Éléments de corrigé
Exam du 17/12

Exercice n°1

Figure 1 : représentation fréquentielle, d'un signal sur 1000 points, toujours positif, autour d'une valeur moyenne ~1. On note un point de symétrie autour de 500. Il peut s'agir du périodogramme, (≥ 0) d'un bruit blanc de variance 1 (la valeur moyenne observée), dont on sait que c'est un mauvais estimateur de la dsp (forte variance)

Figures 2 et 3 : représentation en fréquence réduite. "Jusqu'à $\frac{Fe}{2} \equiv 0{,}5$ en f. réduite. On voit deux "événements" autour des fréquences 0,15 et 0,26.
On reconnaît en 0.26 un sinus cardinal au carré. On mesure des lobes secondaires de largeur $\simeq 0.01$, soit $\frac{1}{N} = 0.01$, la résolution, donc $N \sim 100$ points.
Autour de 0.15, on voit un lobe principal plus important / plus large, ce qui indique probablement plus d'une raie fréquentielle, avec un écart entre les raies inférieur à la résolution de Fourier $1/N$.
Il doit y avoir une fréquence en 0.26

Figure 4 : fonction d'autocorrélation, très piquée en 1000, qui correspond à $R_{xx}(0)$. On a donc un signal de 1000 points au départ $\to$ longueur de $2N-1 = 1999$ pour la corrélation.

la variance augmente sur les bords, ce qui indique qu'on a utilisé l'estimateur non biaisé. Le pic très fin laisse penser que le signal est un bruit blanc. Sa puissance/variance est $R_{xx}(0) = 1$.

Figure 5 : (cf TP). on reconnait un cosinus décroissant en triangle, caractéristique de l'estimateur biaisé. On voit un pic en 1000. Le signal initial, sur 1000 points, est donc composé d'une sinusoïde et d'un bruit blanc. Leurs puissances respectives, lues sur le graphique, sont de 0,5 et 1, soit un RSB de 1/2. Entre 1000 et 1200, on distingue deux périodes du cosinus, soit donc une fréquence (réduite) de 0.01.

Exercice 2

(1) $$y(n) = \sum_{i=0}^{q} b_i\, x(n-i)$$ $x(n)$ bruit blanc variance σ_x^2

1. La relation (1) est analogue à une formule de convolution discrète, avec
$$y(n) = \sum_{i=0}^{q} h(i)\, x(n-i) \quad \text{soit}$$
$h(i) = b_i$ pour $i \in [0, q]$ et $= 0$ ailleurs

2. Corrélation.

$$R_{YY}(k) = E[y(n)\, y(n-k)]$$

$$R_{YY}(k) = E\left[\sum_{i=0}^{q} b_i\, x(n-i) \sum_{j=0}^{q} b_j\, x(n-k-j)\right]$$

$$= \sum_{i,j} b_i b_j \underbrace{E\left[x(n-i)\, x(n-k-j)\right]}_{\sigma_x^2\, \delta(i-k-j)}$$

car $x(n)$ est blanc

donc on aura uniquement des termes pour $j = -k + i$, soit

$$R_{YY}(k) = \sigma_x^2 \sum_{i=0}^{q} b_i b_{i-k}$$

$$= \sigma_x^2\; b * b^{(-)}$$

en reconnaissant une convolution par la séquence retournée $b^{(-)}$.

3) La fonction de corrélation n'est calculable que pour $|k| < q$ soit une longueur totale de $2q-1$. C'est logique car le filtre est de longueur q et il n'y a pas de mémoire pour des décalages plus grands

4) La TF de la fonction d'autocorrélation s'écrit donc

$$S_{YY}(f) = TF\{R_{YY}(k)\} = \sigma_x^2\, B(f)\, B^*(f)$$

$$= \sigma_x^2\, |B(f)|^2$$

la formule des interférences relie la fonction d'autocorrélation entre l'entrée et la sortie d'un filtre $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

ici $H(f) = B(f)$ et $S_x(f) = \sigma^2$ dsp du bruit blanc d'entrée.

5. signal AR.

$$y(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i\, y(n-i) + b(n)$$

$$y(n)y(n-k) = \sum_{i=1}^{p} a_i\, y(n-i)\, y(n-k) + b(n)\, y(n-k)$$

Soit, en prenant l'espérance :

$$R_{yy}(k) = \sum_{i=1}^{p} a_i\, R_y(k-i) + 0$$

car $E[b(n)\, y(n-k)] = 0$ si $k > 0$.

Exercice 2

$$\hat{S}^m(f) = \alpha \hat{S}^{m-1}(f) + \underbrace{\frac{\beta}{M}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x_m e^{-j2\pi f n}\right|^2}_{\text{Noté } \beta P_m(f)}$$

1) $E[\hat{S}^m(f)] = E[\hat{S}^{m-1}(f)] = \bar{S}(f)$

Alors, en prenant l'espérance,

$$\bar{S}(f) = \alpha \bar{S}(f) + \beta E[P_m(f)]$$

ainsi, $\bar{S}(f) = \dfrac{\beta}{1-\alpha} E[P_m(f)]$

Il faudra donc $\beta = 1-\alpha$ pour que $\bar{S} = E[P_m(f)]$.

2) On cherche à vérifier que

$$\hat{S}^m(f) = \beta \sum_{k=0}^{m} \alpha^k P_{m-k}(f)$$

En développant :

$$\hat{S}^m(f) = \beta P_m(f) + \beta \sum_{k=1}^{m} \alpha^k P_{m-k}(f)$$

$$= \beta P_m(f) + \alpha\beta \sum_{k=1}^{m} \alpha^{k-1} P_{m-k}(f)$$

$$= \quad '' \quad + \alpha \underbrace{\beta \sum_{k'=0}^{m-1} \alpha^{k'} P_{m-k'-1}(f)}_{\hat{S}^{m-1}(f)} \qquad k' = k-1$$

soit $\hat{S}^m(f) = \beta P_m(f) + \alpha \hat{S}^{m-1}(f)$

qui est bien la formule de définition initiale.

3) Variance.

On aura $\mathrm{Var}\left[\hat{S}^m(f)\right] = E\left[\left(\hat{S}^m(f) - E\left[\hat{S}^m(f)\right]\right)^2\right]$

on a vu que si $\beta = 1-\alpha$ alors $E\left[\hat{S}^m(f)\right] = \bar{S}$

Alors $\hat{S}^m(f) - \bar{S} = \beta \sum \alpha^k P_{m-k}(f) - \bar{S}$

On note que $\beta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\beta}{1-\alpha} = 1$

d'où $\hat{S}^m(f) - \bar{S} = \beta \sum_k \alpha^k \left(P_{m-k}(f) - \bar{S}\right)$

et $\left(\hat{S}(f) - \bar{S}\right)^2 = \beta^2 \sum_k \sum_{k'} \alpha^{2k} \left(P_{m-k}(f) - \bar{S}\right)\left(P_{m-k'} - \bar{S}\right)$

En prenant l'espérance et en utilisant

$$E\left[(P_{m-k} - \bar{S})(P_{m-k'} - \bar{S})\right] = \mathrm{Var}[P]\, \delta(k-k')$$

décorrélation entre segments,

il reste $E\left[(\hat{S} - \bar{S})^2\right] = \beta^2 \sum_k \alpha^{2k} \mathrm{Var}[P]$

$$= \frac{\beta^2}{1-\alpha^2} \mathrm{Var}[P] = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2} \mathrm{Var}[P]$$ □