et compréhension [4 points]

Le correcteur appréciera non seulement la justesse de vos réponses, mais également leur concision.

1. Énoncez la règle de Bayes.
2. Quelles sont les différences entre estimateur MAP et Maximum de vraisemblance ?
3. Peut on définir un estimateur non-biaisé de variance arbitrairement faible ?
4. Quelles sont les difficultés posées par l'analyse spectrale d'un processus aléatoire à partir de données limitées dans le temps ?
5. Quel est le lien entre fonction de corrélation et densité spectrale de puissance ?
6. Pourquoi le périodogramme n'est-il pas un estimateur satisfaisant de la densité spectrale de puissance ?
7. Dans la méthode du périodogramme moyenné, comment évoluent la variance et la capacité de résolution lorsque l'on augmente le nombre de segments, lors de l'analyse de données de longueur N ?
8. Soient deux raies séparées de $\Delta f = 0.02$, en fréquence réduite. A partir de combien de points N de données est-il possible de séparer ces deux raies ?

Exercice 1 – Programmation [5 points]

Proposez un programme (une fonction/procédure), dans le langage de votre choix (mais Matlab de préférence), qui permette de calculer un *périodogramme moyenné* (sans recouvrement), à partir d'un tableau de données x de longueur N et du nombre de segments K. Vous supposerez que l'utilisateur est suffisamment éveillé pour fournir K tel que $M = N/K$ soit un entier.
Vous expliciterez le principe de la méthode et les différentes opérations mises en œuvre et vous fournirez ensuite le programme.

Exercice 2 – Suite binaire non équilibrée [5 points]

On observe une suite binaire s, bruitée suivant

$$y = s + b,$$

où b est le bruit blanc gaussien centré de variance σ^2 habituel. La suite binaire n'est pas équilibrée : on a $P(s = 0) = 0.3$ et $P(s = 1) = 0.7$, ce qui correspond à une densité

$$p_S(s) = 0.3\delta(s) + 0.7\delta(s - 1).$$

On mesure $y_1 = 0.45$, puis $y_2 = 0.5$. Que valent les estimées $\hat{s}_1$ et $\hat{s}_2$ correspondantes, au sens du maximum de vraisemblance et du maximum a posteriori ?

Exercice 3 – Démodulation d'amplitude... [6 points]

Pour une observation continue telle que

$$y(t) = u(t) + b(t), \text{ sur [0,T]}$$

où $b(t)$ est un bruit gaussien centré de variance σ^2 et de densité spectrale de puissance constante N_0, sur la bande $[-F_E/2, F_E/2]$ et nulle hors de cette bande, on peut montrer que (ce sera éventuellement l'objet d'un exercice une de ces prochaines années, ou pour un rattrapage) :

$$p(y(t)|u(t)) \propto \exp\left(-\frac{1}{2N_0}\int_0^T (y(t)-u(t))^2\,dt\right).$$

o o O o o

On mesure

$$y(t) = A\cos(2\pi f_o t) + b(t)$$

où $b(t)$ est le bruit blanc gaussien centré de densité spectrale N_0 habituel. Le problème est de déterminer l'amplitude A.

1. Établissez l'expression de la loi a posteriori $p(A|y(t), f_0)$.
2. En notant que $\frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\pi f_o t)^2\,dt \simeq \frac{1}{2}$, et en prenant comme loi a priori pour A une loi uniforme sur $[-Amin, Amax]$, montrez que

   $$\hat{A}_{\text{MMSE}} \simeq \hat{A}_{\text{MAP}} = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(2\pi f_o t)\,dt$$

   Vous pourrez supposer, pour l'estimateur MMSE, que l'intervalle $[-Amin, Amax]$ est « suffisamment grand ».
3. Montrez que l'estimateur est non biaisé.