

EXAMEN DE COMMUNICATIONS NUMÉRIQUES I

Durée : 2 heures

Tous documents autorisés.

Cet examen est long. Il en sera tenu compte dans la notation. La plupart des questions appellent une réponse extrêmement courte, et l'examen ne nécessite que très peu de calculs. Plusieurs solutions sont souvent possibles. L'argumentation sera concise et précise. Ne répondez pas à des questions qui ne sont pas posées. Ne vous bloquez pas sur une question : si tel est le cas, admettez ou posez un résultat (et signalez le !) et poursuivez.

I. Transmission PSK à deux états

On considère une modulation binaire PSK. La source binaire émet un bit tous les T_b . On choisit une fréquence porteuse à f_0 . Deux signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ sont utilisés pour représenter les symboles, chacun sur la durée T_b . L'énergie par bit est notée E_b ¹. Le canal est supposé idéal.

- 1) Donnez une expression possible de $s_0(t)$ et $s_1(t)$.
- 2) Afin d'assurer que chaque bit transmis, sur la durée T_b , contienne un nombre entier de périodes de la porteuse, comment faut-il choisir f_0 ?
- 3) On cherche à exprimer $s_0(t)$ et $s_1(t)$ sous la forme $s_0(t) = s_0 \phi(t)$ et $s_1(t) = s_1 \phi(t)$.
Quelle fonction de base $\phi(t)$ peut on choisir ? On vérifiera que cette fonction soit bien normée, et on donnera les valeurs de s_0 et s_1 correspondantes.
- 4) Proposez un schéma de l'émetteur. On posera que la source émet une suite binaire bipolaire NRZ, avec comme niveaux -1 et +1.
- 5) On considère maintenant la partie récepteur. Le récepteur est synchrone et cohérent. Le signal reçu est noté $r(t)$, et est constitué du signal émis ($s_0(t)$ ou $s_1(t)$), perturbé par un bruit blanc additif $b(t)$, centré et gaussien, de densité spectrale de puissance γ_0 . Donnez le test du rapport de vraisemblance à utiliser. Déduisez en la valeur du seuil.
- 6) Proposez un schéma du récepteur optimal.

¹ - L'énergie par bit E_b est définie comme l'intégrale du carré du signal sur la longueur T_b .

7) Afin d'augmenter le rapport signal-à-bruit en sortie, on veut placer des filtres adaptés à la sortie du canal. Donnez l'expression des réponses impulsionnelles des filtres adaptés à utiliser. Compte-tenu de ces expressions, montrer qu'il est possible de n'utiliser qu'un seul filtre adapté. Normalisez la réponse impulsionnelle de ce filtre à une puissance unité. Déduisez en un schéma de récepteur « à filtre adapté », que vous comparerez au récepteur optimal bayésien. Donnez les valeurs de la sortie du filtre adapté, au temps $t=T_b$, lorsque l'entrée est non bruitée. Que se passe-t-il lorsque l'on n'utilise pas une porteuse telle que l'on ait un nombre entier de périodes pendant la durée T_b ?

8) Donnez l'expression de la probabilité de fausse alarme, c'est-à-dire de la probabilité de décider un «1», alors qu'un «0» est présent.

9) Montrez qu'en jouant sur la valeur du seuil, on peut fixer la probabilité de fausse alarme, et que, réciproquement, à probabilité de fausse alarme fixée, on peut en déduire un seuil. Comment faut-il modifier les coûts pour diminuer la probabilité de fausse alarme (on rappelle que les probabilités symboles sont fixées, et on pourra prendre $C_{00}=C_{11}=0$) ?

II. Transmission PSK à quatre états

On considère maintenant une modulation de phase à 4 états (QPSK). Le canal est toujours idéal, et la source est toujours une source binaire, émettant au rythme d'un bit tous les T_b .

1) Donnez l'expression des signaux émis, $s_i(t)$, pour une QPSK. On normalisera à nouveau l'énergie par bit à E_b . Les signaux $s_i(t)$ seront définis sur une durée $T=2T_b$: pourquoi ?

2) Montrez que les signaux $s_i(t)$ peuvent être mis sous la forme

$$s_i(t) = a_i \cos(2\pi f_0 t) - b_i \sin(2\pi f_0 t),^2$$

et donnez les valeurs de a_i et b_i .

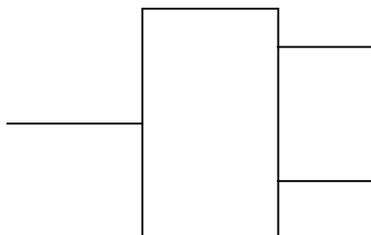
3) On utilise une base *orthonormée* constituée de deux fonctions $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$. Donnez deux fonctions $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ convenables. Ces fonctions de base étant choisies, donnez la décomposition des 4 signaux $s_i(t)$ sur cette base, sous la forme

$$s_i(t) = A_i \phi_1(t) + B_i \phi_2(t),$$

et sous la forme des vecteurs correspondants.

Représentez la constellation obtenue dans le plan $(\phi_1(t), \phi_2(t))$.

4) On utilise un démultiplexeur qui associe à une suite de deux bits (un « dibit ») deux sorties A_i et B_i , constantes sur une durée $2T_b$ (on considèrera que le démultiplexeur introduit « de lui-même » le facteur de gain adéquat)³



² - On pourra utiliser la relation trigonométrique $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

³ - Ce démultiplexeur introduit évidemment un retard de T_b entre le début d'un dibit en entrée et le basculement de la sortie aux niveaux A_i et B_i correspondants.

Proposez un schéma de l'émetteur.

5) Proposez un schéma de récepteur. Afin de recréer un train binaire, on utilisera un multiplexeur 2 voies vers 1 voie.

6) Le canal est maintenant à bande limitée. Le canal équivalent en bande de base est défini par $C(f) = 1$ si $f \in [-B, B]$, et 0 ailleurs. On rappelle que le taux d'émission *binaire* (en bits par seconde) est de $1/T_b$. Les données du problème sont ici telles que $2BT_b = BT = 1$.

Pour supprimer l'interférence entre symboles, on choisit d'introduire un filtre en cosinus ajusté surélevé (filtre de Nyquist) au niveau de l'émetteur. Quel facteur de *roll-off* β faut-il choisir, afin d'utiliser toute la bande ?

7) Plutôt qu'un niveau constant, on désire que la sortie du démultiplexeur d'entrée soit formé d'impulsions étroites. Quel filtre peut-on introduire afin de transformer la suite des créneaux de largeur $2T_b$ délivrés en sortie du démultiplexeur en une suite d'impulsions étroites ? On donnera la caractéristique spectrale de ce filtre, et on ne se préoccupera pas de sa réalisation.

8) Modifier le schéma de l'émetteur pour tenir compte de l'introduction de ce dernier filtre et d'un filtre de Nyquist en cosinus ajusté surélevé.

9) Quel peut-être l'intérêt de séparer le filtre de Nyquist en deux filtres, en racine de Nyquist, l'un placé dans l'émetteur, le second dans le récepteur. Proposez un schéma de récepteur incluant un tel filtre en racine de Nyquist.

10) Décrivez, *en quelques phrases*, une méthode de récupération de rythme qui permette de récupérer le rythme $2T_b$. Est-il possible de recréer le rythme à T_b ?

11) Le canal réel (en bande de base) peut en réalité être approché par la fonction de transfert en z $C(z) = 1/(1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2})$. Donnez la fonction de transfert en z $E(z)$ d'un égaliseur qui permette de compenser ce canal.⁴ Donnez l'équation aux différences correspondante, et un schéma d'implantation. Où faut-il placer cet égaliseur dans le récepteur ?

⁴ - Cette question ne requiert *aucun* calcul.