Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris —————— E.S.I.E.E.	Unité : ST-TDS2 Matière : Filtrage adaptatif Date : 20 avril 2000	Classe I4 TTS

SUJET À TRAITER – AVEC DOCUMENTS. ***Tous documents autorisés***

Durée : UNE HEURE — Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Exercice : Le problème de Badeuil[1]

Le problème est le suivant : on cherche à calculer la division d'une séquence $s(n)$ par un certain nombre K, sur un processeur pour lequel, compte tenu de l'application visée, le coût d'une division, et a fortiori d'une série de divisions, serait prohibitif. On cherche donc à réduire la charge en calcul en adoptant une démarche itérative. On considère les deux systèmes suivants :

1. Comme toujours, on cherche à minimiser, en un certain sens, l'erreur $\epsilon(n)$.
   (a) Analysez, sans calcul, les systèmes précédents. Que devrait être la valeur $\overset{\triangle}{w}$ de w après minimisation ? Quelle sera l'erreur correspondante ?
   (b) Pourquoi les deux systèmes précédents sont ils équivalents, du point de vue de la sortie $y(n)$?
   (c) Quel est l'intérêt du second système pour le problème de Badeuil ?
2. Dans la suite, vous pourrez raisonner sur le système de votre choix, puisque ces deux systèmes conduisent aux mêmes équations et au même résultat pour w. Le premier permet simplement de se raccrocher directement aux relations établies en cours, si nécessaire.
   (a) On choisit de minimiser l'erreur quadratique moyenne $J = \mathrm{E}\left\{\epsilon(n)^2\right\}$. Écrivez les équations du filtre de Wiener correspondant et calculez la solution correspondante $\overset{\triangle}{w}$. Vous pourrez poser $u(n) = Ks(n)$ et $\sigma_s^2 = \mathrm{E}\left\{s(n)^2\right\}$.
   (b) Écrivez l'algorithme du gradient qui résoud le problème de Badeuil. Vous choisirez de noter μ le pas d'adaptation, comme de coutume.

[1] Cet exercice est issu de réflexions suite à l'une des nombreuses questions et remarques de Thierry Badeuil, Esiee 2000.

(c) Proposez une version stochastique, de type LMS, de l'algorithme précédent.

3. On cherche maintenant à étudier les propriétés de convergence de l'algorithme du gradient établi en 2b.
   (a) Soit $w(0)$ la condition initiale. Résolvez récursivement l'algorithme afin de donner l'expression de $w(n)$ en fonction de $w(0)$ et de deux constantes A et B valant respectivement $A = 1 - \mu K^2 \sigma_s^2$ et $B = \mu K \sigma_s^2$. Vous pourrez utiliser avec profit la somme d'une suite géométrique :
   $$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
   (b) À quelle condition sur μ cet algorithme converge t'il ? Comparez ce résultat au résultat général sur l'algorithme du gradient.
   (c) Lorsque la condition précédente est remplie et que l'algorithme converge, que vaut $\lim_{n \to +\infty} w(n)$?
   (d) Quelle est la meilleure initialisation possible $w(0)$? Pourquoi ? Est-elle raisonnable dans le problème considéré ?
   (e) À partir de l'expression de A, donnez la valeur optimale du pas d'adaptation μ_{opt}, au sens de la rapidité de convergence. En combien d'itérations l'algorithme converge t'il alors ? Comparez la valeur obtenue pour μ_{opt} au résultat général sur l'algorithme du gradient.
4. En supposant que $w(n)$ et $s(n)$ sont décorrélés, quelle est la trajectoire moyenne de l'algorithme stochastique donné en 2c ? À quelle condition sur $s(n)$ l'hypothèse de décorrélation précédente est-elle vraie ?
5. Le problème de Badeuil est en fait lié à l'implantation efficace d'un algorithme de type LMS, où le pas d'adaptation μ est divisé par la puissance moyenne $P_u = \mathrm{E}\left\{u(n)^2\right\}$ de la séquence d'entrée. Sa forme générique est la suivante
   $$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1) = \hat{\boldsymbol{w}}(n) + \frac{\mu}{pP_u}\boldsymbol{u}(n)e(n),$$
   avec p la dimension du filtre. Au total, on doit donc effectuer la division d'une séquence $z(n) = \mu\boldsymbol{u}(n)e(n)$ par P_u. En pratique, il faut donc estimer la puissance moyenne P_u, éventuellement en environnement non stationnaire. On pose
   $$E(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u(k)^2$$
   (a) Montrez que $E(n)$ est un estimateur non biaisé de P_u.
   (b) Proposez une formulation récursive de cet estimateur, permettant de calculer $E(n)$ en fonction de $E(n-1)$.

   On introduit un « facteur d'oubli λ » en prenant maintenant
   $$E(n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} u(k)^2.$$
   (a) Quel est l'intérêt éventuel de ce facteur d'oubli ?
   (b) Proposez une formulation récursive de cet estimateur, permettant de calculer $E(n)$ en fonction de $E(n-1)$.
   (c) Quelle condition doit vérifier λ afin que l'estimateur soit non biaisé ?