Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris —————— E.S.I.E.E.	Unité : ST4-SIG Examen d'estimation et modélisation spectrale Date : décembre 2001 Durée : 2 heure	Classe I4 TTS

SUJET À TRAITER – AVEC DOCUMENTS. ***Tous documents autorisés***

Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Questions de cours et compréhension [5 points]

1. Pourquoi définit on deux estimateurs de la fonction d'autocorrélation ? Quel est l'avantage de l'estimateur biaisé, du point de vue de l'analyse spectrale ?
2. Expliquez pourquoi le corrélogramme, défini par
$$\hat{S}_{XX}^{(C)}(f) = \mathrm{TF}\{w(k)\hat{R}_{XX}^{(B)}(k)\}$$
est équivalent à un lissage du périodogramme.
3. Dans la méthode du corrélogramme, quelle doit être la propriété vérifiée par la fenêtre $w(k)$ pour que l'estimateur de la densité spectale de puissance soit « physiquement » raisonnable ?
4. Pourquoi le périodogramme n'est-il pas un estimateur satisfaisant de la densité spectrale de puissance ?
5. Donnez l'expression de la densité spectrale de puissance obtenue après modélisation ARMA. Cette DSP est elle continue ou discrète (en d'autres termes peut-on calculer la valeur de la dsp pour n'importe quelle fréquence) ?

Exercice 1 – Analyse d'un signal [$\approx$ 7 points]

On considère un signal $x(n)$ dont on a estimé les trois premiers coefficients d'autocorrélation : $R_{XX}(0) = 1, R_{XX}(1) = a, R_{XX}(2) = b$.

1. Quelles méthodes peut on employer pour estimer la densité spectrale de ce processus ?
2. Calculez l'estimée de la DSP obtenue par la méthode du corrélogramme. Tracez le résultat obtenu avec $a = 4/5$, $b = -1/4$, en précisant la valeur pour les fréquences 0 et 1/2 (en fréquence réduite). Commentez ce résultat.
3. Si on estime un nouveau coefficient $R_{XX}(3) = c = 0.5417$, que devient l'estimée de la DSP (expression et graphique)
4. Calculez et tracez les estimées de la DSP de $x(n)$ par un AR(1) [i.e. d'ordre p=1], puis par un AR(2).
5. En utilisant la relation de récurrence pour les coefficients d'autocorrélation d'un AR(2), déterminez $R_{XX}(3)$. Comparez cette valeur à la valeur c fournie plus haut. Dans ces conditions, le signal est il un AR(2) pur ? Même question si l'on prenait $c = 1/5$.

Exercice 2 – Lissage optimal [$\approx$ 8 points]

1. En tenant compte des statistiques du périodogramme vues en cours, et en se plaçant en asymptotique ($N \to \infty$), montrez que le périodogramme, noté $\Pi(f)$, est une fonction aléatoire qui peut être mise sous la forme
$$\Pi(f) = S(f)\xi(f),$$
où $S(f)$ est la vraie densité spectrale de puissance et $\xi(f)$ un bruit blanc (en fréquence), de variance 1.

2. Compte tenu de la remarque précédente, le logarithme du périodogramme noté $Y(f)$ est une fonction à bruit blanc additif. Notons $A(f) = \log(S(f))$, $B(f) = \log(\xi(f))$. On effectue la TF inverse $y(n)$ du log-périodogramme $Y(f)$. Donnez l'expression de $y(n)$ en fonction de $a(n)$ et $b(n)$. [Question ultra-simple]

3. La transformée de Fourier (inverse) d'un bruit blanc est un bruit blanc. Est-ce logique ?

   La séquence $b(n)$ est ainsi un bruit blanc, dont on notera σ^2 la variance. [NB. Cette variance est calculable exactement en supposant le signal initial gaussien]. On cherche à estimer $A(f)$. Pour celà, on pose $\hat{a}(n) = y(n)w(n)$, ou $w(n)$ est une fenêtre de pondération.

4. Expliquez pourquoi cette dernière opération correspond à un lissage du log-périodogramme [À nouveau une question ultra simple] et pourquoi il n'est pas nécessaire ici que la fenêtre $w(k)$ ait une TF non-négative.

   On définit une erreur $e(n)$ par $e(n) = \hat{a}(n) - a(n)$. On cherche à minimiser l'écart quadratique fréquentiel moyen intégré entre $A(f)$ et $\hat{A}(f)$.

5. En utilisant la relation de Parseval, montrez que

$$E\left[\int_0^1 |E(f)|^2 df\right] = \sum_n E\left[e(n)^2\right].$$

6. Calculez les coefficients $w(k)$ de la fenêtre de pondération minimisant l'erreur quadratique et montrez que l'on a alors

$$w(k) = \frac{a(k)^2}{a(k)^2 + \sigma^2}.$$

   Épilogue — Bien entendu, les coefficients $a(k)$ étant inconnus, la fenêtre n'est pas utilisable telle quelle. Il est cependant possible de construire des estimateurs de $w(k)$; par exemple $\hat{w}(k) = (y(k)^2 - \sigma^2)/y(k)^2$ est un tel estimateur (pas forcément très bon d'ailleurs...), et d'obtenir alors une méthode de lissage optimal du périodogramme.

Référence : B. LUMEAU et H. CLERGEOT, « Méthode d'estimation optimale de la matrice interspectrale optimisant le compromis biais-variance », Revue Traitement du Signal, 1990.