

# Introduction aux ondelettes (wavelets)

Concepts généraux de la  
théorie des ondelettes.

Tarik AL ANI  
Département Informatique et Télécommunication (IT)  
ESIEE-Paris  
E-mail : [tarik.alani@esiee.fr](mailto:tarik.alani@esiee.fr)  
Url: <http://www.esiee.fr/~alanit>



Jean-Désiré-Gustave Courbet : La Vague - D'Ingres à van Gogh - Musée Oskar Reinhart "Am Römerholz« (1870)

# Plan

## 0. Concepts fondamentaux

### 1. Transformée de Fourier et Transformée de Fourier fenêtrée (STFT)

### 2. Transformée en Ondelette Continue (Continuous Wavelet Transform)

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les *séries d'ondelettes*

### 4. Transformée en Ondelette Discrète (Discrete Wavelet Transform) basée sur l'analyse multirésolution

### 5. Domaines d'application

### 6. Histoire de l'ondelette

### 7. Références

# Acknowledgement

Thanks to Robi POLIKAR for his excellent tutorial  
(<http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>)  
which is adapted as a main support to this course.

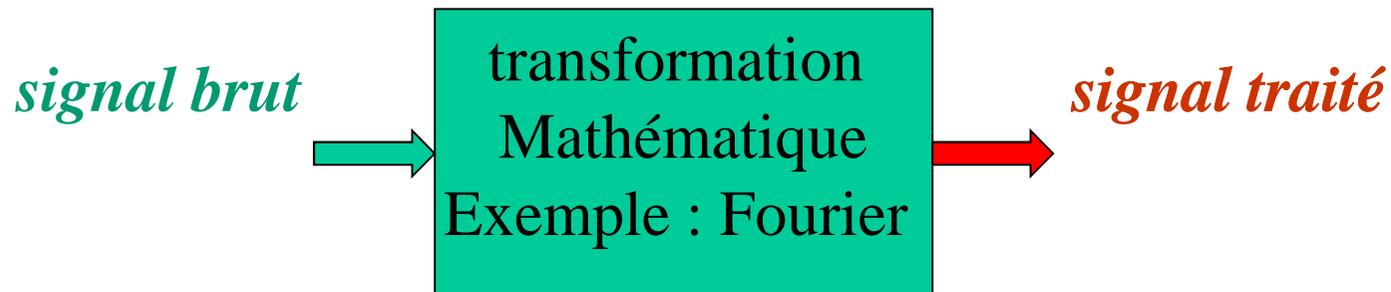
This course is based on his tutorial, it does not pretend to be an  
accurate reflection.

# 0. CONCEPTS FONDAMENTAUX

## *POURQUOI TRANSFORMATION?*

D'abord, pourquoi a-t-on besoin des transformées? Qu'est-ce donc qu'une transformée ?

Les transformations mathématiques sont appliquées aux signaux bruts pour obtenir davantage d'informations qui sont disponibles dans ces signaux.



En pratique, la plupart des signaux, sous leur format brut, sont représentés dans le domaine temporel. La représentation du signal est une représentation *temps - amplitude*.

Cette représentation n'est pas toujours la meilleure pour tous les applications en traitement du signal. Dans beaucoup de cas, l'information la plus pertinente est cachée dans la composante de fréquence du signal. Le **SPECTRE de fréquence** d'un signal est constitué par les composantes de fréquence de ce signal.

Intuitivement, nous savons que la fréquence est liée au régime de changement d'une variable physique ou mathématique. Cette variable peut

- changer **rapidement** : changement à **haute fréquence**,
- changer **lentement** : changement à **basse fréquence**, et
- **ne pas changer** du tout : **fréquence zéro**.

Comment allons-nous mesurer la fréquence, comment allons-nous trouver le contenu en fréquences d'un signal ? La réponse c'est la **TRANSFORMÉE de FOURIER (TF)**. Si on effectue la TF d'un signal représenté dans le domaine temporel, on obtient la représentation fréquence – amplitude de ce signal.

# *Transformée de Fourier (TF)*



Jean B. Joseph Fourier  
(1768-1830)

*“Une fonction arbitraire, continue ou avec des discontinuités, définie dans un intervalle fini par un graphique arbitrairement capricieux peut toujours être exprimé comme somme de sinusoides”*

*J.B.J. Fourier*

En 1822, le mathématicien français J. Fourier, ait prouvé que n'importe quelle fonction périodique peut être exprimée comme une somme infinie de fonctions exponentielles complexes et périodiques. Beaucoup d'années après qu'il ait découvert cette propriété remarquable des fonctions continues périodiques, ses idées ont été généralisées à de fonctions continues non-périodiques, puis à des fonctions discrètes périodiques ou non-périodiques dans le temps.

Après cette généralisation, la TF est devenue un outil très approprié pour des calculs par ordinateur. En 1965, un nouvel algorithme appelé la *Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform) (FFT)* a été développée.

Transformées de Fourier Directe à Temps Continu (Direct Continuous Time Fourier Transform (DCTFT)) et Transformées de Fourier Inverse à Temps Continu (Inverse Continuous Time Fourier Transform (ICTFT)) (ICTFT)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1), \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (2)$$

**Interprétation de l'équation (1) :**

Le signal  $x(t)$ , multiplié avec un terme exponentiel, à une certaine fréquence «  $f$  », qui peut être écrit comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \cos(2\pi f t) + j \sin(2\pi f t) \\ \leftarrow \text{réel} \quad \quad \quad \leftarrow \text{imaginaire} \end{array}$$

Ce terme est ensuite intégré (additionner tous les termes de produit) sur **TOUS LE TEMPS**.

- Si le résultat de cette intégration est une grande valeur, alors le signal  $x(t)$  a une composante spectrale dominante à la fréquence «  $f$  ». Ceci signifie que la majorité de ce signal est composée de la fréquence «  $f$  ».
- Si le résultat de cette intégration est une petite valeur, le signal  $x(t)$  n'a pas de composante spectrale dominante «  $f$  ».
- Si ce résultat est nul, alors le signal ne contient pas du tout la fréquence «  $f$  ».

## Comment marche cette intégration ?

Le signal est multiplié avec le terme sinusoidale de fréquence "f". Si le signal a une composante de fréquence « f » d'amplitude élevée, alors cette composante et le terme sinusoidale coïncideront, et leur produit donnera (relativement) une grande valeur. Ceci montre que le signal possède une fréquence majoritaire en « f ».

Cependant, si le signal n'a pas une composante de fréquence de « f », le produit sera zéro, i.e., le signal n'a pas une composante de fréquence de « f ». Si la fréquence « f », n'est pas une composante importante du signal « x(t) », alors le produit donnera (relativement) une petite valeur. Ceci signifie que, la composante de fréquence « f » dans le signal « x », a une petite amplitude, c'est-à-dire, elle n'est pas une composante important de « x ».

L'information fourni par l'intégrale, correspond à tous les instants de temps, puisque l'intégration est de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ . A n'importe quel instant du temps la composante avec la fréquence « f » apparaît, elle affectera de la même façon le résultat de l'intégration. Autrement dit, si la composante « f » de fréquence apparaît au temps T1 ou au temps T2, il y aura le même effet sur l'intégration.

C'est pourquoi la transformée de Fourier n'est pas appropriée si le signal a une fréquence variable dans le temps (*non stationnaire*). Presque tous les signaux biologiques, sont non stationnaires.

Si le signal a uniquement une composante de fréquence « f » à tout moment (pour toutes les valeurs de « f » (*stationnaire*)), alors le résultat obtenu par la transformée de Fourier a un sens.

Notez que la transformée de Fourier indique, qu'une certaine composante de fréquence existe ou pas. Cette information est indépendante de celle qui cherche où dans le temps cette composante apparaît. Il est donc très important de savoir si un signal est stationnaire ou pas, avant de le traiter avec la FT.

0. Concepts fondamentaux

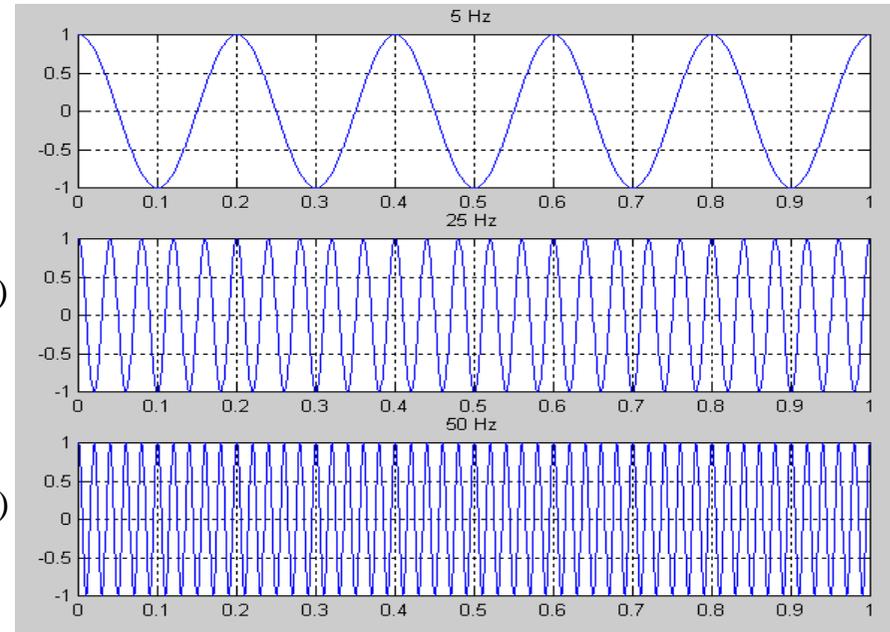
**Exemple 1**

**Fig. 1a [1]**

$$x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t)$$

$$x_3(t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

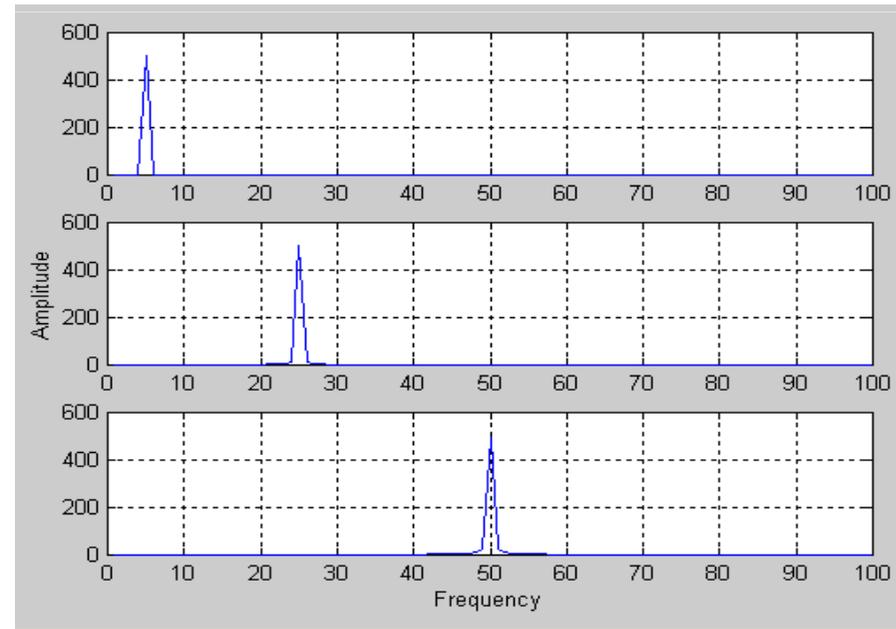


**Fig. 1b [1]**

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$$

$$x_3(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_3(\omega)$$



## **Pourquoi avons-nous besoin des informations en fréquence ?**

Souvent, l'information qui ne peut pas être distinguée dans le domaine temporel pourrait être facilement visible dans le domaine fréquentiel.

Prenons un exemple dans le secteur des signaux biologiques et supposons que nous observions un signal d'Électrocardiographie (ECG). La forme typique du signal ECG d'un cœur sain est bien connue des cardiologues, tout écart avec cette forme est considéré comme le symptôme d'une possible pathologie.

Ce signe de pathologie, cependant, n'est pas toujours très évident dans le signal temporel brut. Pour analyser les ECG, la majorité de cardiologues utilisent jusqu'à présent les enregistrements (sur des bandes de papiers) de ces signaux dans le domaine temporel.

Récemment, les nouveaux analyseurs ECG informatisés utilisent l'information de fréquence pour décider de l'existence d'une pathologie. Un symptôme de maladie peut parfois être mieux diagnostiqué quand on analyse les composantes fréquentielles du signal.

## Limitations de la Transformée de Fourier

Malgré son immense succès pour analyser les signaux linéaires et stationnaires, cette technique a plusieurs limitations en pratique, en particulier son manque évident de **localisation temporelle**.

La TF, est une transformation réversible entre le signal brut et le signal traité (transformé). Cependant, seulement l'un des deux est disponible à un instant donné. Aucune information de fréquence n'est disponible dans le domaine temporel et aucune information temporelle n'est disponible fréquentiel du signal.

En effet, l'analyse de Fourier permet de connaître les différentes fréquences existantes dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises. Cette analyse donne une **information globale** et non locale, car les fonctions d'analyse utilisées sont des sinusoides qui oscillent indéfiniment sans s'amortir.

Cette perte de localité n'est pas un inconvénient pour analyser des signaux dont la structure n'évolue pas ou peu (statistiquement stationnaires), mais devient un problème pour l'étude de signaux non stationnaires.

L'analyse de Fourier ne permet pas l'étude de signaux dont la **fréquence varie dans le temps**.

De tels signaux nécessitent la mise en place d'une analyse **temps-fréquence** qui permettra une localisation des périodicités dans le temps et indiquera donc si la période varie d'une façon continue, si elle disparaît puis réapparaît par la suite, etc.

## Signaux stationnaires

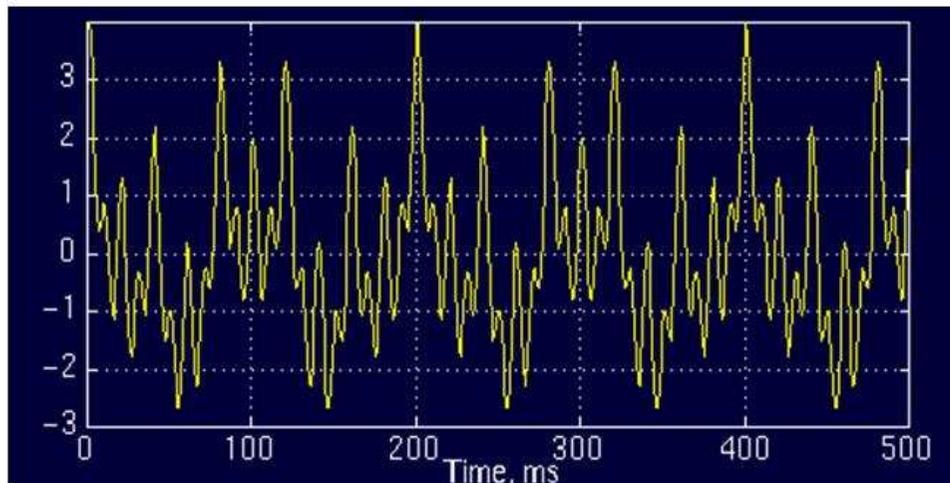
Ce sont les signaux dont le contenu en fréquence ne change pas au cours du temps. Autrement dit, la composition en fréquences des signaux stationnaires est indépendante du temps. Dans ce cas, nous n'avons pas besoin de connaître à **quels instants ces composantes de fréquence existent : ces composantes en fréquence existent tout le temps !**

## Exemple 2a un signal stationnaire

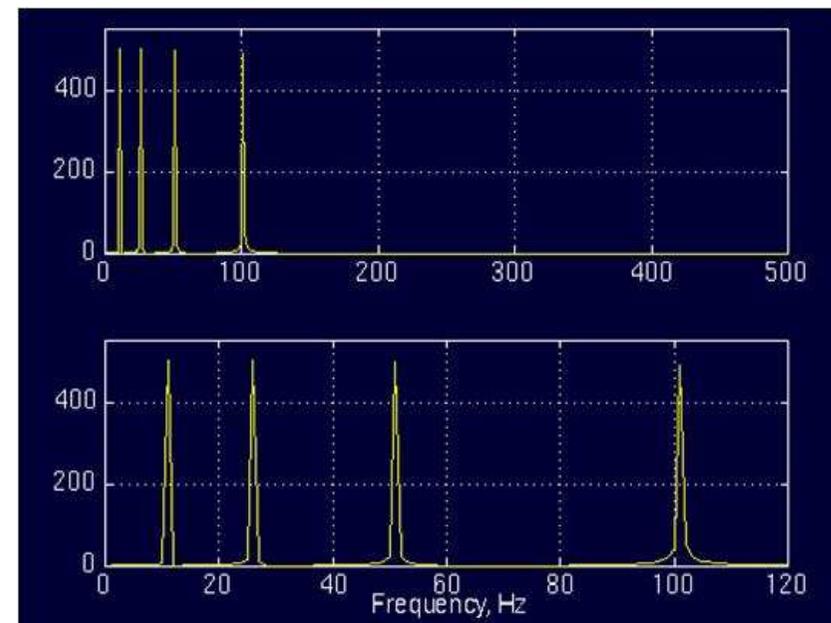
$$x(t) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t)$$

est un signal stationnaire car il présente des composantes de fréquence à 10, 25, 50 et 100 Hz à tout instant.



a. Le signal  $x(t)$  dans le domaine temporel (ms) [1]



b. TF discret (TFD). Moitié de spectre montrant l'intervalle des fréquences [1].

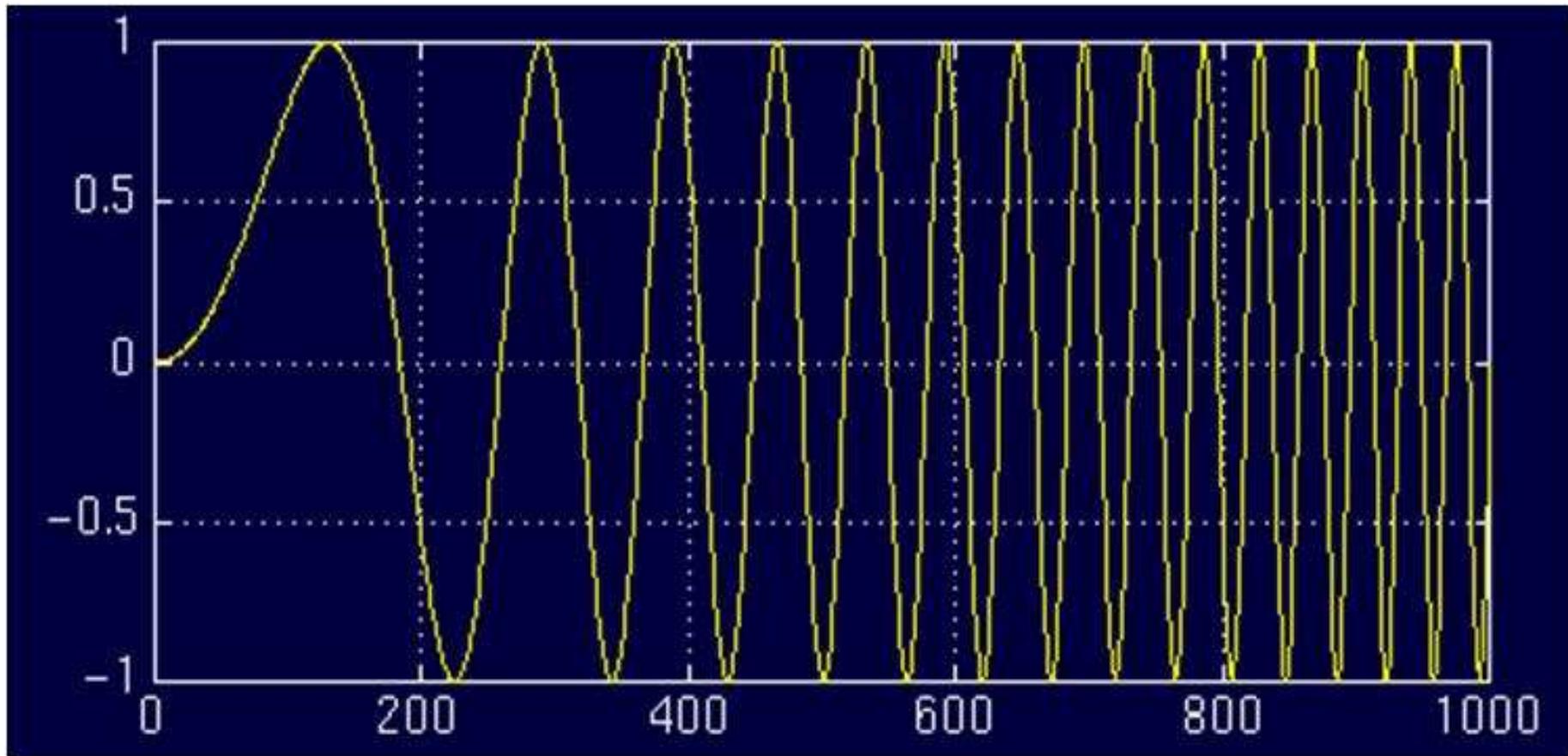
**Fig. 2a** [1]

En fig. 2b, l'axe de fréquence a été coupé, mais théoriquement il se prolonge à l'infini (pour la transformée de Fourier continue (TFC)).

En fait, ici nous calculons la transformée de Fourier discrète (TFD), dans ce cas l'axe de fréquence va jusqu'à (au moins) deux fois la fréquence d'échantillonnage du signal, et le signal transformé est symétrique en  $f$ )

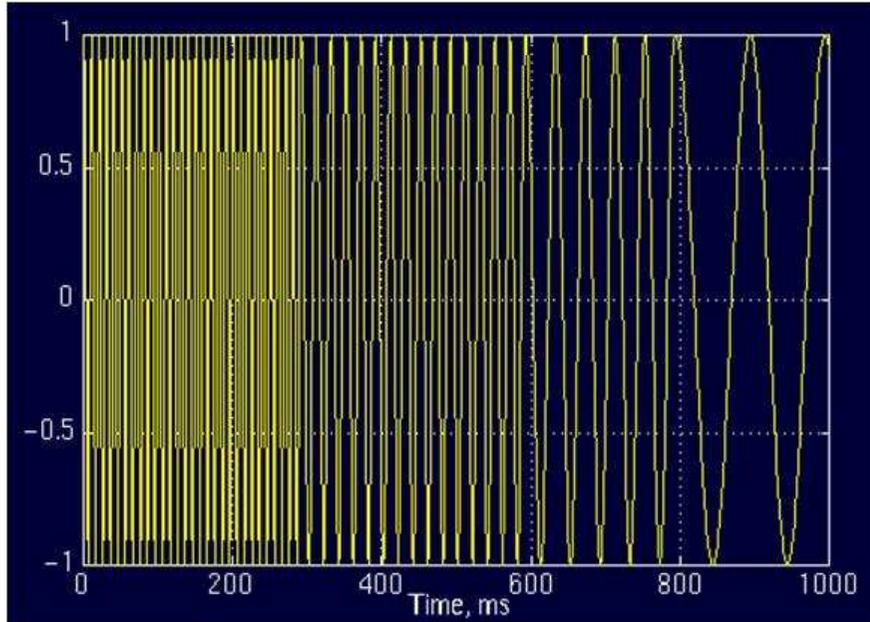
## **Exemple 2b un signal non stationnaire**

Gazouillis (chirp) : la fréquence change constamment dans le temps [1].



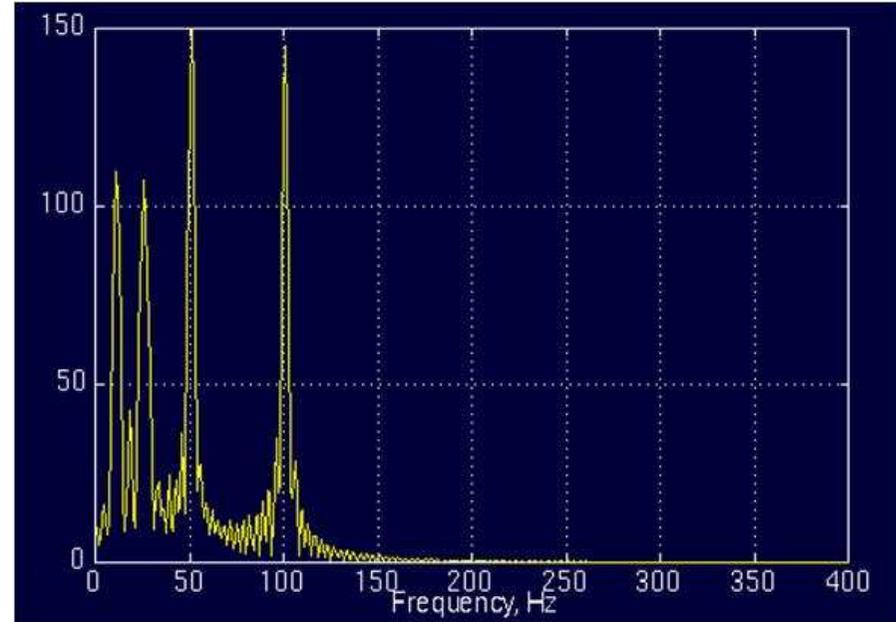
**Fig. 2b [1]**

## Exemple 3 signal non stationnaire



a. Sur l'intervalle 0-100 ms, c'est une sinusoïde à 100Hz, sur l'intervalle 300-600 ms c'est une sinusoïde à 50 Hz, sur l'intervalle 600-800 ms c'est une sinusoïde à 25 Hz et, sur l'intervalle 800-1000 ms c'est une sinusoïde à 10 Hz [1].

**Fig. 3 [1]**

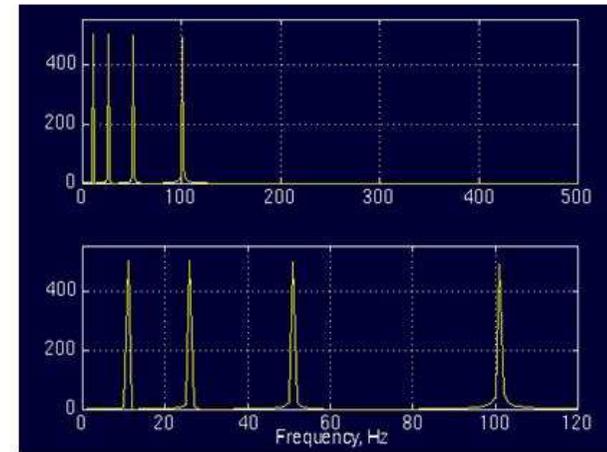
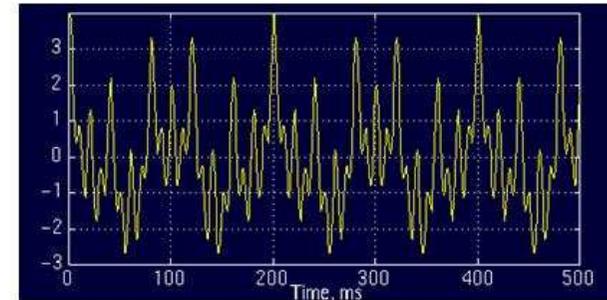


b. TFD. Remarquez que les amplitudes des composantes de fréquence les plus élevées sont plus grandes que les amplitudes des composantes de fréquence les plus basses. Ceci est dû au fait que les fréquences les plus élevées durent plus longtemps (300 ms chacune) que les fréquences les plus basses (200 ms chacune) [1].

## Remarques importante concernant les signaux représentés en Figures 1-3

- Question concernant le signal de la Figure 2a : A quels instants, ces composantes de fréquence arrivent-elles ?

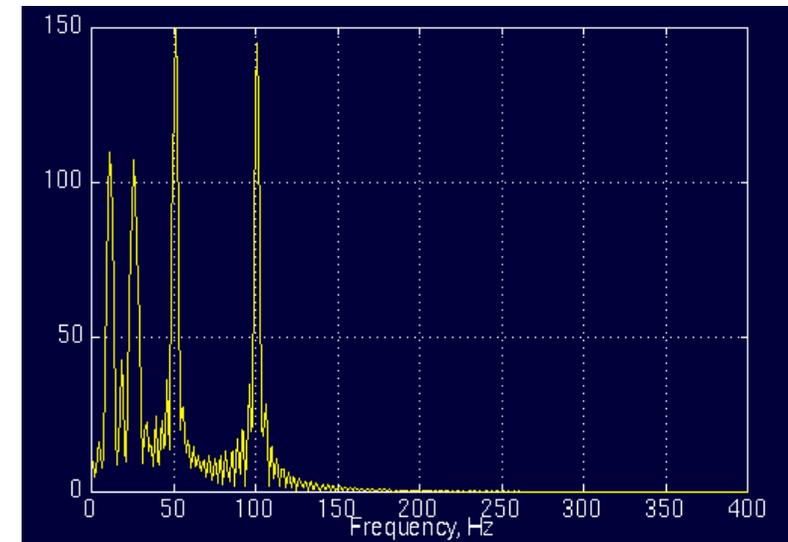
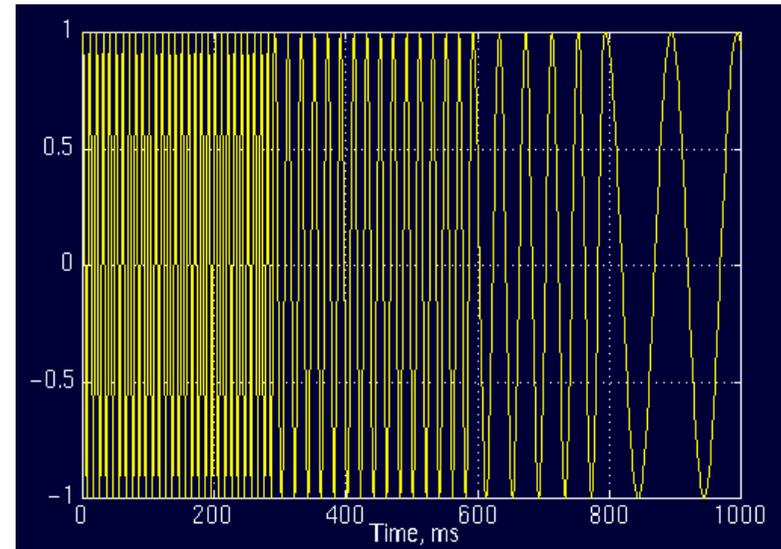
Réponse : Tout le temps ! Rappelons-nous que pour les signaux stationnaires, toutes les composantes de fréquence qui existent dans le signal, existent pour toute la durée du signal. Il y a 10 Hz, tout le temps, il y a 25 Hz, tout le temps, il y a 50 Hz, tout le temps.



## 0. Concepts fondamentaux

- Question pour le signal non stationnaire de la Figure 3 : A quels instants ces composantes de fréquence existent-elles ?

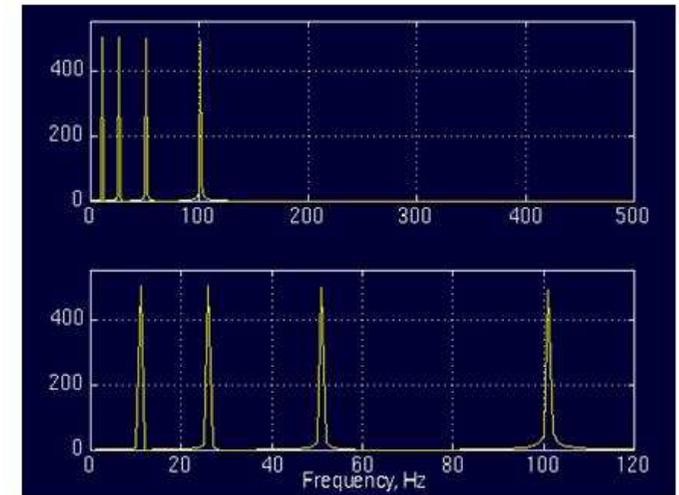
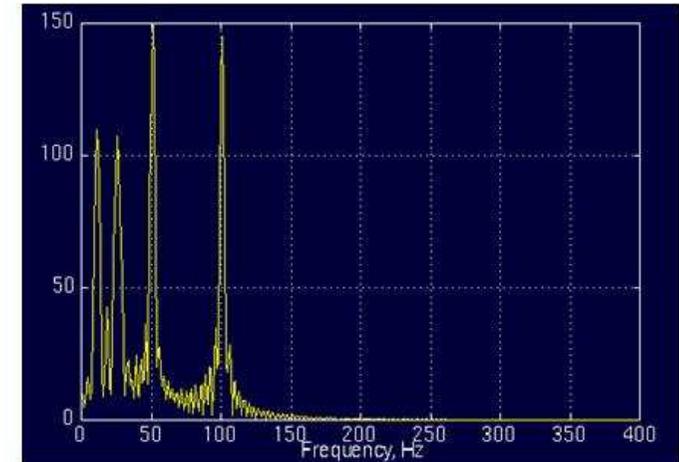
Dans le premier intervalle nous avons la composante de plus haute fréquence et dans le dernier intervalle la composante de plus basse fréquence. Ainsi, pour ces signaux, les composantes de fréquence n'apparaissent pas en permanence.



## 0. Concepts fondamentaux

Comparez alors les Figures 2.b et 3.b. La similitude de ces deux spectres est apparente. Ils indiquent tous les deux quatre composantes spectrales pour exactement les mêmes fréquences : 10, 25, 50 et 100 Hz.

En dehors des ridules (qui peuvent être filtrés) et des différences d'amplitudes, les deux spectres sont presque identiques alors que les signaux correspondants, dans le domaine temporel n'ont aucune ressemblance entre eux. Les deux signaux mettent en jeu les mêmes composantes de fréquence, mais le premier présente ces composantes en permanence alors que le second ne les présente que sur des intervalles de temps différents.



- Alors, comment deux signaux, entièrement différents, puissent présenter des spectres aussi semblables ? Rappelons-nous que la TF fournit le contenu spectral du signal mais ne donne aucune information quant aux instants auxquels ces composantes spectrales apparaissent.

- La TF n'est donc pas l'outil adéquat pour les signaux non stationnaires, à une exception : La TF peut être utilisée pour les signaux non stationnaires si on ne s'intéresse qu'aux composantes spectrales qui existent dans le signal et non aux instant où elles apparaissent.

Si on veut savoir quelles composantes spectrales apparaissent et à quels instants, alors la TF n'est pas la transformée à utiliser.

Souvent, **les instants ou les intervalles du temps** auxquels **une composante spectrale particulière** apparaît sont d'un grand intérêt. Dans ces cas, il est très important de connaître les intervalles de temps d'apparition de cette composante. Par exemple, en EEG, la **latence** d'un potentiel lié à un événement est un paramètre essentiel (le potentiel lié à un événement est la réponse du cerveau à un stimulus spécifique, une lampe flash par exemple, la latence de cette réponse est l'intervalle de temps écoulé entre l'apparition du stimulus et la réponse).

Quand nous avons besoin de localiser dans le temps des composantes spectrales, on pourrait utiliser une parmi les méthodes suivantes :

- la **Transformée de Fourier fenêtrée** (*Short Time Fourier Transform* (**STFT**)),
- la **Distribution de Wigner** (*Wigner Distribution* (**WD**)),
- la **Transformée en Ondelettes** (*Wavelet Transform* (**WT**)).

# LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES

En 1982, Morlet ouvre la voie conduisant à la solution en construisant la *Transformée en Ondelettes* (*Wavelet Transform* (*WT*)).



**Jean Morlet** (né à Fontenay-sous-Bois le 13 janvier 1931, mort à Nice le 27 avril 2007), ancien élève de l'École polytechnique (X1952), est un géophysicien français qui a été le pionnier dans le domaine de l'analyse des ondelettes en collaboration avec Alex Grossmann. Morlet a inventé le mot « ondelette » pour décrire des équations similaires à celles existant depuis environ les années 1930.

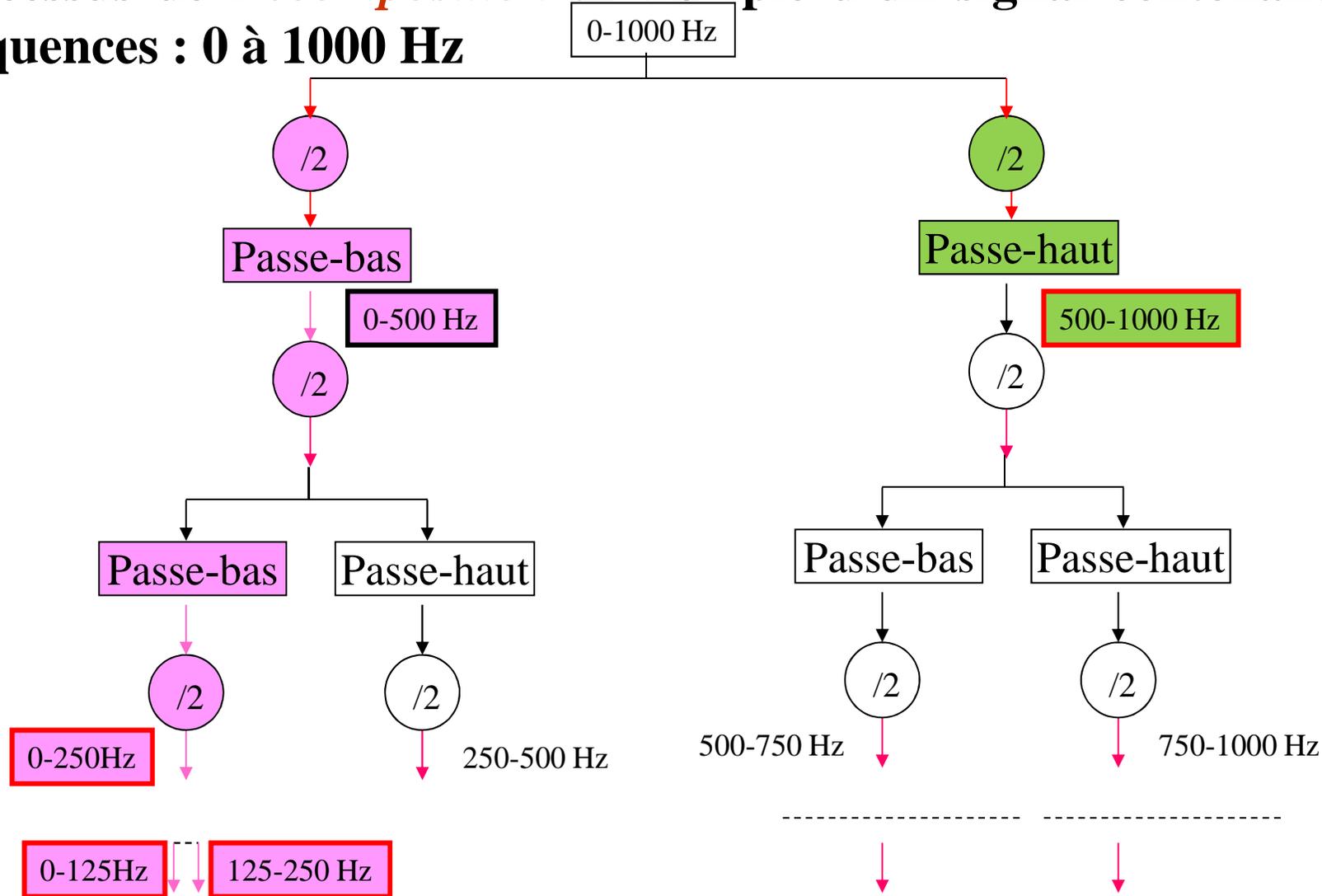
**Alex Grossmann** (1930-) est un physicien croate à l'Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II) au campus de Luminy

La WT a été développée pour pallier quelques défauts de résolution de la **Transformée de Fourier fenêtrée (Short Term Fourier Transform ( *STFT*))** (voir détails plus loin). Elle est capable de fournir une représentation simultanée temps – fréquence du signal.

Pour la méthode *STFT*, le signal temporel passe dans divers filtres passe haut et passe bas qui filtrent les parties hautes et basses fréquences du signal. Cette procédure est répétée, chaque fois une partie du signal, celle qui correspond aux fréquences filtrées est retirée du signal.

## 0. Concepts fondamentaux

Processus de *Décomposition* : Exemple d'un signal contenant des fréquences : 0 à 1000 Hz



En supposant que nous choisissons toujours la partie basse, nous avons alors 3 sous-ensembles de données qui dépendent du niveau de l'itération, ici **0-125**, **125-250** et **500-1000**.

## 0. Concepts fondamentaux

Nous disposons donc d'un ensemble de signaux qui représentent le même signal, mais chacun correspondant à différentes bandes de fréquences. Nous savons quel signal correspond à quelle bande de fréquence, et, si nous les rassemblons sur :

- un graphe 2D (temps-fréquence) de la valeur au carré de la STFT est appelé *spectrogramme*.
- ou un graphe 3D, nous aurons le temps sur un des axes, les fréquences sur le second et l'amplitude sur le troisième. Ce graphe montre donc quelles bande de fréquences existent dans un intervalle donné de temps.

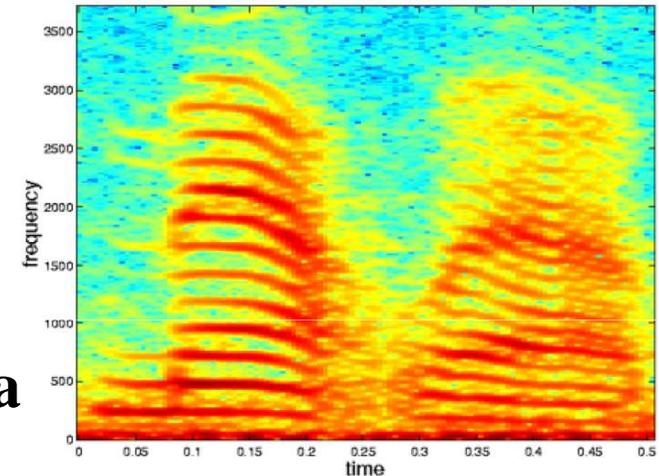


Fig. 4a

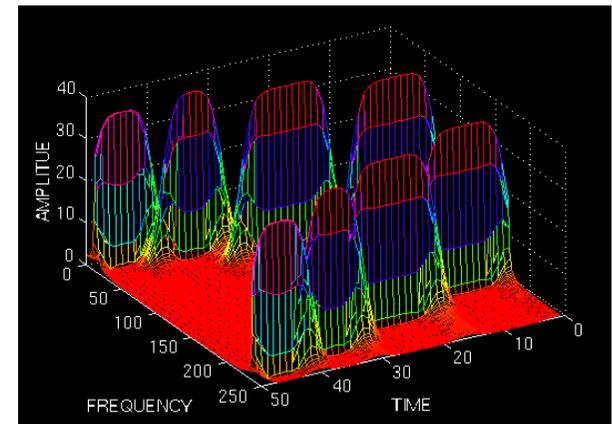


Fig. 4b [1]

Il y a cependant un problème appelé "*principe d'incertitude*" : on ne peut savoir exactement **quelle fréquence existe pour un instant donné** mais seulement **quelle bande de fréquence existe sur un intervalle de temps**. Ceci sera abordé plus en détail dans la suite de ce cours.

## Principe d'incertitude

Par analogie au principe des particules élémentaires de Heisenberg qui stipula que certaines paires de propriétés physiques, telles que la position et la quantité de mouvement d'une particule, ne peut pas être simultanément connus avec une précision arbitrairement grande, les informations de fréquence et de temps d'un signal en un certain point du plan temps-fréquence ne peuvent être simultanément connues.

## 0. Concepts fondamentaux

On ne peut savoir précisément quelle **composante spectrale** existe à **un instant donné**. Le mieux qu'on puisse faire est de chercher quelles **composantes spectrales** existent sur un **intervalle de temps** donné. C'est un problème de résolution et c'est la raison principale pour laquelle les chercheurs sont passés de la STFT à la WT.

En effet, la STFT donne une résolution fixe pour tous les instants de temps alors que la WT donne une résolution variable.

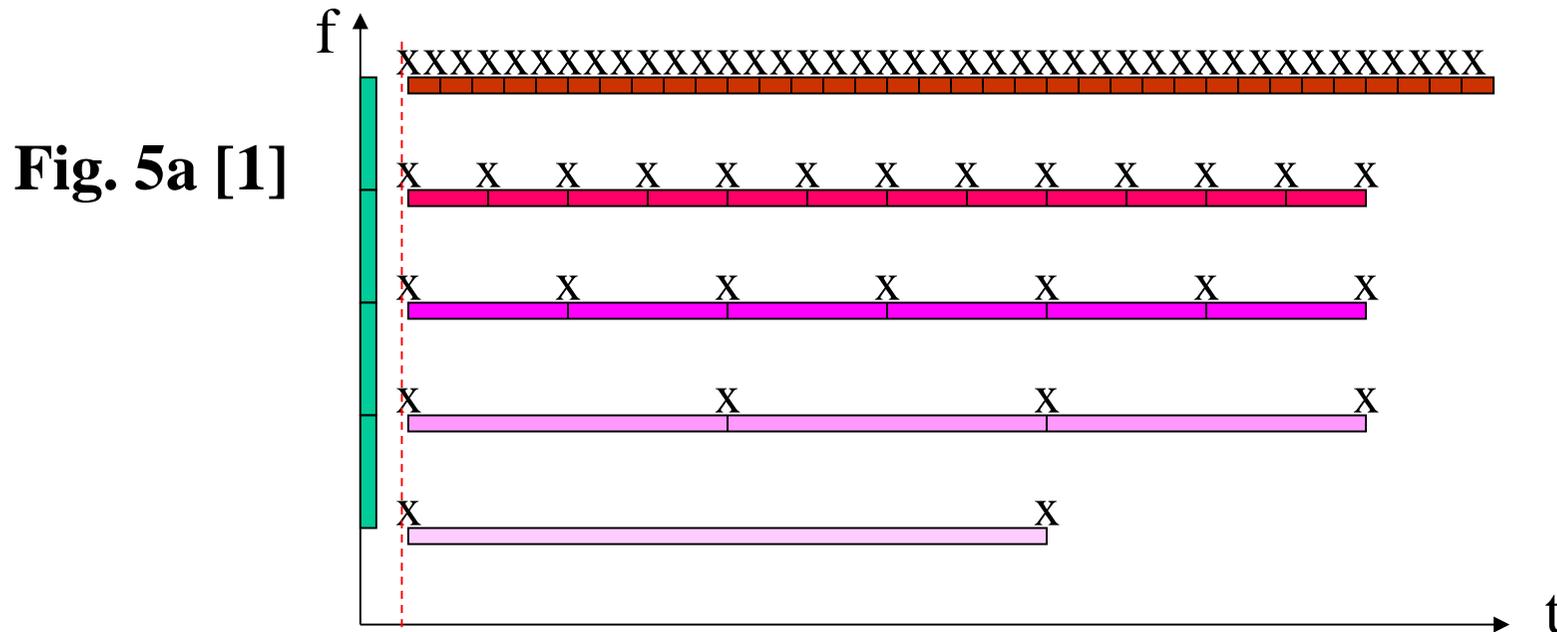
Les hautes fréquences ont meilleure résolution en temps et les basses fréquences ont meilleure résolution en fréquence. Ceci signifie, qu'aux hautes fréquences, les composantes sont mieux localisées en temps (moindre erreur relative) qu'aux basses fréquences. Au contraire, une composante de basse fréquence est mieux localisée en fréquence qu'une composante de haute fréquence.

*Transformée en ondelette continue*  
*(Continuous Wavelet Transform (CWT))* et  
*Transformée en ondelette discrète* (*Discrete*  
*Wavelet Transform (DWT)*)

La différence principale entre les deux est que la CWT fonctionne sur toutes les valeurs continues de la fréquence et du temps tandis que la DWT fonctionne sur un sous-ensemble spécifique défini sur l'ensemble de toutes les valeurs discrètes de la fréquence et du temps.

## Transformée en ondelettes continue

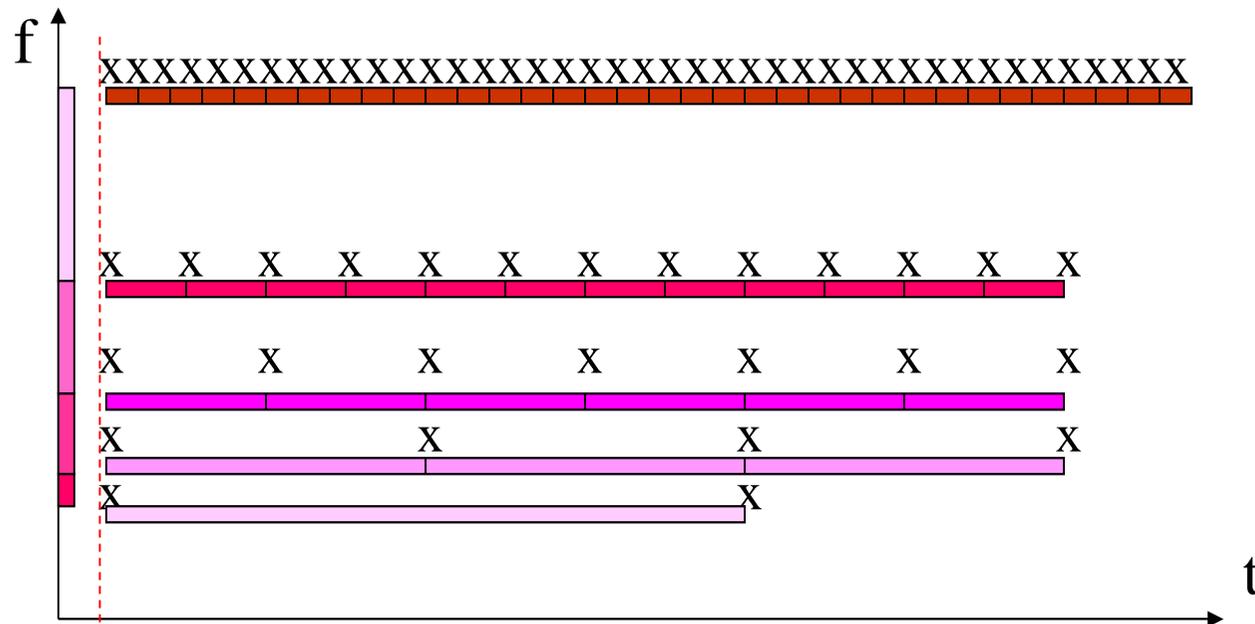
Considérons le schéma suivant



**Interprétation :** La ligne en haut montre qu'aux fréquences élevées, nous avons davantage d'échantillons correspondant à de plus petits intervalles de temps. En d'autres termes, les hautes fréquences sont mieux résolues en temps. La ligne du bas correspond aux basses fréquences, elle compte moins de points pour caractériser le signal, les basses fréquences sont donc moins bien résolues en temps.

## Transformée en ondelettes discrète

Fig. 5b [1]

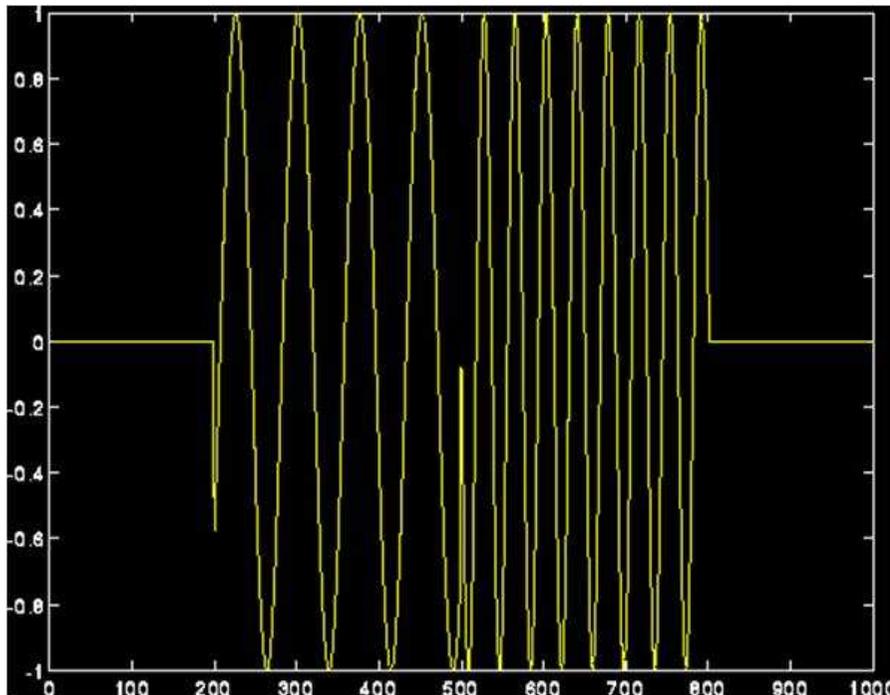


**Interprétation** : la résolution temporelle du signal est la même que celle définie dans le cas de temps continu, mais maintenant, les informations de fréquence ont également une résolution différente pour chaque niveau. Remarquez que les fréquences les plus basses ont une meilleure résolution en fréquences (plus de points sur le même intervalle) que les hautes fréquences. L'espace entre les points représentatifs augmente à mesure que la fréquence augmente.

## 0. Concepts fondamentaux

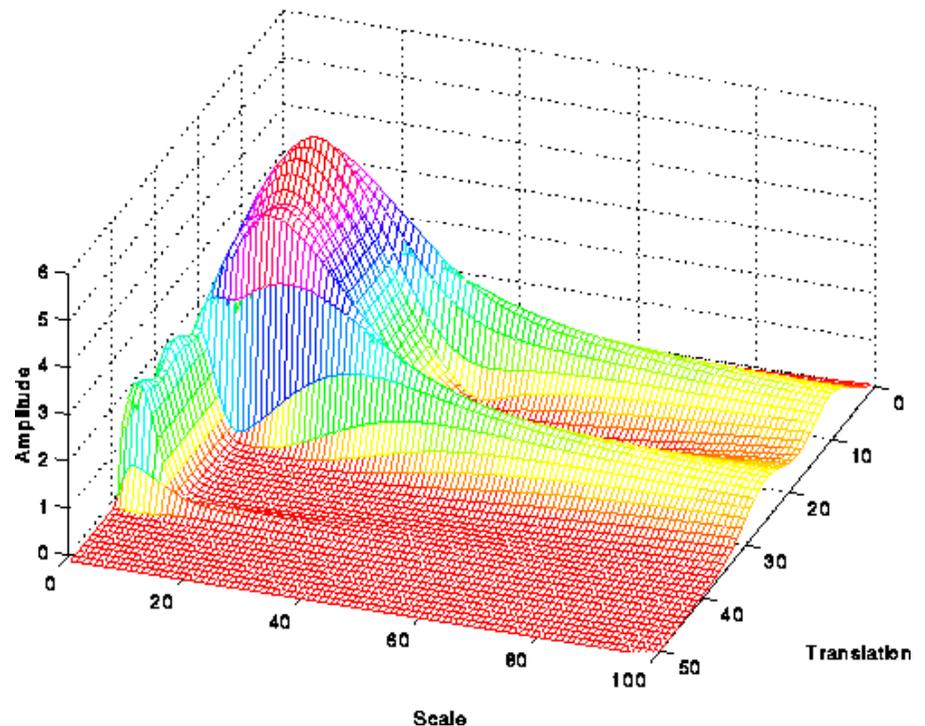
### Exemple 4 Transformées en ondelettes continue

Un signal sinusoïdal présentant deux différentes composantes de fréquence à des différents instants. Remarquez la partie basse fréquence d'abord puis la partie haute fréquence.



a. Signal non stationnaire

**Fig. 5 [1]**



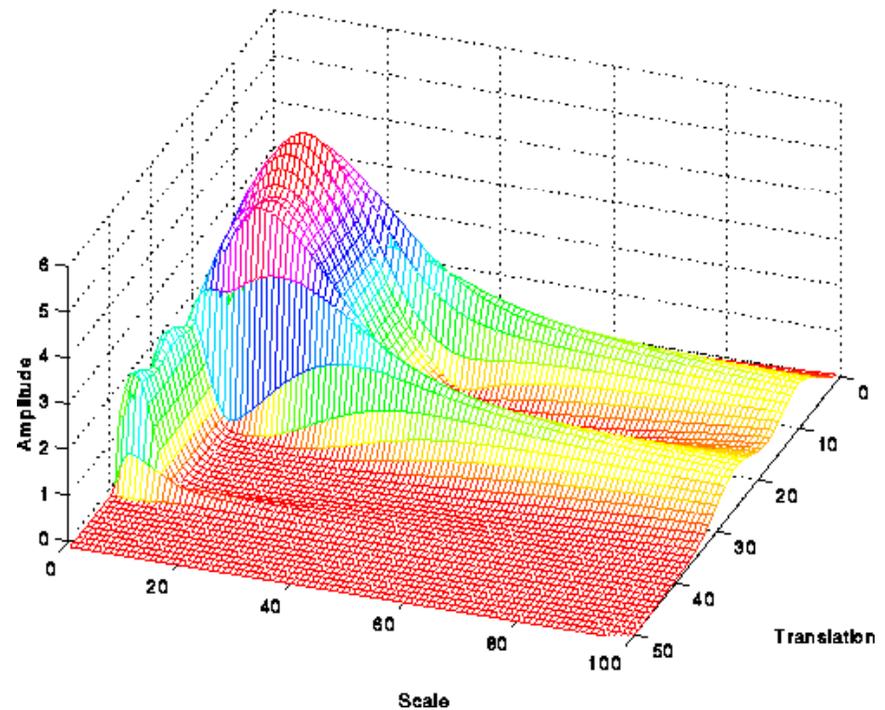
b. Transformée en ondelette continue

## 0. Concepts fondamentaux

### Exemple 4 (suite)

Notez que l'axe des fréquences de ce graphique porte l'indication "*scale*" (*échelle*). L'échelle est l'inverse de la fréquence.

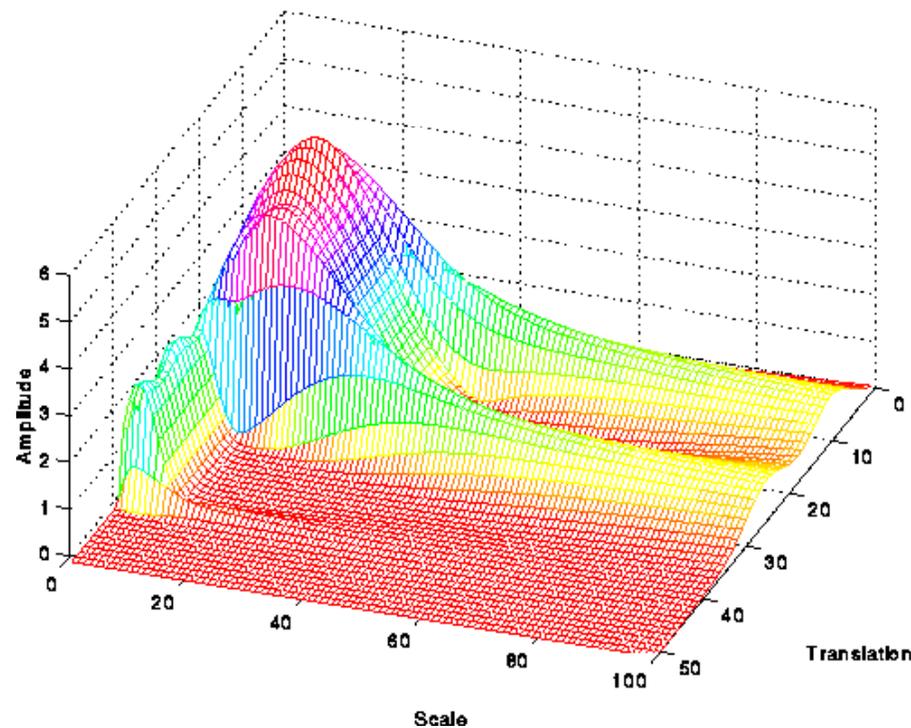
Les hautes échelles correspondent aux basses fréquences et les basses échelles correspondent aux hautes fréquences. En conséquence, le petit pic du graphique correspond à des composantes de hautes fréquences et le large pic correspond à des composantes de basses fréquences du signal (qui apparaissent dans le temps avant les composantes de hautes fréquences).



## 0. Concepts fondamentaux

### Exemple 4 (suite)

Ce même graphique montre une bonne résolution en fréquence pour les hautes fréquences (faible résolution en échelles), et une faible résolution en fréquence (bonne résolution en échelle).



# 1. Transformée de Fourier fenêtrée Short Term Fourier Transform (STFT)

## Question

Pouvons-nous supposer qu'une certaine partie d'un signal non stationnaire peut être considérée comme un signal stationnaire ?

## Réponse

Oui

L'exemple 2 montre 4 signaux stationnaires sur 4 différents intervalles du temps de 250 ms.

## 1. STFT

### Question

Que se passe-t-il si la partie que nous pouvons considérer comme stationnaire est très petite ?

### Réponse

Faire des *analyses locales* : Nous regardons ce signal par des fenêtres étroites, assez étroites tel que les parties du signal vu de ces fenêtres sont en effet stationnaires.

C'est l'idée de STFT (**Gabor 1946**).

**Dennis Gabor** (5 juin 1900 à Budapest, Hongrie - 8 février 1979 à Londres) était un physicien hongrois. Il est connu pour l'invention de l'holographie pour laquelle il a reçu le prix Nobel de physique de 1971<sup>1</sup>

## 1. STFT

Il y a seulement une différence mineure entre STFT et FT. Dans STFT, le signal est divisé en segments assez petits, où on peut supposer que ces segments (parties) du signal sont stationnaires. À cette fin, une fonction fenêtre «  $W$  » est choisie. **La largeur de cette fenêtre doit être égale au segment du signal où sa stationnarité est valide.**

## 1. STFT

### **La pondération appropriée de la fenêtre :**

Le produit entre le signal et la fenêtre glissante dépend de la pondération de la fenêtre choisie. Si la fenêtre est un rectangle, avec amplitude « 1 », alors le produit sera égale au signal.

## 1. STFT

### Transformées de Fourier Directe à Temps Discret (Direct Discrete Time Fourier Transform (DDTFT)) et Inverse (IDTFT)

Pour un signal échantillonné de **longueur infinie** avec une période  $T_e$

$$X_{T_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_e x[nT_e] e^{-j2\pi \frac{f}{f_e} n} \quad (3), \quad x[n] = T_e \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} X_{T_e}(f) e^{j2\pi \frac{f}{f_e} n} df \quad (4)$$

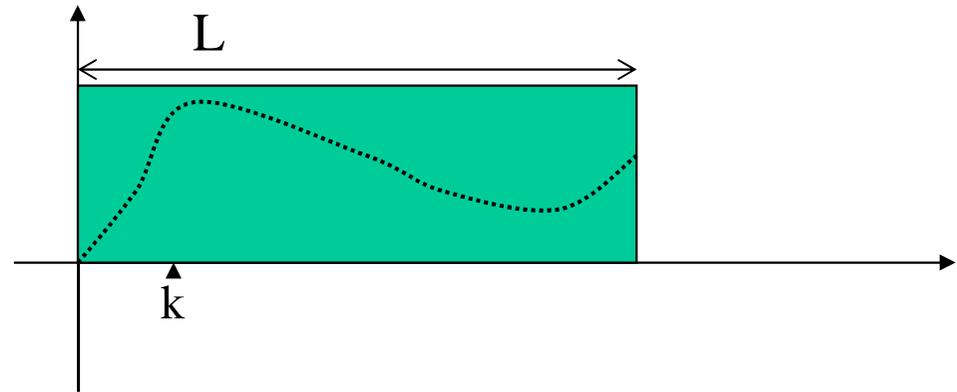
avec  $f_e = \frac{1}{T_e}$

Les intégrales couvrent une période complète du DTFT, ce qui signifie que les  $\{x[n]\}$  échantillons sont également les coefficients d'une expansion de série de Fourier du DTFT.

## 1. STFT

### Transformées de Fourier Discret Directe (Direct Discrete Fourier Transform (DDFT)) et Inverse (IDFT)

Dans la pratique nous avons un signal de **longueur finie**  $L$ , échantillonné avec une période  $T_e$ . Si nous utilisons une fenêtre de longueur finie  $L$  et si ensuite nous utilisons la DTFT.



$$X[k] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{L} n} \quad (5), \quad x[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{L} n} \quad (6)$$

où  $f = \frac{k}{L}$  avec  $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$  avec  $n = 0, 1, 2, \dots, L-1$

### *Différence entre la DFT et les autres Transformées de Fourier*

Essentiellement, la DTFT est l'inverse de la série de Fourier, parce que la dernière a une entrée continue et périodique et un spectre discret. Les applications des deux transformées, cependant, assez différent.

La DFT et la DTFT sont des résultats logiques de l'application de la CTFT aux données discrètes. Ce n'est pas la transformée qui change mais seule la forme de l'entrée «  $x$  » qui détermine le type de la transformée :

- si  $x$  est discrète, la TF devient DTFT
- si  $x$  est périodique, la TF devient série de Fourier
- si  $x$  est discret et périodique, la TF devient DFT

## Algorithme STFT

1. Choisir une fonction fenêtre de longueur finie  $w$
  2. Placer la fenêtre sur le début du signal au temps  $t=0$
  3. Tronquer le signal en utilisant cette fenêtre
  4. Calculer la TF du signal tronqué, sauvegarder.
  5. Faire un décaler incrémentale de la fenêtre vers la droite
  6. Revenir au pas 3, jusqu'à ce que la fenêtre atteint l'extrémité du signal.
- ➔ Pour chaque partie où la fenêtre est centrée, nous obtenons une TF différente.
- Par conséquent, chaque TF fournit les informations spectrales d'une tranche séparée dans le temps du signal, fournissant simultanément le temps et les informations de fréquence.

## 1. STFT

La STFT est une *Réprésentation linéaire temps-fréquence (Time-Frequency Representation (TFR))*

### Signaux à temps continu

Pour un signal à temps continue, l'analyse est habituellement fait en appliquant une fonction fenêtre puis une *Transformée de Fourier à Temp Continu (Continuous Time Fourier Transform (CTFT))* pour obtenir la CFT suivante :

$$STFT_x^w(t', f) = X(t', w) = \int_t [x(t) \cdot w(t-t')] e^{-j2\pi ft} dt \quad (7)$$

paramètre du temps      paramètre du fréquence      signal pour être analysé      noyau (Kernel) de la TF (basis function)

STFT coefficient du signal  $x(t)$  :  
calculée pour chaque fenêtre  
centrée à  $t=t'$

Fonction de fenêtrage  
centrée à  $t=t'$

## 1. STFT

$w(t)$  est généralement une fenêtre de Hann ou une « colline » gaussienne concentré sur zéro, et le  $x(t)$  est le signal à être transformé.  $X(t',w)$  est essentiellement la **Transformée de Fourier Continue** (**Continuous Time Fourier Transform (CTFT)**) du  $x(t)w(t - t')$ , une fonction complexe représentant la phase et l'amplitude du signal dans le temps et la fréquence.

## 1. STFT

### Signaux à temps discret

Pour un signal échantillonné, l'analyse est habituellement fait en appliquant une fonction fenêtre puis une **Transformée de Fourier à Temp Discret** (**Discrete Time Fourier Transform** (**DTFT**)) pour obtenir la DFT suivante (équivalente à l'équ. (5) :

$$STFT_x^w(m, f) = X(m, f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) \cdot w(n-m)] \cdot e^{-j2\pi fn} \quad (8)$$

STFT coefficient du signal  $x(t)$  :  
calculée pour chaque fenêtre  
centrée à  $n=m$

Fonction de fenêtrage  
centrée à  $n=m$

## La largeur de la Fenêtre

En général, la transformation est appliquée au produit entre le signal et d'une fonction de fenêtre. Mais la largeur de cette fenêtre affecte le spectre que nous essayons de mesurer.

## 1. STFT

Le signal de l'exemple 3 échantillonné à 400 Hz: La fenêtre de 25 ms nous permet d'identifier un temps précis auquel le changement entre les 4 signaux se produit, mais les fréquences précises sont difficiles à identifier. À l'autre extrémité de l'échelle, la fenêtre de 1000 ms permet de distinguer les fréquences d'une manière précise, mais le temps entre les changements de fréquence est brouillé.

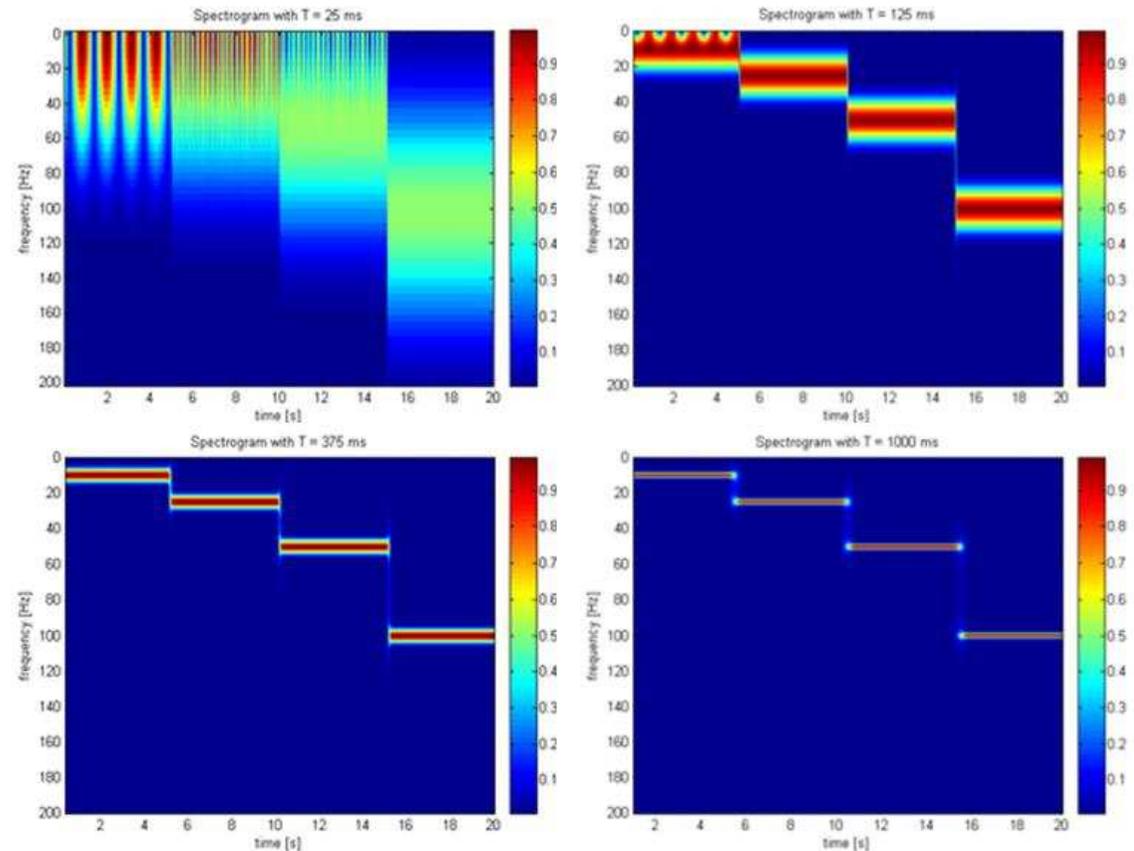


Fig. 6

## Le type de la Fenêtre

En général, la transformée est appliquée au produit entre le signal et d'une fonction de fenêtre. Mais n'importe quelle fenêtre (rectangulaire y compris) affecte le spectre que nous essayons de mesurer. Il existe plusieurs types de fenêtres.

## 1. STFT

Il est plus facile de comprendre l'effet en termes de forme d'onde simple, comme  $\cos(2\pi ft)$ . Nous pouvons montrer théoriquement que la transformée de Fourier de cette fonction est nulle sauf à  $\pm f$ .

Le fenêtrage fait que sa transformée de Fourier possède des valeurs différentes de zéro (généralement appelées la *fuite* (*leakage*)) aux fréquences autres que «  $f$  ». Ces valeurs tendent à être plus élevées près de «  $f$  » et faibles aux fréquences les plus loin de «  $f$  ».

## 1. STFT

S'il y a deux sinusoides, avec différentes fréquences, alors la fuite peut affecter notre capacité de distinguer leurs spectres. Dans ce cas, la fuite devient gênant quand un signal sinusoidal est beaucoup **plus petit en amplitude** qu'un autre, c'est-à-dire sa composante spectrale peut être cachée par la fuite de la composante du sinusoidal le plus grand. Quand les fréquences sont proches l'une de l'autre, la fuite peut être importante pour gêner l'analyse quand les sinusoides ont les mêmes amplitudes, c'est-à-dire ces composantes deviennent inconnaisables.

## *Fenêtre à dynamique de basse étendue*

Les fenêtres type *dynamique à basse étendue* (*low dynamic range*) comme la fenêtre rectangulaire ont d'excellentes caractéristiques de résolution pour des signaux possédant des amplitudes comparables, mais c'est un mauvais choix pour des signaux possédant des amplitudes disparates. Cette caractéristique est parfois décrite en tant que *dynamique à basse étendue*.

## *Fenêtre à dynamique de haute étendue*

À l'autre extrémité de l'étendue dynamique les fenêtres type *dynamique à haute étendue* (*high dynamic range*) sont les fenêtres qui possèdent la résolution la plus faible. Elles sont également les plus pauvres en termes de sensibilité, c'est-à-dire si la forme du signal contient du bruit aléatoire, son amplitude spectrale, comparée au sinussoïde, apparaîtra plus haut qu'en utilisant une fenêtre moins étendue.

## 1. STFT

La capacité de trouver des spectres correspondants aux sinusoides faibles parmi les spectres du bruit est diminuée par une fenêtre à *dynamique de haute étendue*. Ces fenêtres sont probablement plus souvent justifiées dans des applications à large bande, où on s'attend à ce que le spectre étant analysé contienne beaucoup de signaux différents et de diverses amplitudes.

## *Fenêtre à dynamique de gamme modérée*

Entre les extrémités sont les **fenêtres à dynamique à étendue modérée** (*moderate dynamic range*) , telles que **Hamming** et **Hann**. Elles sont généralement employées dans des applications à bande étroite, telles que le spectre d'une ligne de téléphone.

## 1. STFT

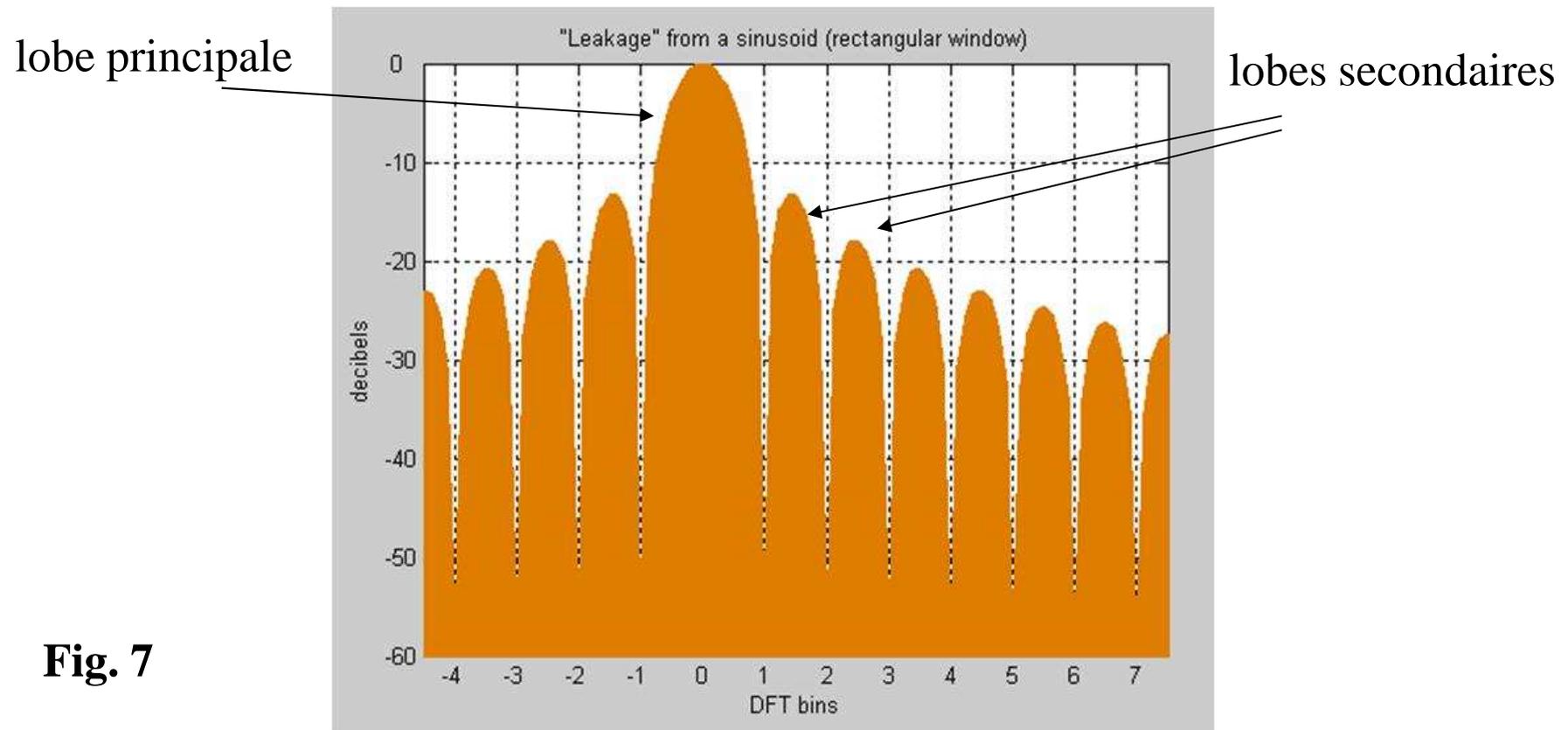
En résumé, l'analyse spectrale implique un compromis entre la distinction des signaux d'amplitudes comparables avec des fréquences proches et la distinction des signaux d'amplitudes disparates avec des fréquences différentes. Ce compromis se produit quand la fonction de fenêtre est choisie convenablement.

## *Signaux à temps discret*

Pour un signal échantillonné, l'analyse est habituellement fait en appliquant une fonction de fenêtre puis une *Transformée de Fourier à Temps discret* (*Discrete Time Fourier Transform* ((*DTFT*))). Mais la DTFT fournit uniquement un échantillonnage grossier de spectre fournie.

## 1. STFT

La figure ci-dessous montre qu'une partie du **DTFT** pour une fenêtre rectangulaire appliqué sur un sinusoire.



**Fig. 7**

## 1. STFT

La fréquence réelle du sinusöide est indiquée en tant que "0" sur l'axe horizontal. Toutes autres fréquences sont des fuites. L'unité de la fréquence est appelée "*casiers de DFT*" « *DFT bins* »; c'est-à-dire, les valeurs de nombres entiers sont les fréquences prélevées par le DFT. Ainsi la figure dépeint un cas où la fréquence réelle du sinusöide s'avère justement coïncider avec un échantillon de DFT, et la valeur maximum du spectre est exactement mesurée par cet échantillon.

## 1. STFT

Quand il manque la valeur maximum par une certaine quantité [jusqu'à 1/2 de casier], l'erreur de mesure sera désigné sous le nom *perte d'ondulation* « *scalloping loss* » (inspirée par la forme de la crête). Mais la chose la plus intéressante pour ce cas est que tous les autres échantillons coïncident avec les valeurs nulles dans le vrai spectre (ces valeurs nulles correspondent réellement aux croisements de zéro, qui ne peuvent pas être montrés sur une échelle logarithmique de ce type.).

## 1. STFT

Ainsi dans ce cas-ci, la DFT crée l'illusion d'un spectre sans fuite. En dépit des conditions peu probables de cet exemple, l'idée fausse populaire est de considérer cette la fuite visible est une certaine forme d'artefacts de la DFT. Mais puisque n'importe quelle fonction de fenêtre cause une fuite, son absence apparente (dans cet exemple) est réellement l'artefact de la DFT.

## *Fuite totale*

Les concepts de la *résolution* et de l'*étendue dynamique* tendent à être quelque peu subjectifs, selon ce que l'utilisateur essaye réellement de faire. Mais ils tendent également à être fortement corrélés avec la *fuite totale*, qui est quantifiable. Elle est habituellement exprimée comme la largeur de bande équivalente,  $B$ .

## 1. STFT

Considérons la fuite en tant que redistribuer de la DTFT dans une forme rectangulaire avec une amplitude égale au spectre maximal et une largeur  $B$ . Plus la fuite est grande, plus la largeur de la bande est grande. Cette bande s'appelle parfois « *noise equivalent bandwidth* » ou « *equivalent noise bandwidth* ».

## 1. STFT

Bien que la fuite a été considérée comme une interférence d'une composante de fréquence qui s'impose à d'autres fréquences, l'effet est réciproque. Ainsi, si la fréquence  $f_1$  fuit un pourcentage de son énergie dans la fréquence  $f_2$ , alors une composante de fréquence à  $f_2$  renvoie la faveur dans la même proportion. Ceci est vraie pour toutes les composantes de fréquence du signal d'entrée.

Ainsi la mesure spectrale à la fréquence  $f_1$  est perturbée par toutes les autres composantes. Plus la largeur de la bande de bruit (B) est grande, plus l'effet est grand.

## 1. STFT

Quand le signal est un sinusoire corrompu par le bruit aléatoire additif, l'analyse spectrale distribue les composantes de signal et de bruit différemment, souvent pour faciliter la détection de la présence de ce signal ou pour mesurer certaines caractéristiques, telles que l'amplitude et la fréquence.

En fait, le rapport *signal sur bruit* « *signal-to-noise ratio* (*SNR*) » est amélioré en distribuant le bruit uniformément, tout en concentrant la majeure partie de l'énergie de sinusoire autour d'une seule fréquence.

## *Le gain de traitement (Processing gain)*

Le *gain de traitement* (*processing gain*) est un terme souvent employé pour décrire une amélioration de SNR. Le gain de traitement de l'analyse spectrale dépend de la fonction de fenêtre, sa largeur de bande de bruit (B) et sa perte potentielle d'ondulation.

## 1. STFT

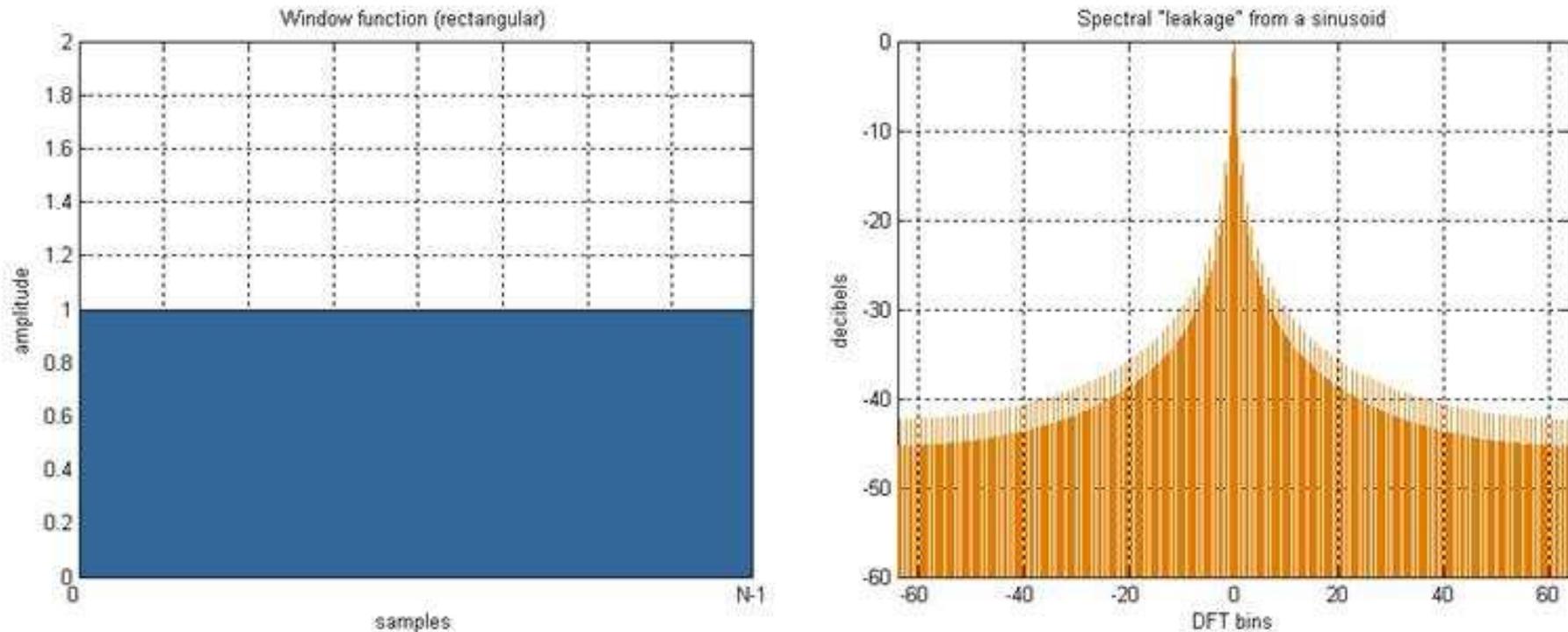
### Terminologie

- $N$  : la longueur , en nombre de points, d'une fonction fenêtre à temps discret. Typiquement  $N$  est le résultat de 2 à la puissance d'un entier  $m$ , e.g.,  $2^{10} = 1024$ .
- $n$  : entier avec  $0 \leq n \leq N-1$ . Ainsi les formes des fenêtres décalées dans le temps est :  $w[n - ((N-1)/2)]$ , où  $w(n)$  est maximale à  $n = 0$ .
- Chaque label d'une figure inclus la métrique « noise equivalent bandwidth» ( $B$ ), en unités de DFT bins. Comme règle, les fenêtres sont divisées en deux groupes sur la base de  $B$ . un groupe couvre la plage  $1 \leq B \leq 1.8$ , et l'autre groupe couvre  $B \geq 1.98$ . Les fenêtres de Gauss et Kaiser sont des familles qui enjambent les deux groupes, bien que seulement un ou deux exemples de chacun soient montrés.

## 1. STFT

*Rectangulaire*  $w(n) = 1$

**B = 1.0**

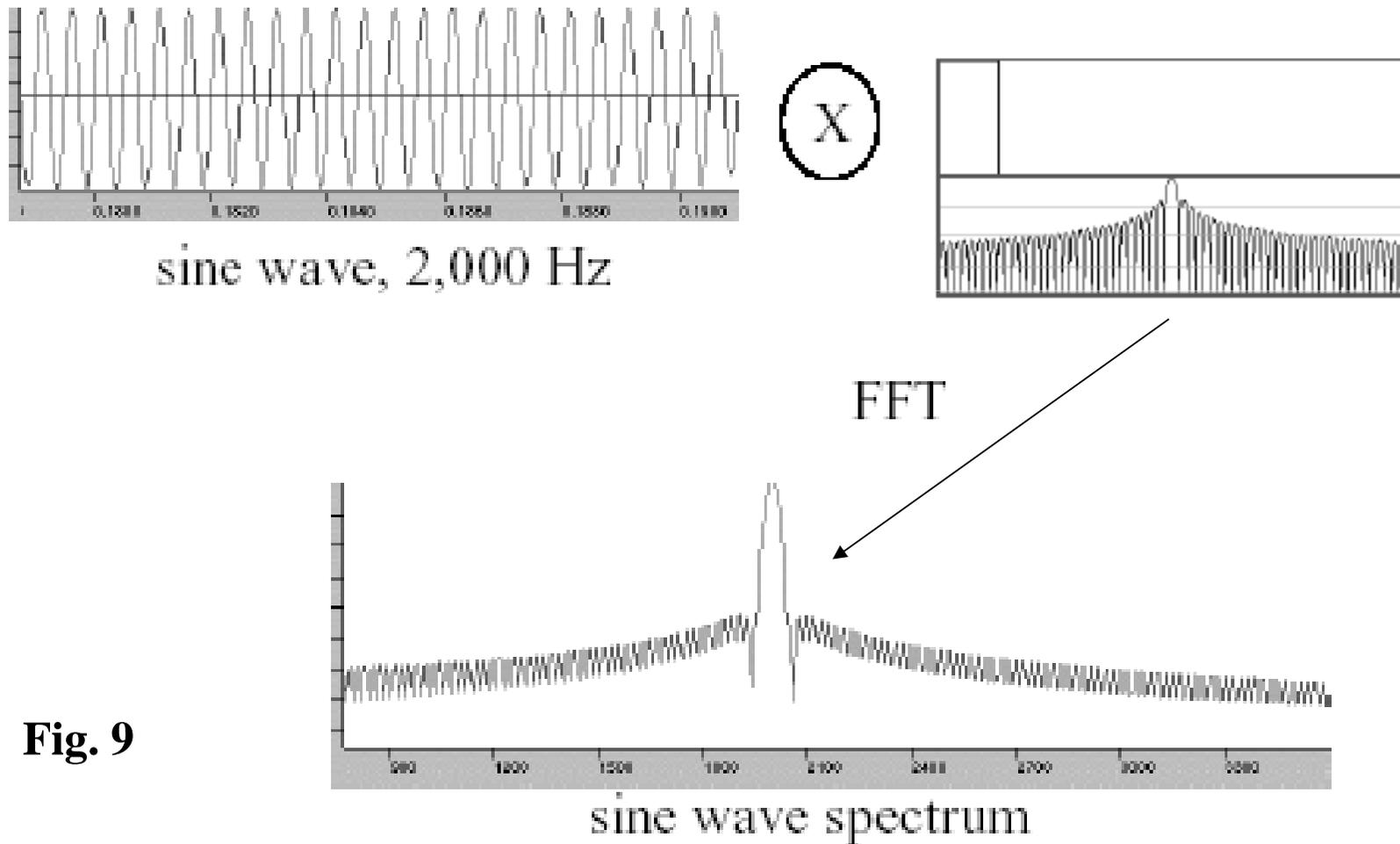


**Fig. 8**

Cette fenêtre a des effets négatifs dans certains cas. Pour minimiser ces effets, de très nombreuses fenêtres ont été conçues pour répondre à des besoins spécifiques. Pour les définitions de différentes fenêtres utilisées dans la STFT, vous pouvez consulter : [http://en.wikipedia.org/wiki/Hann\\_window#Hamming\\_window](http://en.wikipedia.org/wiki/Hann_window#Hamming_window)

1. STFT

*Exemple 5. Application d'une fenêtre rectangulaire*



**Fig. 9**

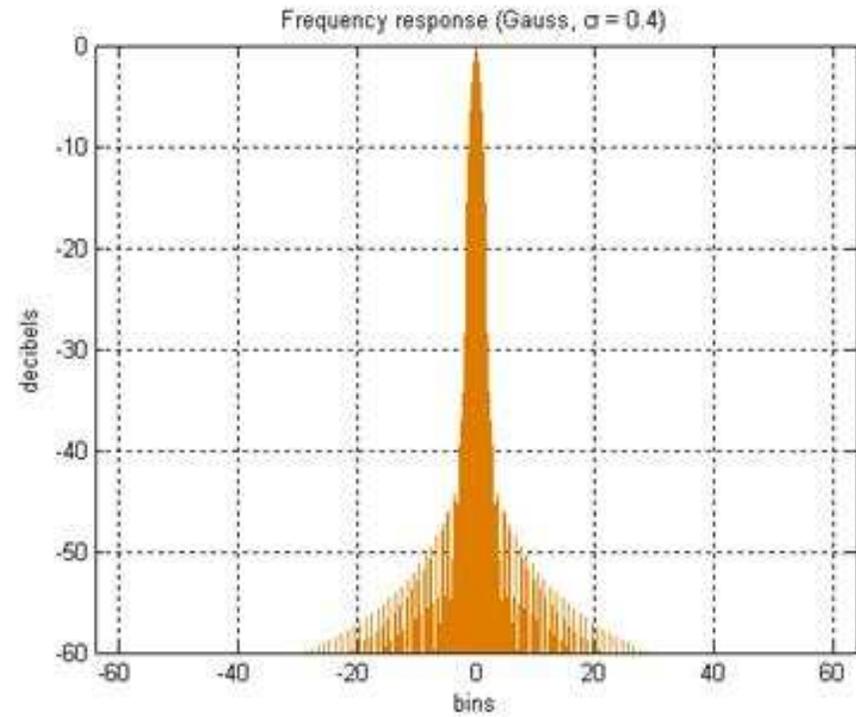
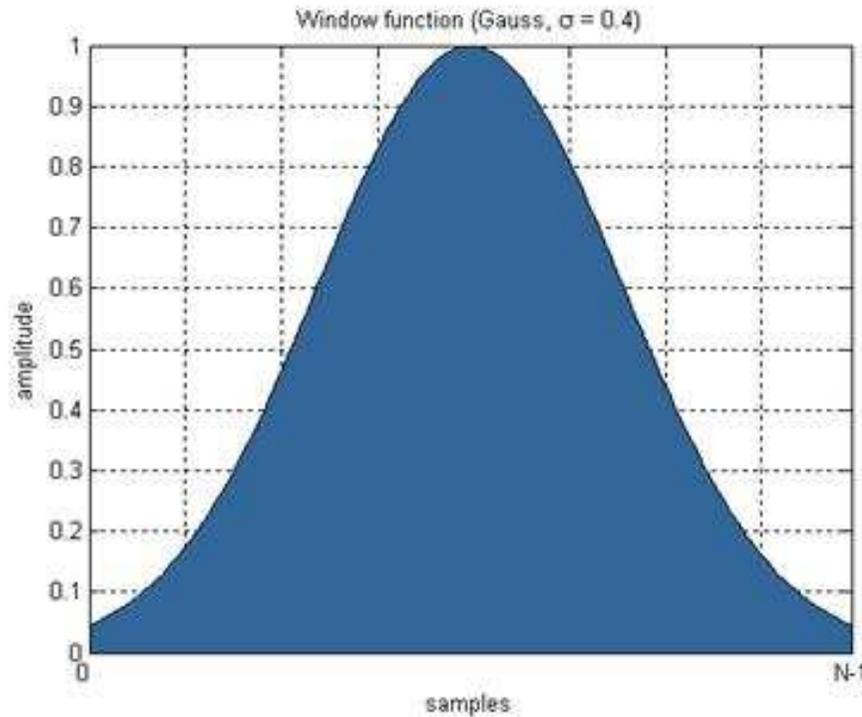
## 1. STFT

### *Gauss*

$$w(n) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{n - (N-1)/2}{\sigma(N-1)/2} \right)^2}$$

$$B = 1.45$$

avec  $\sigma \leq 0.5$



**Fig. 10**

## 1. STFT

### Exemple 6. Application d'une fenêtre gaussienne

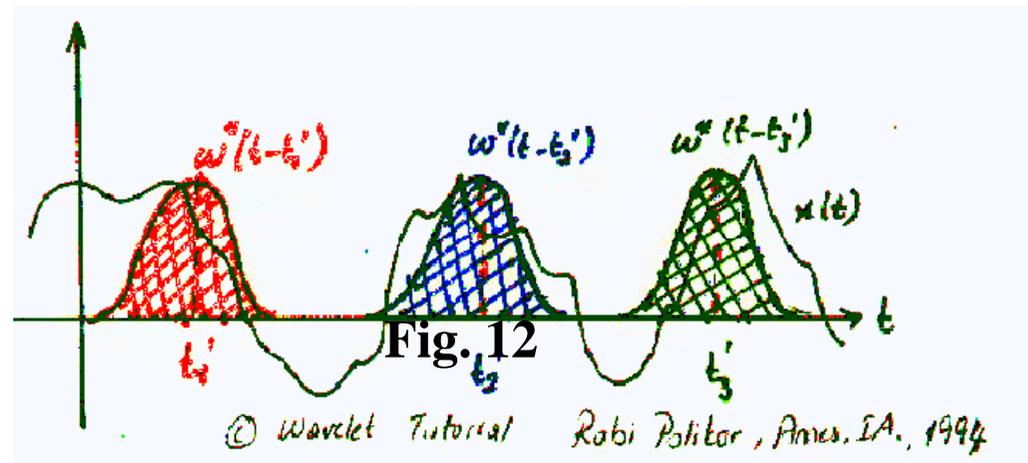


Fig. 11 [1]

Les fonctions gaussiennes en couleurs sont les fonctions de fenêtrage localisées à  $t'_1$ ,  $t'_2$  et  $t'_3$ . Elles correspondent à trois différentes TF à trois différents instants du temps.

## 1. STFT

### *Hamming*

$$w(n) = 0.53836 - 0.46164 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

$$B = 1.37$$

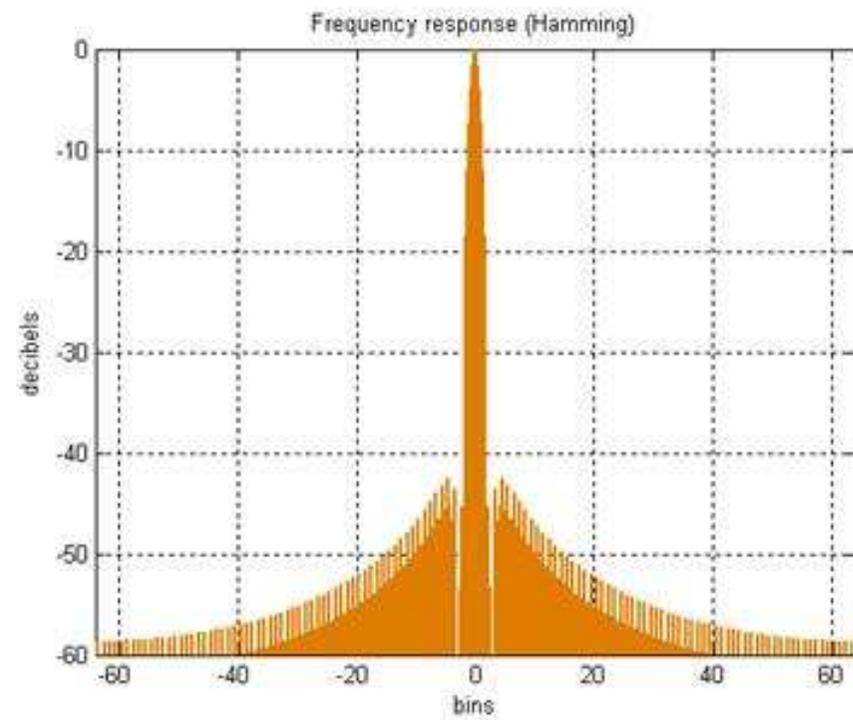
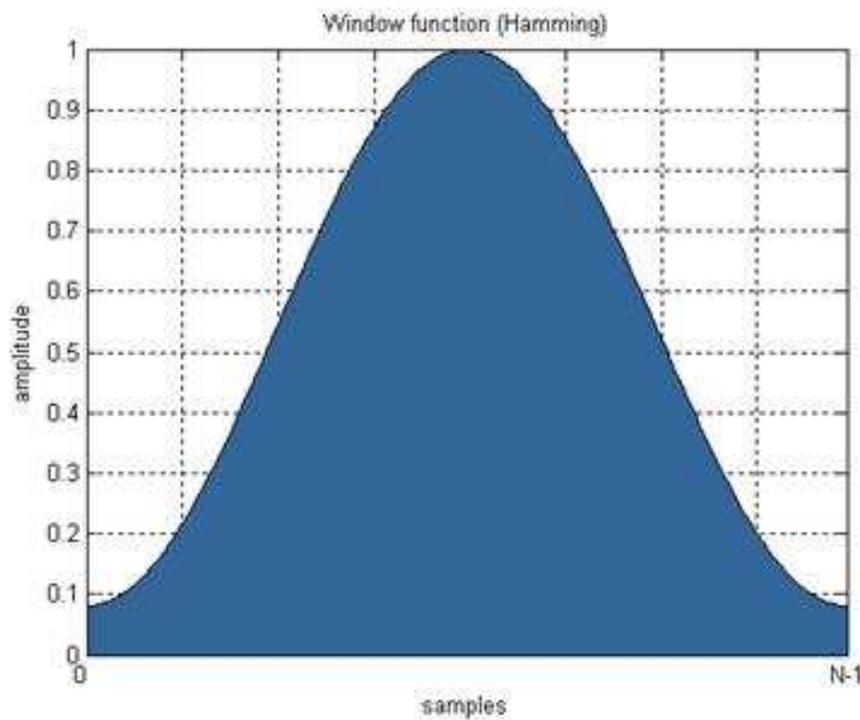


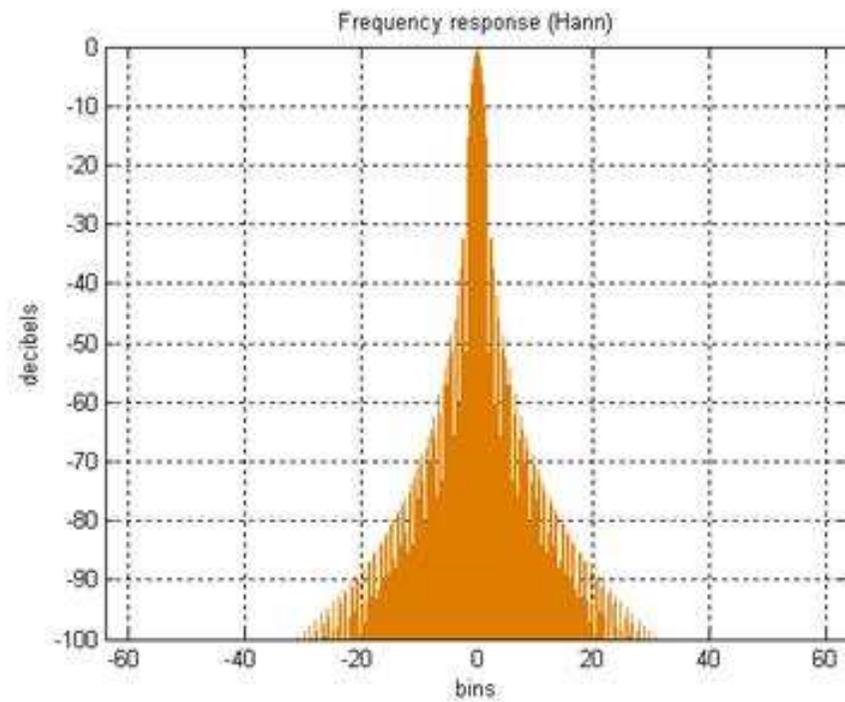
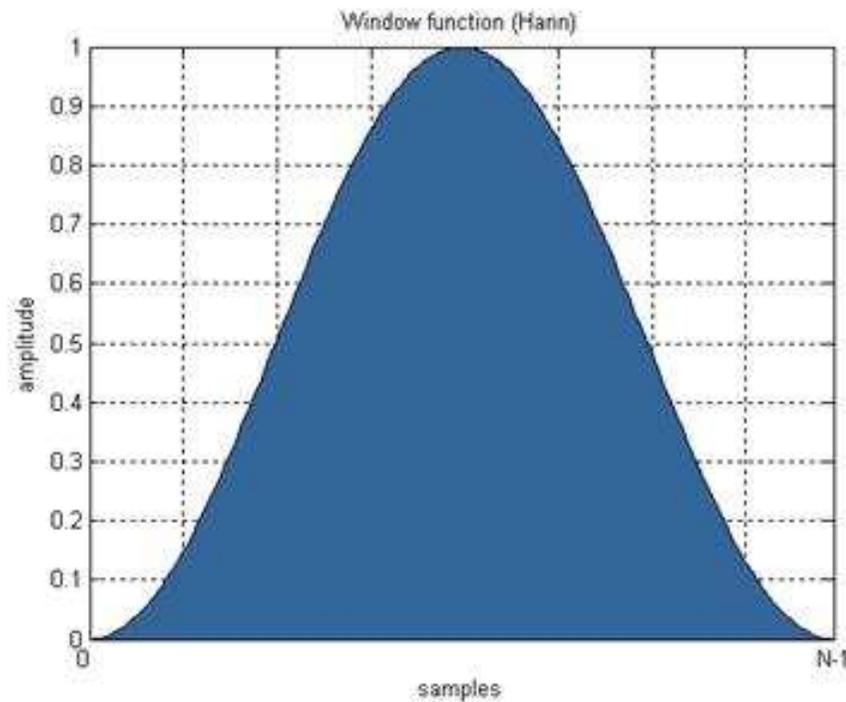
Fig. 12

## 1. STFT

### *Hann*

$$w(n) = 0.5 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \right)$$

$$B = 1.50$$



**Fig. 13**

## 1. STFT

### Exemple 7

Tout d'abord, puisque notre transformée est une fonction du temps et de la fréquence (la TF est différente, elle est fonction de la fréquence seulement), la transformation serait bidimensionnelle (trois, si nous comptons l'amplitude aussi). Prenons un signal non stationnaire, tel que le le signal suivant :

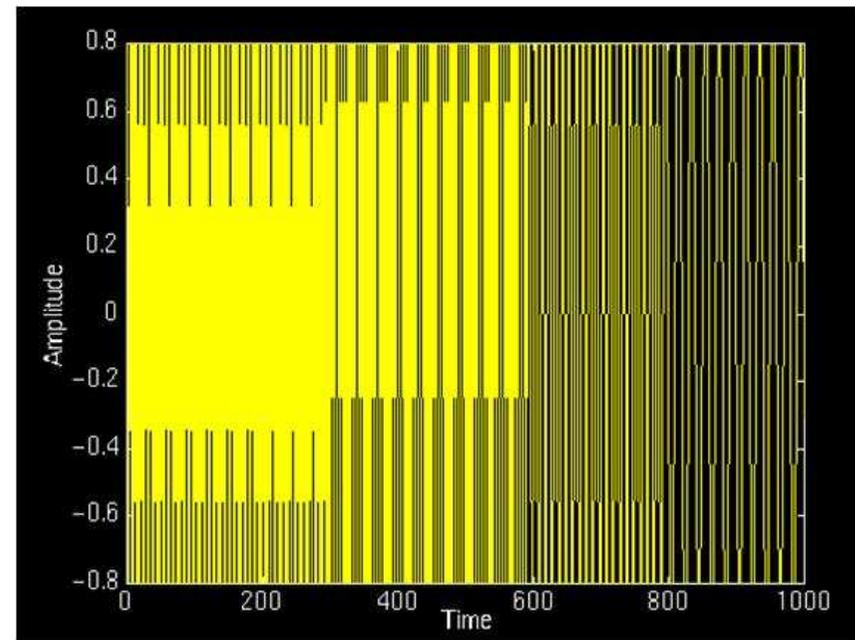
Dans ce signal (4 sinusoïdes), il y a 4 composantes de fréquence à différents intervalles du temps.

$T_1$ : 0-249 ms  $\rightarrow$  300 Hz

$T_2$ : 250-500 ms  $\rightarrow$  200 Hz

$T_3$ : 501-749 ms  $\rightarrow$  100 Hz

$T_4$ : 750-1000 ms  $\rightarrow$  50 Hz



**Fig. 14 [1]**

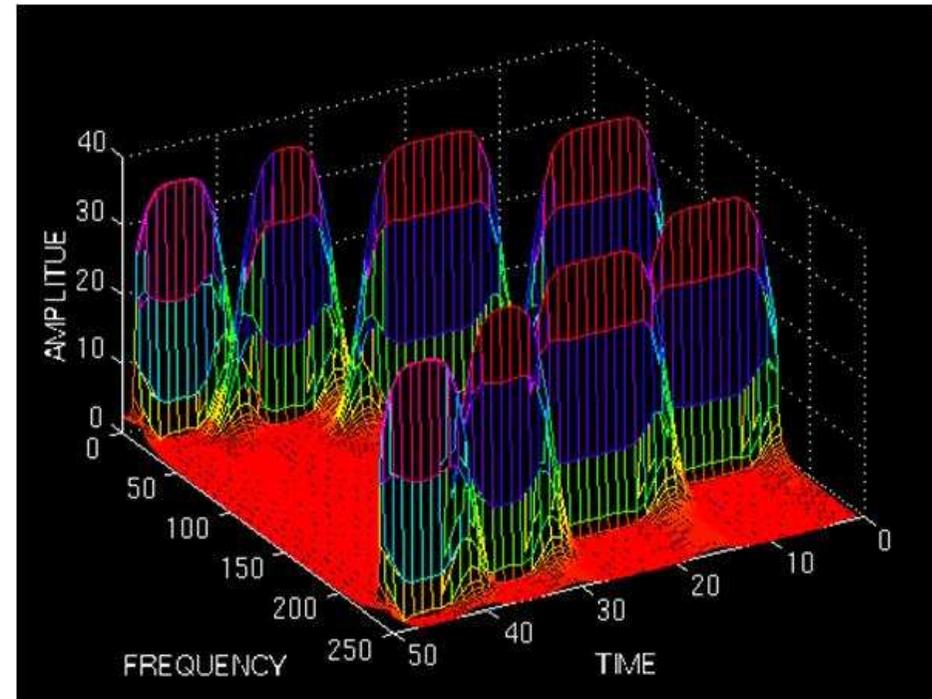
## 1. STFT

### Exemple 7 (suite)

Voici la STFT en utilisant une fenêtre Gaussienne de la forme :

$$W(t) = \exp(-a t^2 / 2)$$

$a$  détermine la longueur de la fenêtre (plus  $a$  est grand plus la fenêtre est étroite et vice versa), et  $t$  le temps. Ici  $a=0.001$ .



**Fig. 15 [1]**

- Tout d'abord, notons que le graphique est symétrique en ce qui concerne la ligne de milieu de l'axe de fréquence (FT fenêtrée).
- Il y a quatre crêtes correspondant à 4 composantes différents de fréquence. A la différence de TF, ces quatre crêtes sont situées à différents intervalles de temps le long de l'axe de temps.

Maintenant nous avons une véritable représentation temps-fréquence du signal.

## 1. STFT

Le problème avec STFT est son analogie avec un problème connu en physique quantique : le *principe d'incertitude de Heisenberg* : on ne peut pas mesurer des valeurs (avec une précision arbitraire) de certaines quantités conjuguées, qui sont des paires de quantités observables d'une particule élémentaire simple. Le plus familier de ces paires est la position et le moment d'inertie.



Heisenberg. December 5, 1901– February 1, 1976)

## 1. STFT

Microscope des rayons gamma de Heisenberg pour localiser un électron (montré en bleu). Le rayon gamma entrant (montré en vert) est dispersé par l'électron vers le haut dans l'angle de l'ouverture du microscope  $\theta$ . Les rayons gamma dispersés sont montrés en rouge. L'optique classique prouve que la position de l'électron peut être détectée avec une résolution seulement jusqu'à un  $\Delta x$  d'incertitude qui dépend de  $\theta$  et la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière entrante.

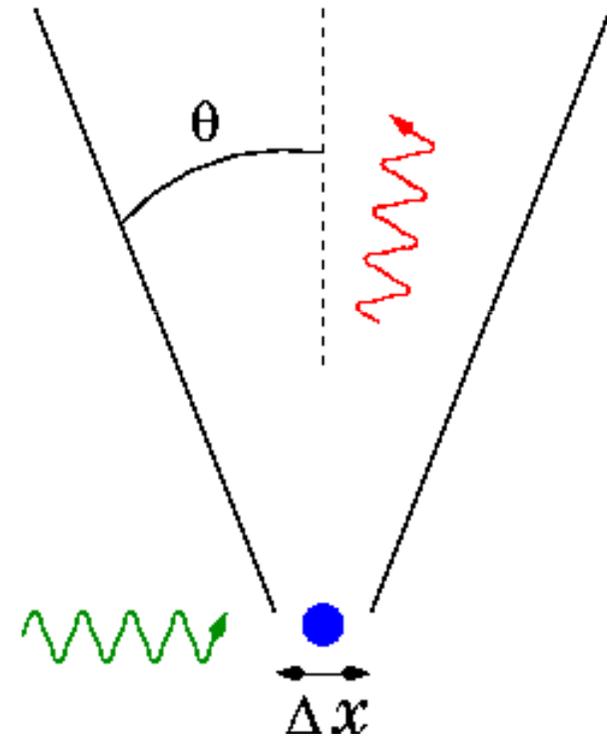


Fig. 16

## Problème de *résolution*

Ce principe peut être appliqué à l'information de temps-fréquence d'un signal : on ne peut pas connaître la représentation exacte en temps-fréquence d'un signal, c'est-à-dire, on ne peut pas connaître quelles composantes spectrales existent à des instants précis du temps. Ce qu'on peut savoir sont les intervalles de temps dans lesquels certaine bande de fréquences existent.

## 1. STFT

Le problème avec le STFT a un rapport avec la largeur de la fonction de fenêtre qui est employée. Cette largeur de la fonction de fenêtre est connue comme le *support* (*support*) de la fenêtre. Si la fonction de fenêtre est étroite, alors elle est connue comme « *compactly supported* ». Cette terminologie est souvent utilisée dans le domaine des ondelettes.

## 1. STFT

Rappelons-nous qu'en TF il n'y a aucun problème de résolution dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire, nous savons exactement quelles fréquences existent; aussi, il n'y a aucun problème de résolution dans le domaine temporel, puisque nous connaissons la valeur du signal à chaque instant de temps.

Par contre, la résolution temporelle en TF, et la résolution fréquentielle dans le domaine de temps sont zéro, puisque nous n'avons aucune information sur elles.

## 1. STFT

Ce qui donne la résolution fréquentielle parfaite en TF est le fait que la fenêtre employée en TF est son *noyau* (*kernel*) : la fonction  $\exp\{j2\pi t\}$ , qui existe à tout moment de  $-\infty$  à  $+\infty$  (fenêtre de longueur infinie).

Maintenant, dans la STFT, notre fenêtre est de longueur finie, ainsi elle couvre seulement une partie du signal, ce qui provoque une résolution fréquentielle plus faible : nous ne connaissons plus les composantes exactes de fréquence qui existent dans le signal, mais nous connaissons seulement une bande de ces fréquences.

## 1. STFT

Pouvons-nous demander, pourquoi ne pas utiliser une longueur infinie de la fenêtre pour la STFT, afin d'obtenir une résolution parfaite en fréquence ?

Nous sommes confrontés au dilemme suivant :

D'une part, si nous employons une fenêtre de longueur infinie, nous obtenons la TF, qui donne la résolution parfaite de fréquence, mais aucune information de temps. D'autre part, afin d'obtenir une stationnarité dans cette fenêtre, nous devons avoir une fenêtre assez étroite, dans laquelle le signal est stationnaire. Plus nous rendons la fenêtre étroite, plus la résolution en temps est meilleure, et plus la l'hypothèse du stationnarité est meilleure, mais plus pauvre la résolution de fréquence :

**Fenêtre étroite** → bonne résolution temporelle, mauvaise résolution fréquentielle

**Fenêtre large** → bonne résolution fréquentielle, mauvaise résolution temporelle

## 1. STFT

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

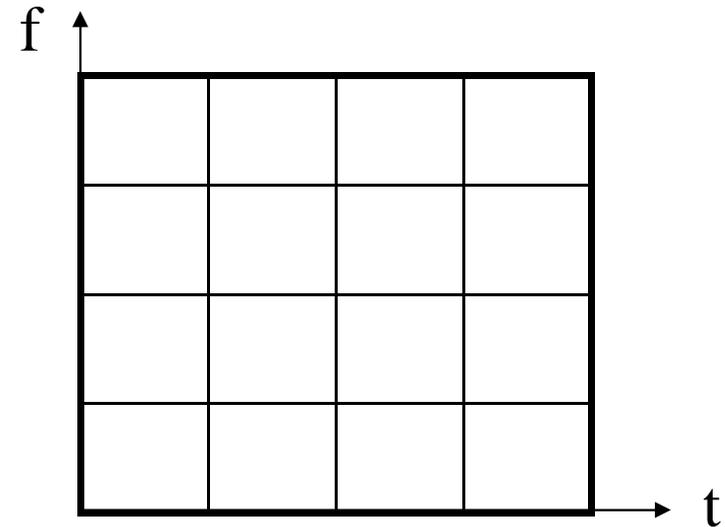
(9)

**Résolution temporelle :** À quel point deux crêtes dans le temps peuvent être séparées l'un de l'autre dans le domaine de la transformation.

**Résolution fréquentielle :** À quel point deux composantes spectrales peuvent être séparées l'un de l'autre dans le domaine de la transformation.

## 1. STFT

Chaque case (carrée) correspond à une valeur de la STFT dans le plan temps-fréquence représente une partie égale. Remarquez que les cases possèdent certaines surfaces constantes non nulles qui impliquent que la valeur d'un point particulier dans le plan temps-fréquence ne peut pas être connue. Tous les points dans ce plan qui tombent dans une case sont représentés par une seule valeur sur la STFT.



**Fig. 17**

## 1. STFT

### Exemple 5 (suite)

Choisir 4 fenêtres de différentes longueurs puis appliquer la STFT.

La fenêtre choisie est une fonction Gaussienne de la forme :

$$W(t) = \exp \left( - a t^2 / 2 \right)$$

$a$  détermine la longueur de la fenêtre (plus  $a$  est grand plus la fenêtre est étroite et vice versa) , et  $t$  le temps.

1. STFT

Exemple 7 (suite)

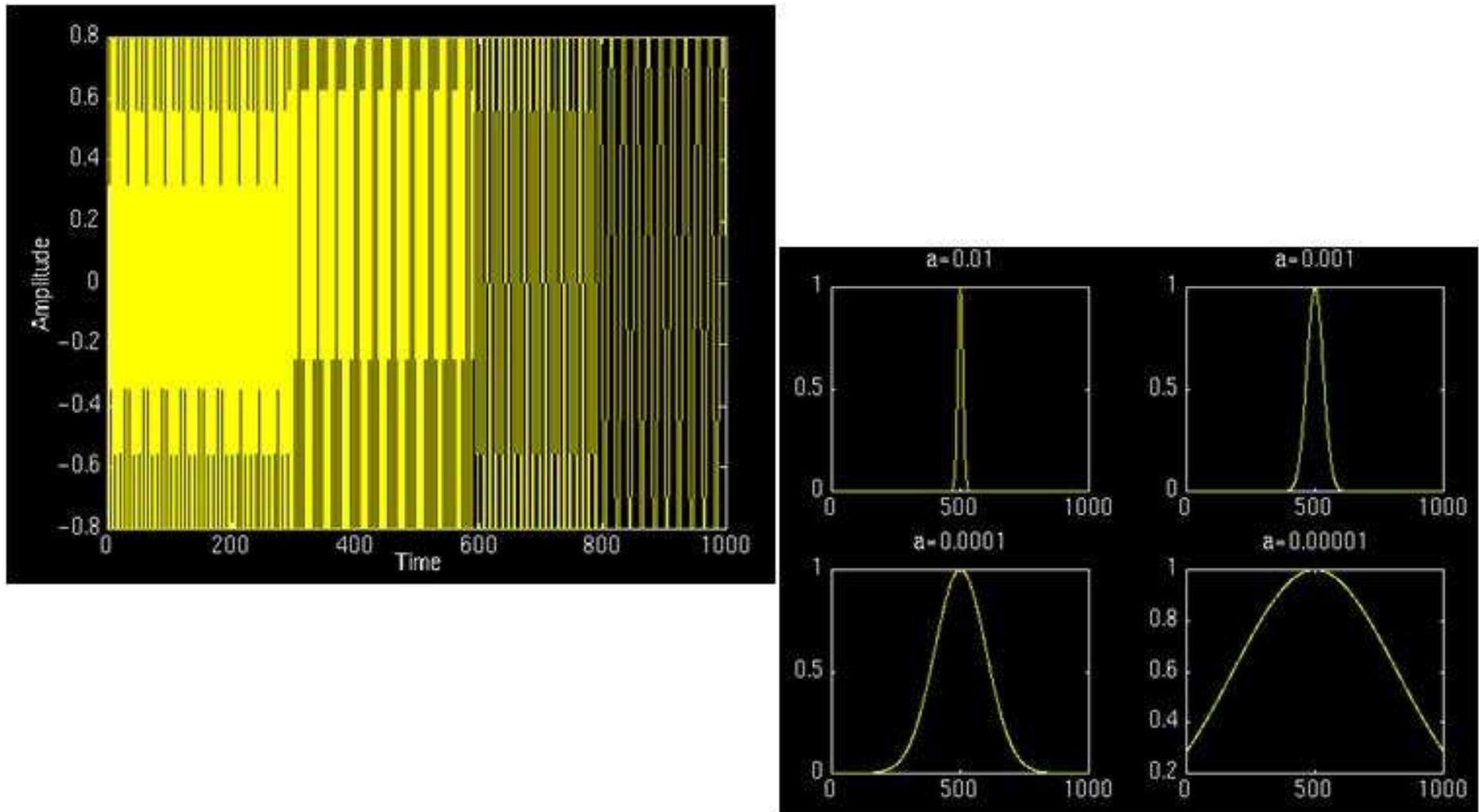


Fig. 18 [1]

## 1. STFT

### Exemple 7 (suite)

$a = 0.01$

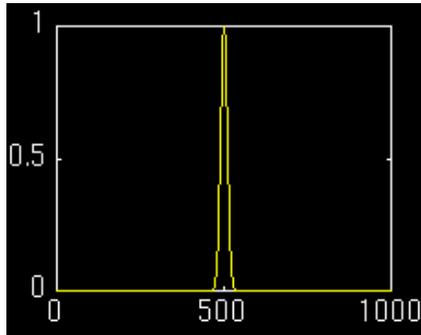
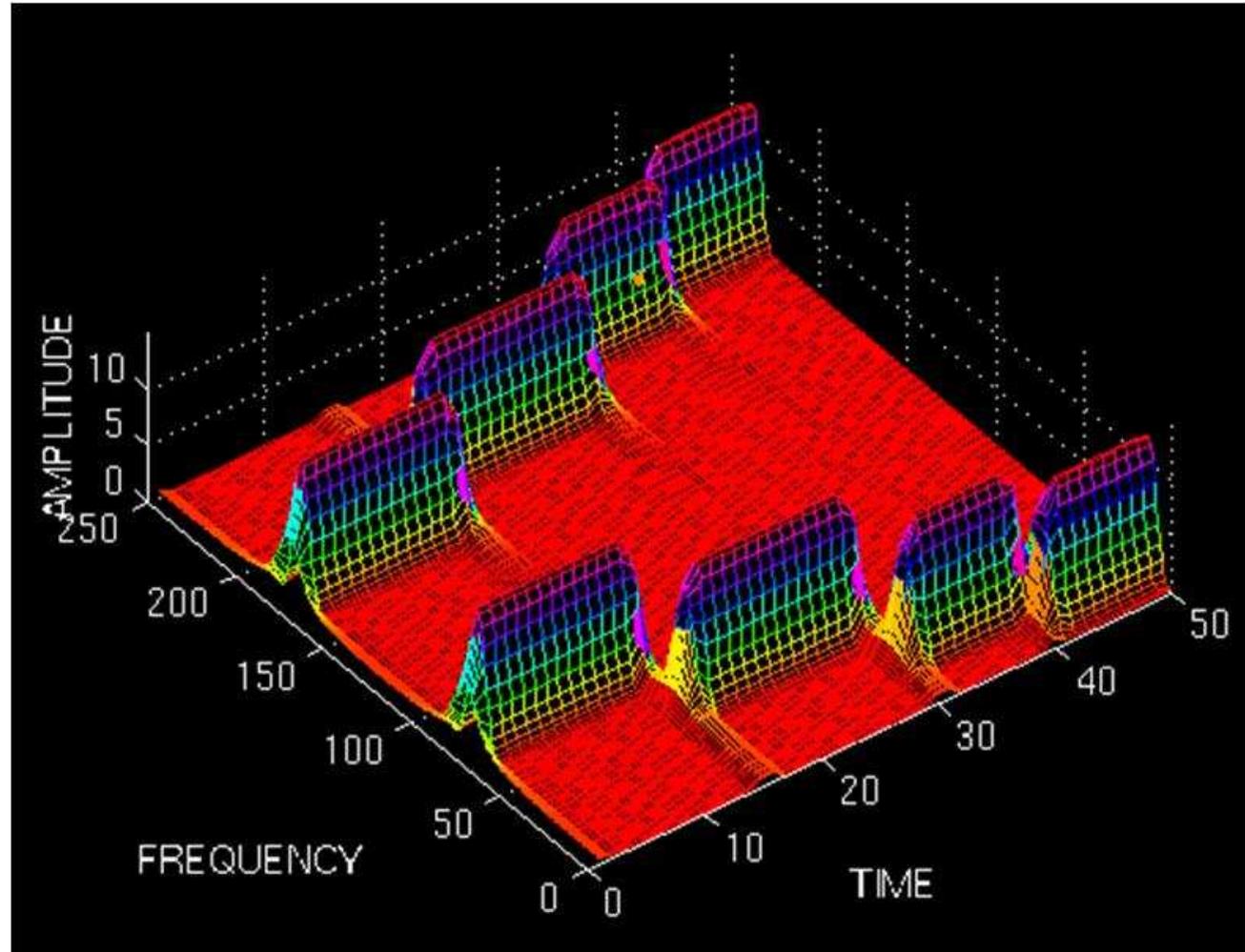


Fig. 19 [1]



La figure ci-dessus montre la STFT obtenue. Notez que les quatre crêtes sont bien séparées l'une de l'autre dans le temps. Notez aussi que, dans le domaine de fréquence, chaque crête couvre une gamme des fréquences, au lieu d'une valeur unique de fréquence.

## 1. STFT

### Exemple 7 (suite)

$$a = 0.001$$

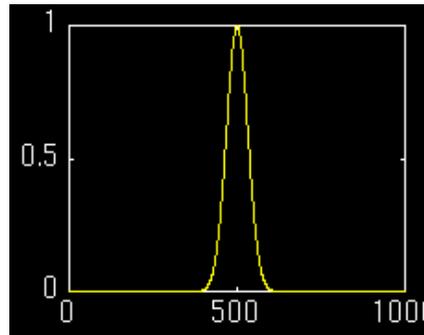
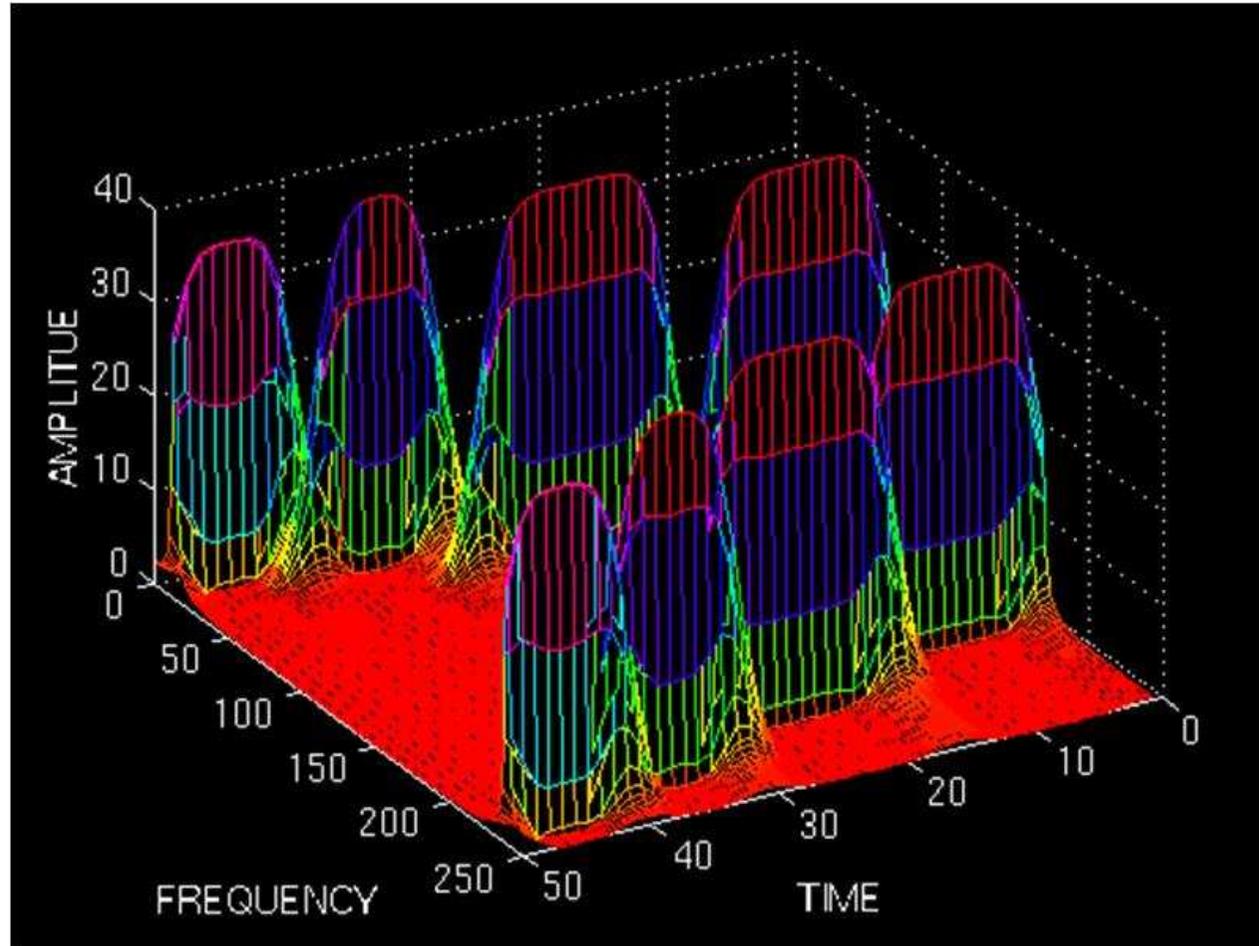


Fig. 20 [1]

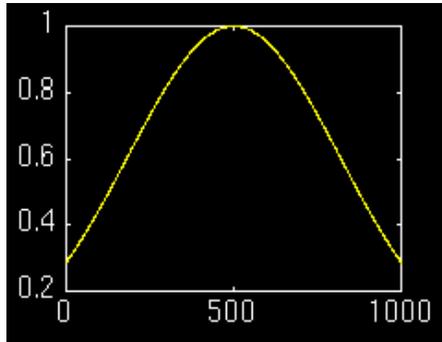


La figure ci-dessus montre la STFT obtenue. Notez que les quatre crêtes ne sont pas bien séparées l'une de l'autre dans le temps, c'est-à-dire que la résolution dans le domaine temporel a été diminuée. Notez aussi que, dans le domaine fréquentiel, chaque crête couvre une gamme de fréquences au lieu d'une valeur unique de fréquence, mais moins étroite que celle obtenue dans le cas précédent, i.e. la résolution dans le domaine fréquentiel a été améliorée.

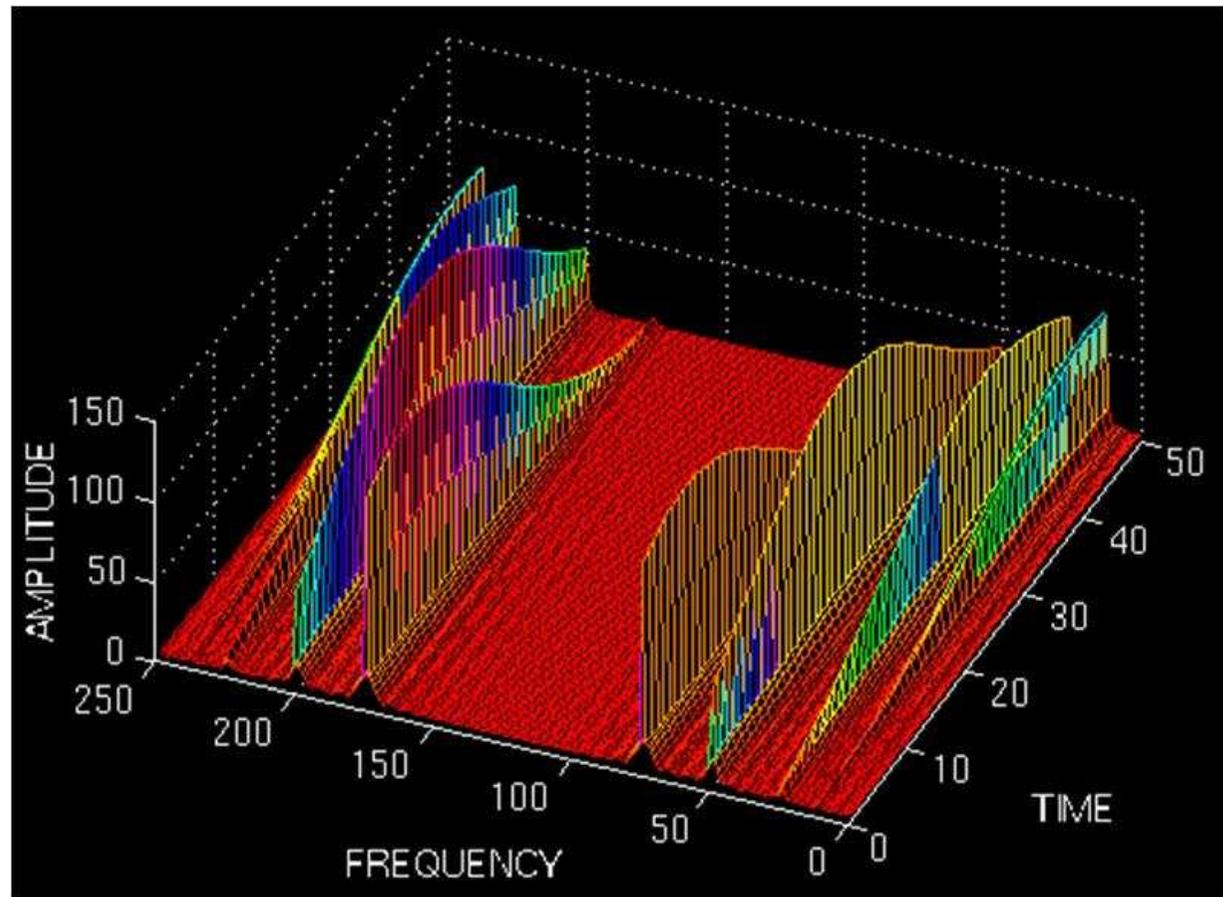
## 1. STFT

### Exemple 7 (suite)

$a = 0.0001$



**Fig. 21 [1]**



La figure ci-dessus montre la STFT obtenue. Notez que les quatre crêtes ne sont pas bien séparées l'une de l'autre dans le temps, c'est-à-dire que la résolution dans le domaine temporel a été encore diminuée. Notez aussi que, dans le domaine fréquentiel, chaque crête couvre une gamme de fréquences au lieu d'une valeur unique de fréquence, mais plus étroite que celle obtenue dans le cas précédent, c'est-à-dire que la résolution dans le domaine fréquentiel a été encore améliorée.

## 1. STFT

### Exemple 7 (suite)

$a = 0.0001$

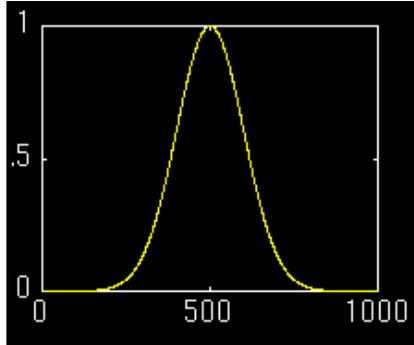
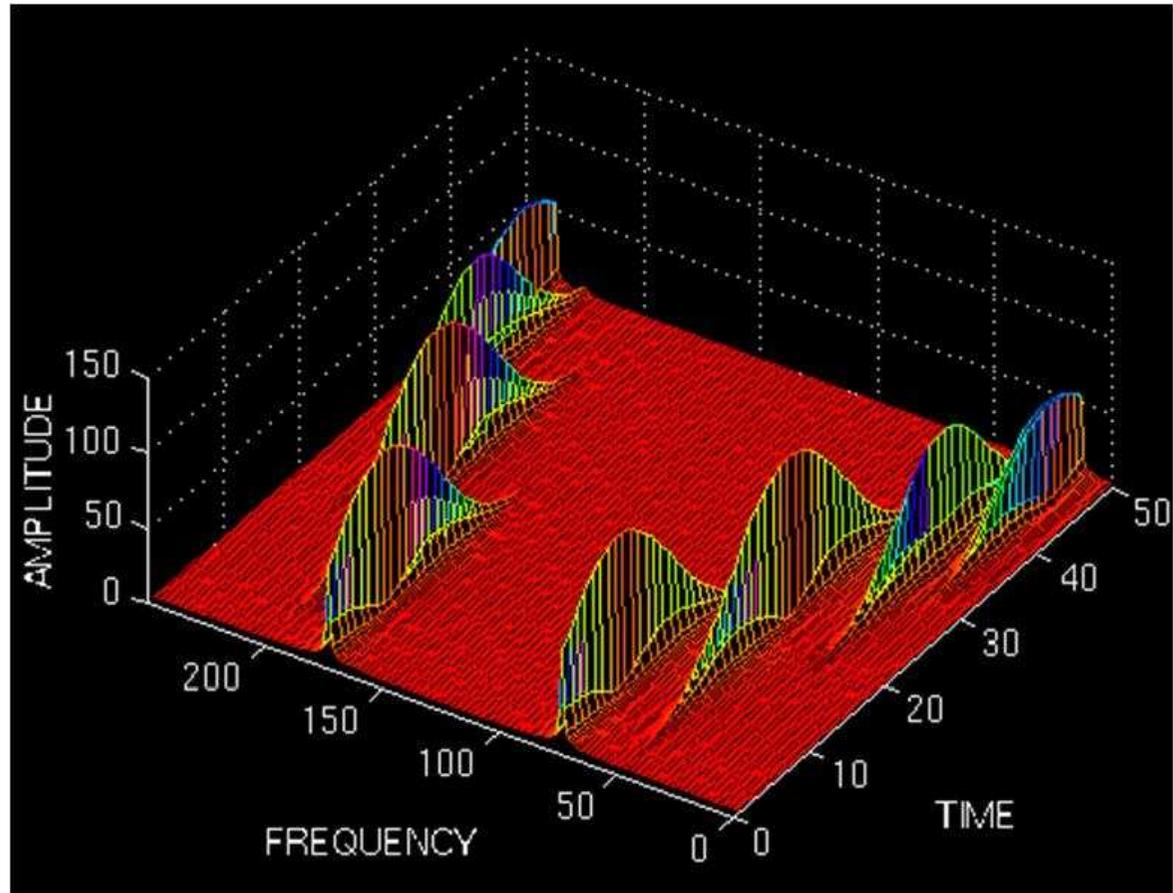


Fig. 22 [1]



La figure ci-dessus montre la STFT obtenue. Notez que les quatre crêtes ne sont pas bien séparées l'une de l'autre dans le domaine temporel, c'est-à-dire que la résolution dans le domaine temporel a été encore diminuée. Notez en outre que, dans le domaine fréquentiel, chaque crête couvre une gamme de fréquences au lieu d'une valeur unique de fréquence, mais plus étroite que celle obtenue dans le cas précédent, c'est-à-dire que la résolution dans le domaine fréquentiel a été encore améliorée.

## Conclusion sur la STFT

Ces exemples devraient avoir illustré le problème implicite de la résolution du STFT. Un utilisateur souhaitant employer la STFT est confronté à ce problème de résolution. **Quelle largeur et quel type de fenêtre à employer ?**

- Les fenêtres étroites donnent la bonne résolution dans le domaine temporel, mais la résolution est faible dans le domaine fréquentiel.
- Les fenêtres larges donnent la bonne résolution dans le domaine fréquentiel, mais la résolution est faible dans le domaine temporel ; mais, les fenêtres larges peuvent violer la condition de stationnarité.

## Peut-on choisir une fonction de fenêtre, une fois pour toutes, et utiliser cette fenêtre dans l'analyse entière ?

La réponse, naturellement, est liée à l'application : Si les composantes de fréquence sont bien séparés l'une de l'autre dans le signal original, nous pouvons alors sacrifier une certaine résolution dans le domaine de fréquence et aller chercher la bonne résolution dans le domaine de temps. Cependant, si ceci n'est pas le cas, alors une bonne fonction de fenêtre doit être trouvée, cette tâche pourrait être bien difficile !

**Solution :** *les ONDELETTES (WAVELETS)*

**Éliminer, dans une certaine mesure, le dilemme de la résolution**

## 2. Transformée en Ondelette Continue (Continuous Wavelet Transform (CWT))

Bien que les problèmes de la résolution temporelle et fréquentielle soient des résultats d'un phénomène analogue au problème d'incertitude de Heisenberg et existent indépendamment de la transformation utilisée, il est possible d'analyser n'importe quel signal en employant une approche alternative appelée *analyse multirésolution* (**Multiresolution Analysis (MRA)**).

## 2. Transformée en Ondelette Continue

MRA est conçu pour donner

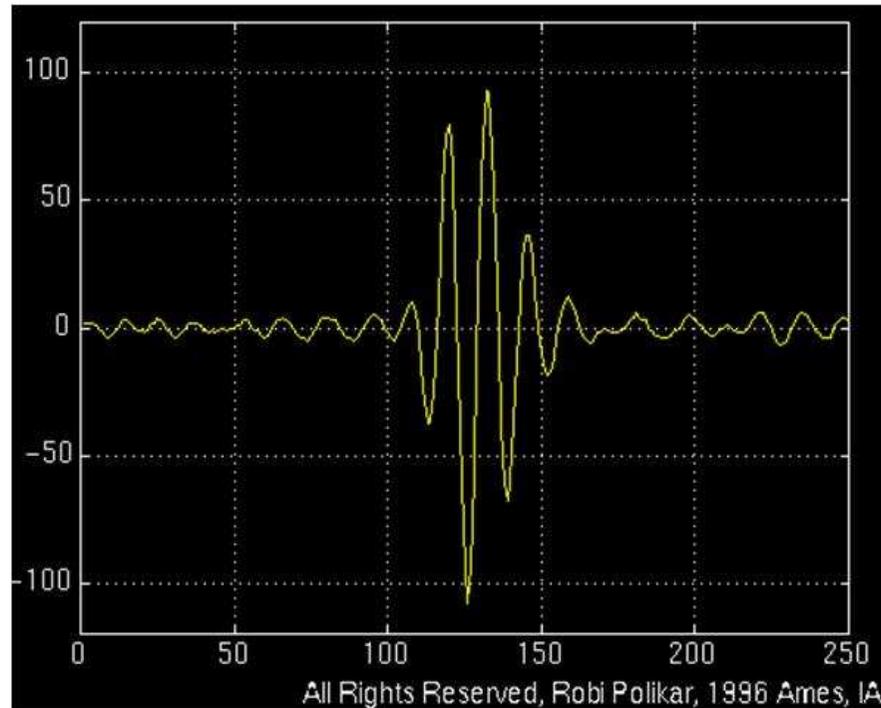
- une bonne résolution temporelle et une faible résolution fréquentielle aux hautes fréquences et
- une bonne résolution fréquentielle et une faible résolution temporelle aux basses fréquences.

Cette approche a un sens, particulièrement quand le signal réel a des composantes de haute fréquence sur des courtes durées et des composants de basse fréquence sur des longues durées.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Heureusement, les signaux qui sont produits dans les applications pratiques sont souvent de ce type.

### Exemple 8



Les WT sont largement divisées en trois classes, CWT, DWT et transformées en ondelettes basées sur l'analyse multirésolution (MAW).

## Transformée en ondelette continue (CWT)

La CWT a été développée comme une approche alternative à la STFT pour surmonter le problème de résolution. L'analyse d'ondelette est faite d'une manière semblable à l'analyse de STFT, en un sens que le signal est multiplié par une fonction, *ondelette* (*wavelet*), semblable à la fonction de fenêtre dans le STFT, et la transformation est calculée séparément pour différents segments du signal dans le domaine temporel.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Cependant, il y a deux différences principales entre le STFT et la CWT. Dans le cas de CWT :

1. Les fréquences négatives de la TF de signaux fenêtrés ne sont pas considérées, et donc une crête unique sera vue comme un spectre correspondant à un sinussoïde.

2. La largeur de la fenêtre sera changée pendant la transformation et sera calculée pour chaque composante spectrale unique. Ceci est probablement la caractéristique la plus significative de la transformée en ondelettes

## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Projection d'une fonction $x(t)$ sur un sous ensemble à échelle $s$

Le sous ensemble d'échelle  $s$  ou d'une bande de fréquence  $[1/s, 2/s]$  est généré par des fonctions (ou *ondelettes filles* (*baby functions, daughter wavelets*)  $\psi_{\tau,s}(t)$  qui sont des fonctions translatées et mises en échelle (dilatées ou compressée) d'une fonction continue dérivable appelée fonction ou *ondelette mère* (*mother wavelet*)  $\psi(t)$ .

## 2. Transformée en Ondelette Continue

La CWT est une fonction de deux paramètres  $\tau$  et  $s$ .

Paramètre de  
Translation, mesure le  
temps

Paramètre d'échelle,  
mesure la fréquence

Signal à  
analysé

$$CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t - \tau}{s}\right) dt \quad (10)$$

La **Transformée Continue en ondelette** (*coefficients de l'ondelette*) du signal  $x(t)$  en utilisant l'ondelette mère d'analyse  $\psi(\cdot)$

Complexe conjugué de l'ondelette fille. Tous les **noyaux** (*kernels*) sont obtenus par une **translation** (*shifting*) et/ou **mise en échelle** (*scaling*) de **l'ondelette mère**  $\psi(\cdot)$

(\*) complexe conjugué de la fonction  $\psi$

le signal transformé est une fonction de deux variables,  $\tau$  et  $s$ , les paramètres de **translation** (*translation*) et d'**échelle** (*scale*), respectivement.  $\Psi_{\tau,s}(t)$  est la fonction de transformation, appelée **l'ondelette fille** (*baby functions, daughter wavelets*).

## 2. Transformée en Ondelette Continue

L'ondelette mère obtient son nom dû à deux propriétés importantes de l'analyse d'ondelette comme expliqué ci-dessous :

Le terme *ondelette* signifie une petite onde (selon ses inventeurs le géophysicien Français Morlet et son collaborateur physicien croate Grossman au début des années 80). La petite dimension se rapporte à la condition que cette fonction (de fenêtre) est de longueur finie (*compactly supported*). L'*onde* se rapporte à la condition que cette fonction est oscillante. Le terme *mère* implique que les fonctions avec différentes régions de support qui sont employées dans le processus de transformation sont dérivées d'une fonction principale, ou l'ondelette mère. En d'autres termes, l'ondelette mère est un prototype pour produire d'autres fonctions de fenêtre.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

- Le terme *translation* est employée dans le même sens qu'elle a été employé dans la STFT; il est lié à l'endroit de la fenêtre, car la fenêtre est décalée sur le signal. Ce terme, correspond évidemment à l'information temporelle dans le domaine de transformation.
- Cependant, nous n'avons pas un paramètre de fréquence, comme nous l'avions eu avant pour la STFT. Au lieu de cela, nous avons le paramètre d'*échelle* (*scale*) qui est défini comme  $1/\text{fréquence}$ . Le terme fréquence est réservé à la STFT.

### *Echelle (scale)*

Le paramètre d'échelle dans l'analyse d'ondelette est semblable à l'échelle utilisée dans les cartes routières. Comme dans le cas des cartes routières, les hautes échelles correspondent à une vue globale non-détaillée (du signal), et les basses échelles correspondent à une vue détaillée.

De même, en termes de fréquence, les basses fréquences (hautes échelles) correspondent à une information globale d'un signal (qu'enjambe habituellement le signal entier), tandis que les hautes fréquences (basses échelles) correspondent à une information détaillée d'une forme cachée dans le signal (qui se produit habituellement dans un temps relativement court).

## 2. Transformée en Ondelette Continue

En pratique, les basses échelles (hautes fréquences) apparaissent habituellement de temps en temps en tant que des *transitoires* (*bursts* or *spikes*). Les hautes échelles (basses fréquences) durent habituellement la durée entière du signal.

L'échelle, comme une opération mathématique, *dilate* ou *comprime* un signal. Grandes échelles correspondent aux signaux dilatés et les petites échelles correspondent aux signaux comprimés.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

En termes de fonctions mathématiques, si  $f(t)$  est une fonction donnée  $f(\mathbf{S}t)$  avec  $\mathbf{S} = k/s$ ,  $k = \text{const.}$ , correspond à

- une version contractée (comprimée) de  $f(t)$  si  $\mathbf{S} > 1$  et à
- une version augmentée (dilatée) de  $f(t)$  si  $\mathbf{S} < 1$  (ou  $s > 1$ ).

Cependant, dans la définition (10) de la transformée en ondelettes, le terme échelle est employé dans le dénominateur, et donc, elle est l'opposé de  $s$ , c'est-à-dire, **les échelles  $s > 1$  dilatent le signal (basses fréquences) tandis que les échelles  $s < 1$ , compriment le signal (hautes fréquences).**

## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Exemple 9

Signal  $x(S_t) = \text{Cos}(2\pi ft) = \text{Cos}(2\pi t/s)$   
avec  $S = 2\pi/s$   
représenté sur 4 échelles.

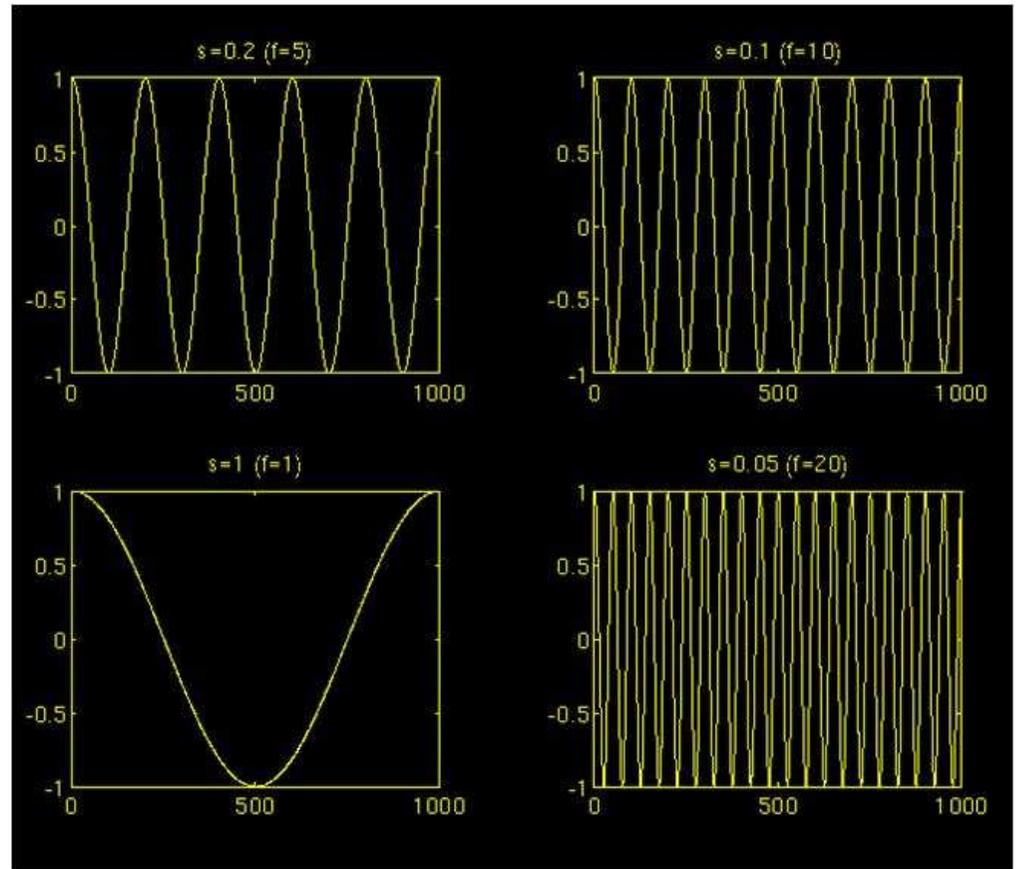


Fig. 24 [1]

Tous les signaux indiqués en figure 24 sont dérivés du même signal de cosinus, c'est-à-dire, ils sont des versions dilatées ou comprimées de la même fonction. Dans cette figure,  $s = 0.05$  est la plus petite échelle, et  $s=1$  est la plus grande échelle.

## Calcul de la CWT

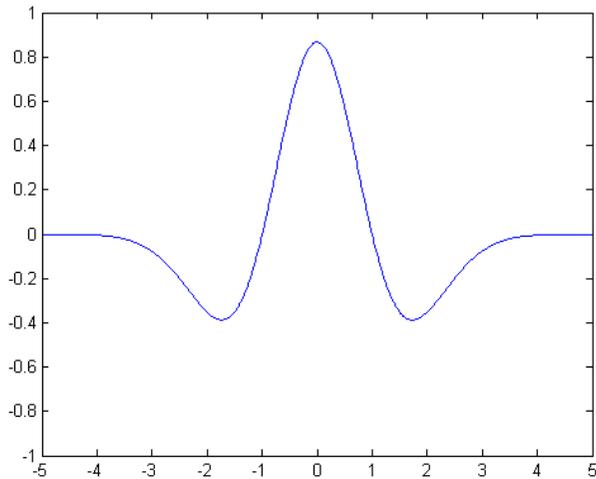
Soit  $x(t)$  le signal à être analysé. L'*ondelette mère*  $\psi(t)$  est choisie pour servir de prototype à toutes les fenêtres dans le processus. Toutes les fenêtres qui sont employées (ondelettes filles) sont des versions dilatées (ou comprimées) et décalées de l'ondelette mère.

Constante de normalisation

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (11)$$

Il y a un certain nombre de fonctions qui sont employées à cette fin. L'*ondelette de Morlet* et la *fonction de chapeau mexicain* sont deux candidates, et elles sont employées pour l'analyse des ondelettes des exemples qui sont présentés plus loin.

## 2. Transformée en Ondelette Continue



Mex-Hat

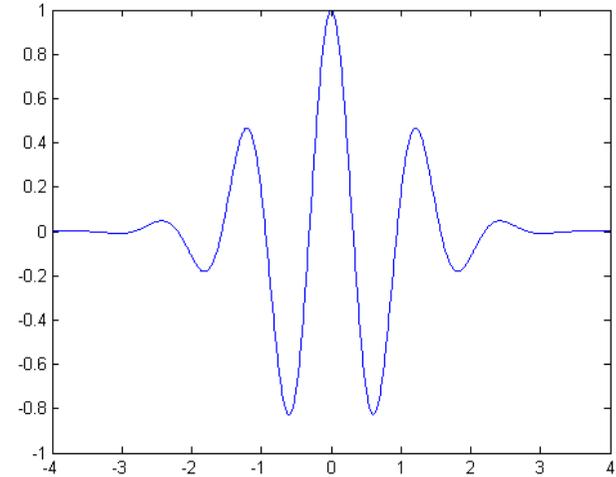
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} \left( \left( \frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right)$$

C'est la dérivée seconde d'une fonction Gaussienne scalaire

Dont le noyau est  $e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ .

$\sigma$  : paramètre de dilatation qui détermine la largeur de la fenêtre

Fig. 25

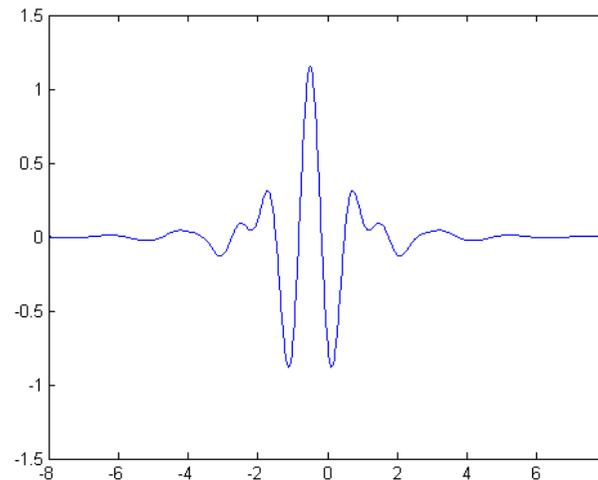


Morlet

$$\psi(t) = e^{iat} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

$a$  : paramètre de modulation (modulation parameter)

$\sigma$  : paramètre d'étallonnage (scaling parameter)



Meyer : définie dans le domaine fréquentiel

Pour des liens utiles sur les ondelettes, consulter par exemple : <http://en.wikipedia.org/wiki/Wavelet>

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Une fois que l'ondelette mère est choisie le calcul commence par  $s = 1$  et la CWT est calculée pour toutes les valeurs de  $s < 1$  et  $s > 1$ . Cependant, selon le signal, une transformée complète n'est habituellement pas nécessaire. Pour tous les besoins pratiques, les signaux sont limités en largeur de la bande (*band limited*), et donc, le calcul de la transformée pour un intervalle limité d'échelles est habituellement adéquat. Dans certaines études, un intervalle fini de valeurs pour  $s$  sont employés.

Si le signal a une composante spectrale qui correspond à la valeur courante de  $s$ , le produit de l'ondelette mère avec le signal à l'endroit où cette composante spectrale existe donne une valeur relativement grande. Autrement, ce produit donne une valeur relativement petite ou nulle.

### Les étapes pour le calcul de la CWT

#### 1. Initialisation de $s$

Pour la convenance, la procédure de calcul sera commencée à partir de l'échelle  $s=1$  et continuera pour les valeurs croissantes de  $s$ , c'est-à-dire, l'analyse commencera à partir des hautes fréquences et procédera vers les basses fréquences. La première valeur de  $s$  correspondra alors à l'ondelette la plus comprimée.

#### 2. Calcul de la CWT (équ. 10)

L'ondelette est placée au début du signal au point qui correspond au temps  $= 0$ . La fonction d'ondelette à l'échelle 1 est multipliée par le signal puis intégrée sur tout le temps. Le résultat de l'intégration est alors multiplié par un nombre constant  $\frac{1}{\sqrt{s}}$ . Cette multiplication est faite pour la normalisation d'énergie de sorte que le signal transformé ait la même énergie à chaque échelle. Le résultat final est la valeur de la transformée, c'est-à-dire la valeur de la CWT au temps zéro et à l'échelle  $s = 1$ . En d'autres termes, c'est la valeur qui correspond au point  $\tau = 0, s = 1$  dans le plan échelle-temps.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

### 3. Incrémentation de $\tau$

L'ondelette à l'échelle  $s = 1$  et ensuite translatée (ou décalée) vers la droite par une valeur  $\tau$  à l'emplacement  $t = \tau$ , et l'équation (10) est calculée de nouveau pour obtenir la CWT au point  $t = \tau$ ,  $s = 1$  dans le plan échelle-temps.

Ce procédé est répété jusqu'à ce que l'ondelette atteigne l'extrémité du signal. Une rangée des points sur le plan échelle-temps pour l'échelle  $s = 1$  est maintenant accomplie.

Puis,  $s$  est augmenté par une petite valeur. Notez qu'il s'agit d'une transformation continue, et donc,  $\tau$  et  $s$  doivent être incrémentés d'une façon continue. Cependant, si cette transformée a besoin d'être calculée par un ordinateur, alors les deux paramètres sont augmentés par un pas suffisamment petit. Ceci correspond à l'échantillonnage du plan échelle-temps.

Le procédé ci-dessus est répété pour chaque valeur de  $s$ . Chaque calcul pour une valeur donnée de  $s$  remplit une rangée simple dans le plan échelle-temps. Le processus de calcul de CWT du signal sera achevé quand toutes les valeurs désirées de  $s$  sont considérées.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Exemple 10

Le signal et la fonction d'ondelettes sont présentés pour quatre valeurs différentes de tau. Le signal est une version tronquée du signal montre en figure 23. La valeur d'échelle est de 1, correspondant à la plus faible échelle, ou plus haute fréquence. Notez comment elle est compact (la fenêtre bleue). Elle devrait être aussi étroite que la composante de la plus haute fréquence qui existe dans le signal.

Quatre endroits distincts de la fonction d'ondelettes sont présentés en figure à  $\tau_0 = 2$ ,  $= 40$ ,  $= 90$ , et à  $\tau_0 = 140$ . À chaque endroit, il est multiplié par le signal. De toute évidence, le produit est différent de zéro que lorsque le signal est dans la région de l'appui (*support*) de l'ondelette, et elle est nulle ailleurs.

$$CWT_x^\psi(\tau, s)$$

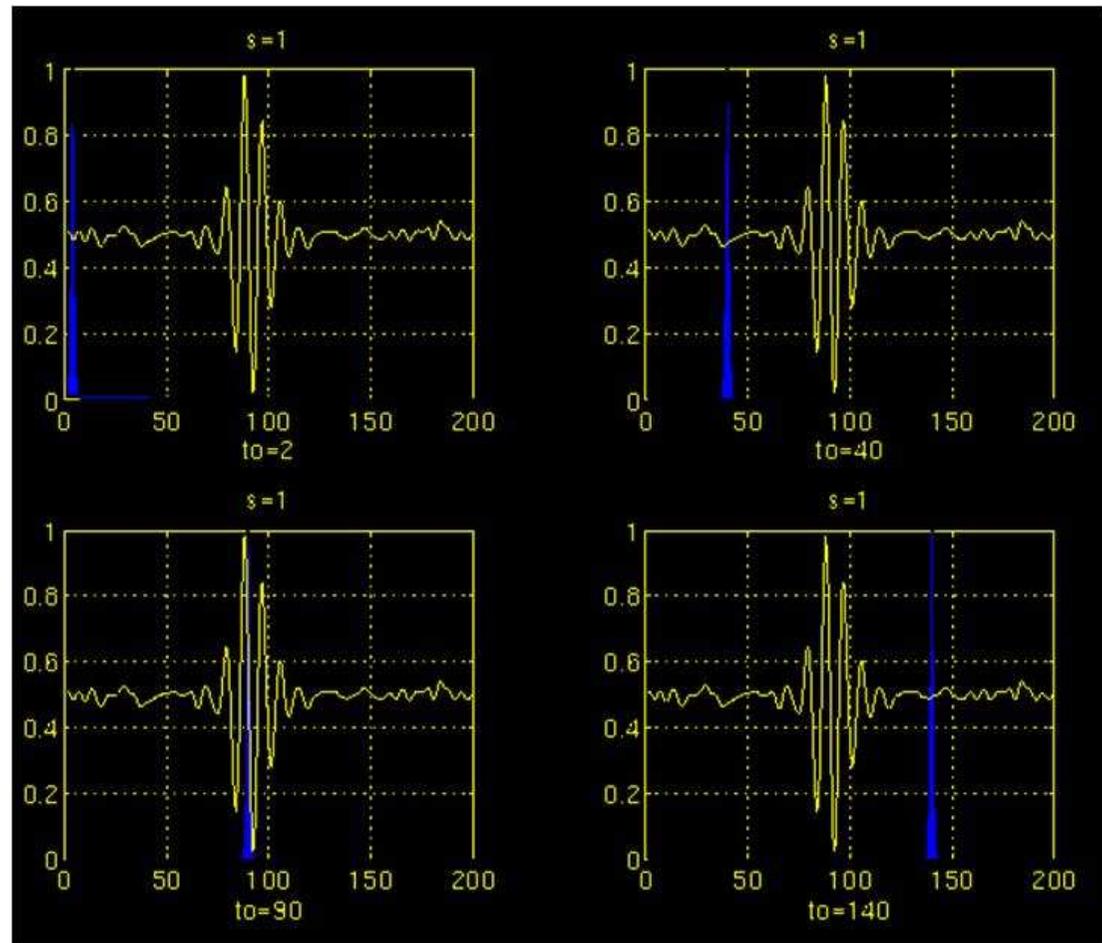


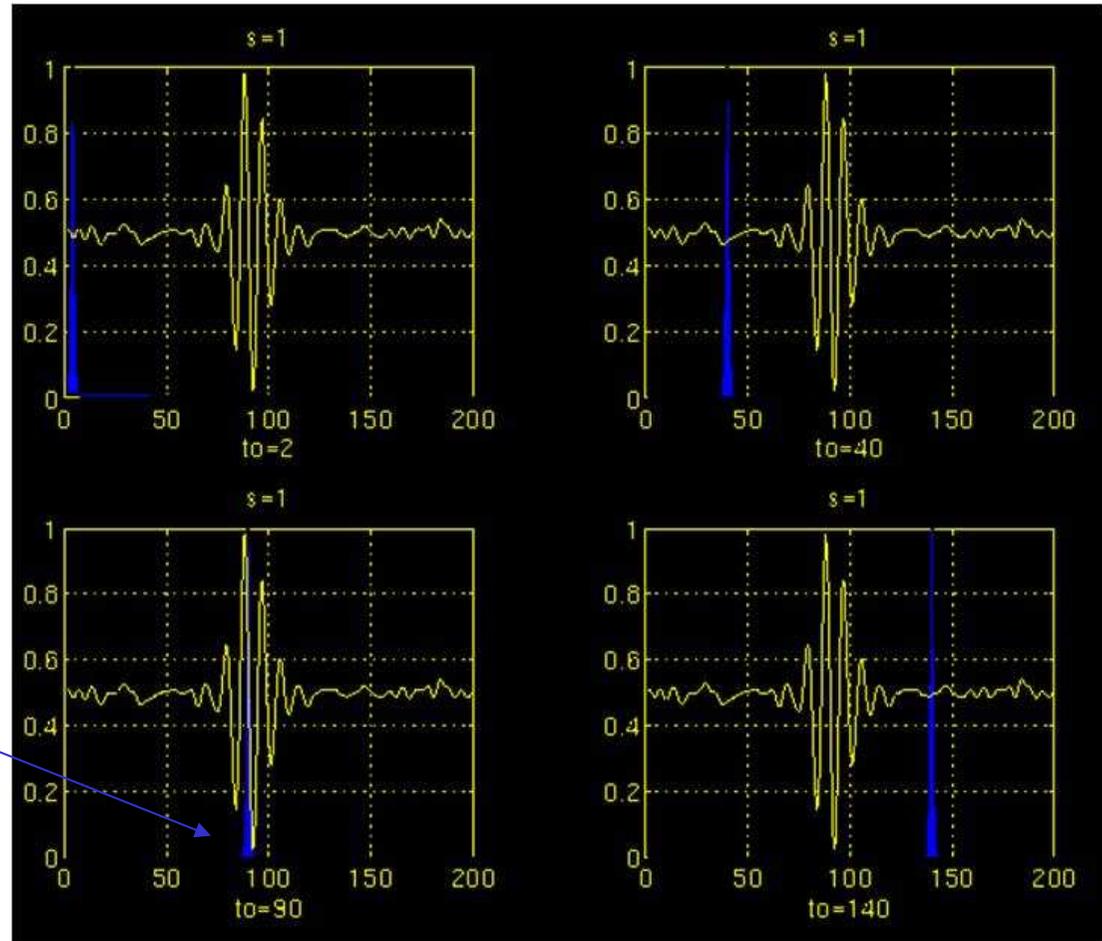
Fig. 26 [1]

2. Transformée en Ondelette Continue

Exemple 10 (suite)

Si le signal a une composante spectrale qui correspond à la valeur courante de  $s$  (qui est 1 dans ce cas), le produit de l'ondelette avec le signal à l'endroit où cette composante spectrale existe donne une valeur relativement grande. Si la composante spectrale qui correspond à la valeur courante de  $s$  n'est pas présente dans le signal, la valeur produite sera relativement faible, ou nulle. Le signal en figure 26 possède des composantes spectrales comparables à la largeur de la fenêtre en  $s = 1$  autour de  $t = 100$  ms.

$$CWT_x^\psi(\tau, s)$$

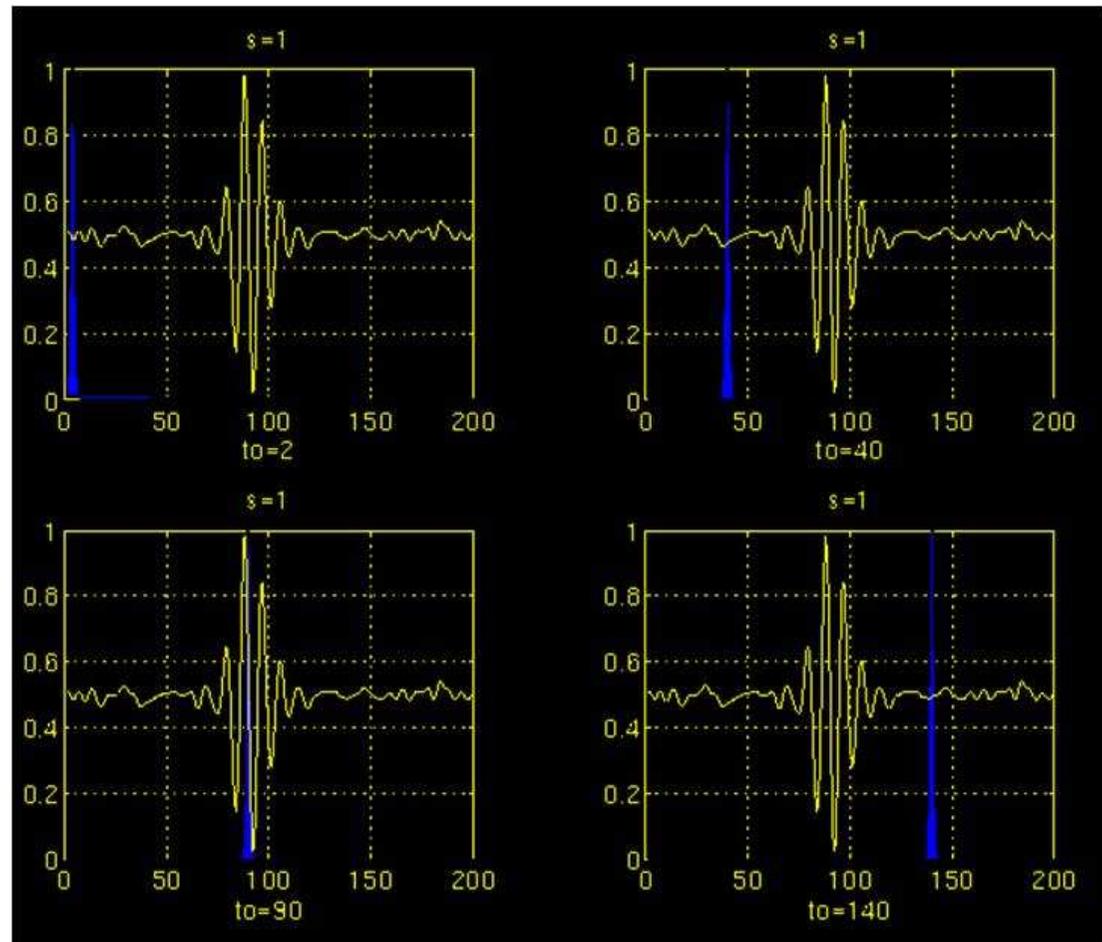


## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Exemple 10 (suite)

La CWT produira des valeurs élevées pour des basses échelles autour de 100 ms, et des petites valeurs ailleurs. D'autre part, pour les hautes échelles, la CWT donnent des grandes valeurs pour presque la durée entière du signal, puisque les basses fréquences existent à tout moment.

$$CWT_x^\psi(\tau, s)$$



## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Exemple 10 (suite)

$s = 5$

Notez comment la largeur de la fenêtre change avec l'augmentation de l'échelle (diminution de la fréquence). À mesure que la largeur de la fenêtre augmente, la transformée commence à sélectionner les composants de basse fréquence.

$$CWT_x^\psi(\tau, s)$$

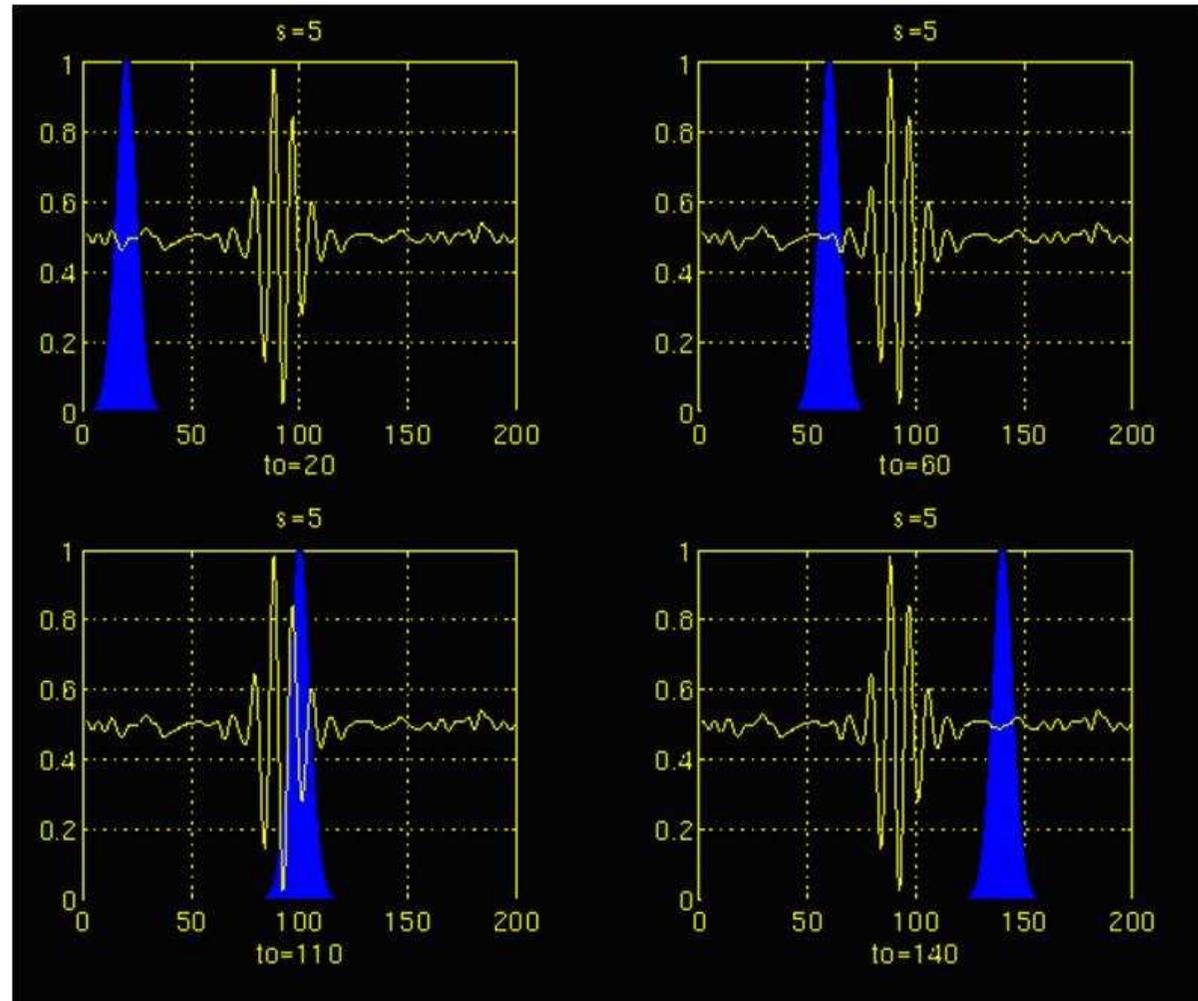


Fig. 27 [1]

## 2. Transformée en Ondelette Continue

$$CWT_x^\psi(\tau, s)$$

### Exemple 10 (suite)

$s = 20$

Notez comment la largeur de la fenêtre change avec l'augmentation de l'échelle (diminution de la fréquence). À mesure que la largeur de la fenêtre augmente, la transformée commence à sélectionner les composants de basse fréquence.

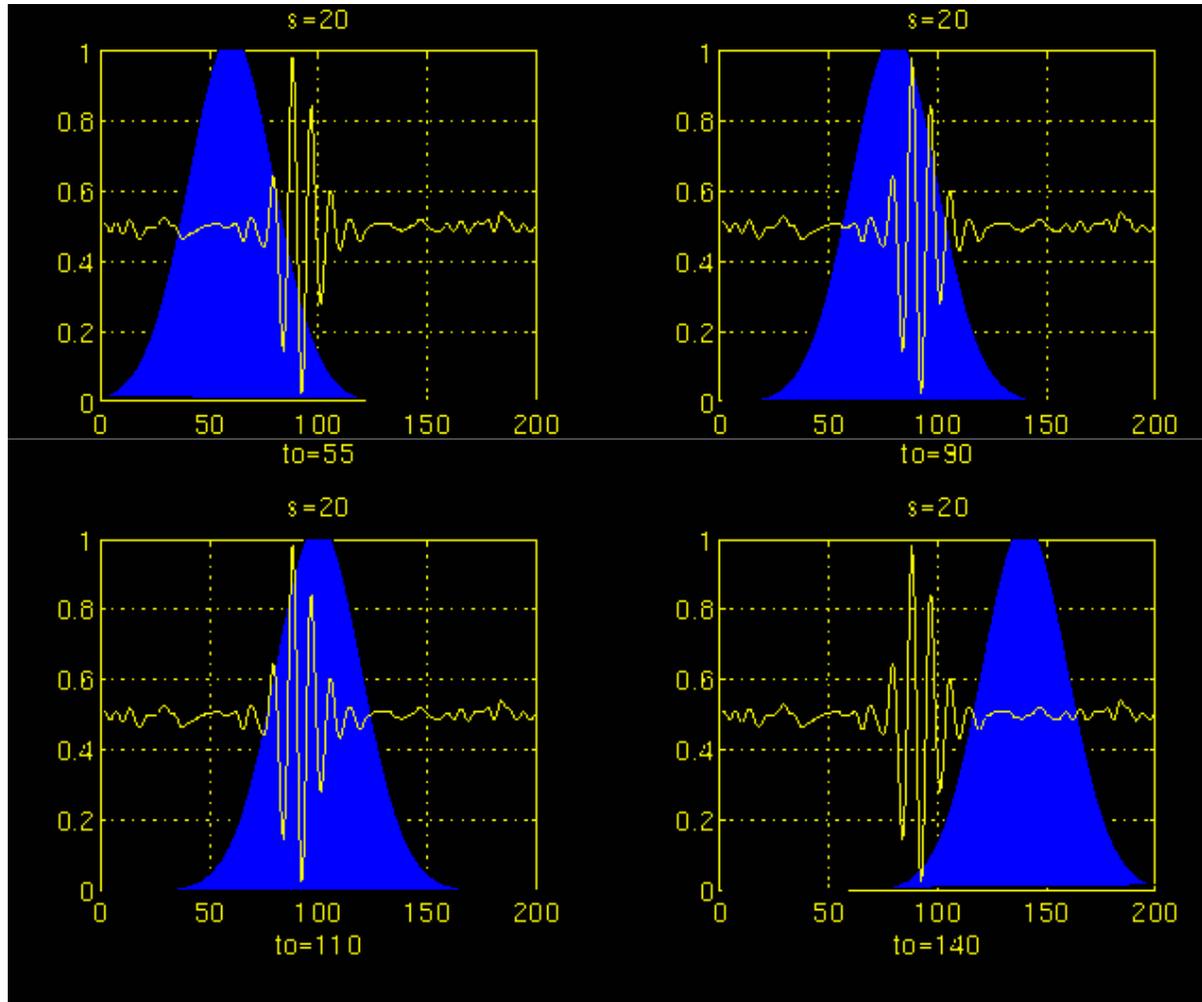


Fig. 28 [1]

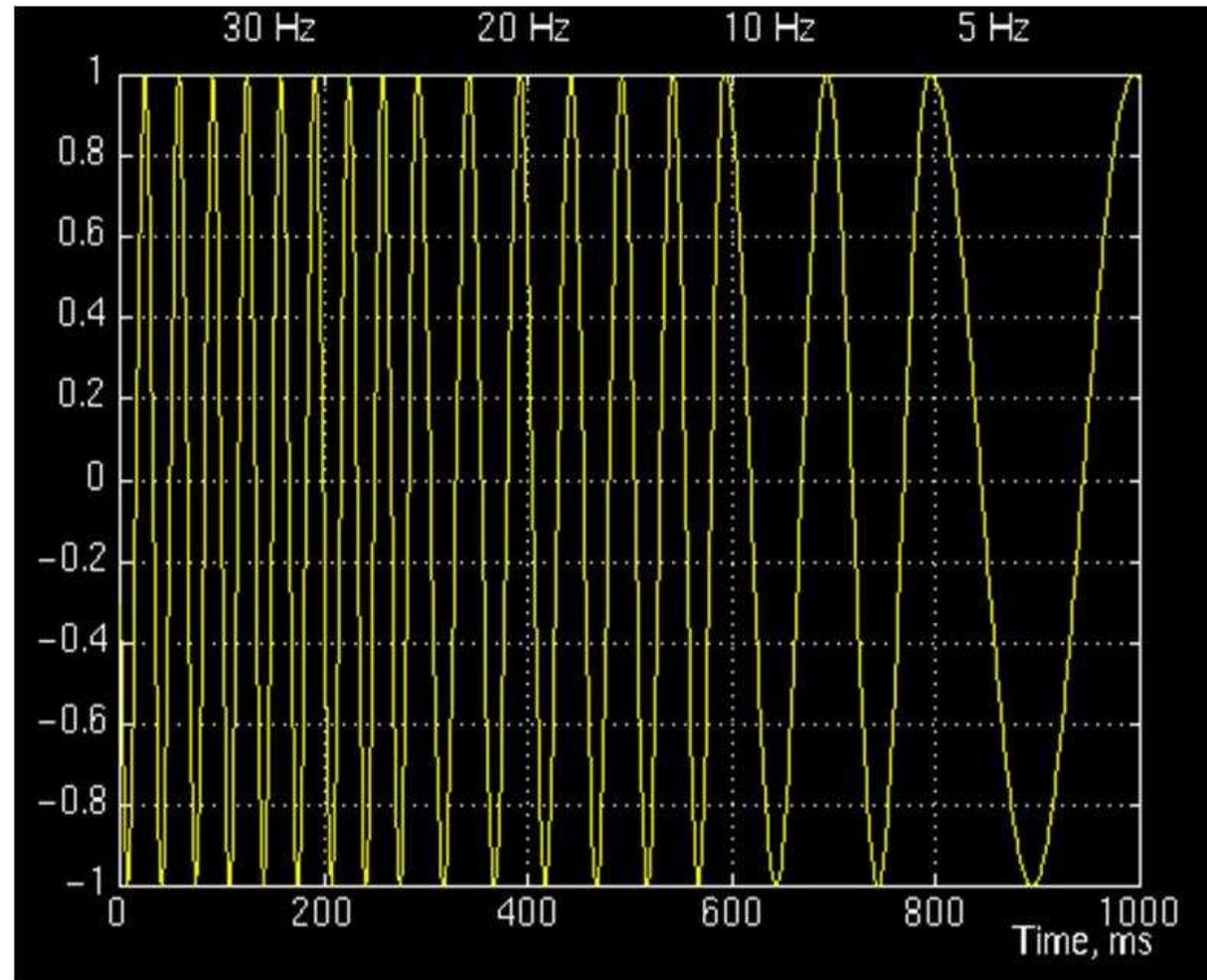
## 2. Transformée en Ondelette Continue

En conséquence, pour toutes les échelles et à chaque temps (intervalle), un point du plan temps-échelle est calculé. Les calculs à une échelle construisent les rangées de plan échelle-temps, et les calculs à différentes échelles construisent les colonnes de plan échelle- temps.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Exemple 11

Considérons ce signal non stationnaire. Le signal est composé de 4 composantes : 30 Hz, 20 Hz, 10 Hz et 5 Hz.



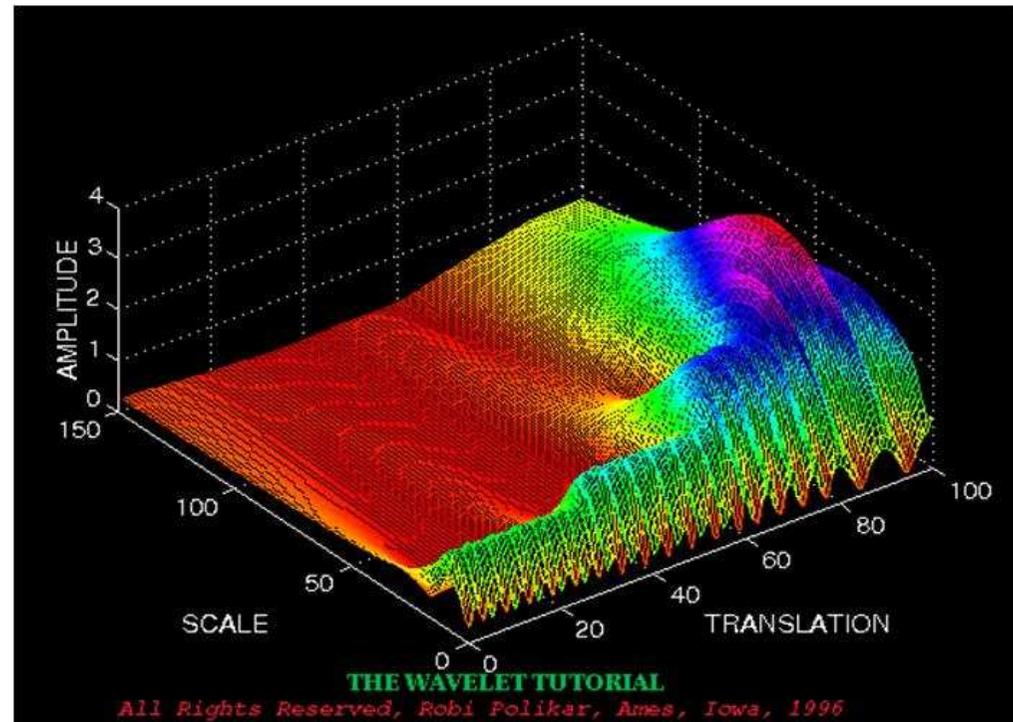
**Fig. 29 [1]**

## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Exemple 11 (suite)

La CWT du signal. Notez que les axes sont la translation et l'échelle, pas le temps et la fréquence. Cependant, la translation est strictement liée au temps, car elle indique l'endroit où l'ondelette mère est situé. La translation de l'ondelette mère peut être considérée comme le temps écoulé depuis  $t = 0$ . Le paramètre d'échelle  $s$  dans l'équation 14 est en fait inverse de la fréquence.

$$CWT_x \psi(\tau, s)$$



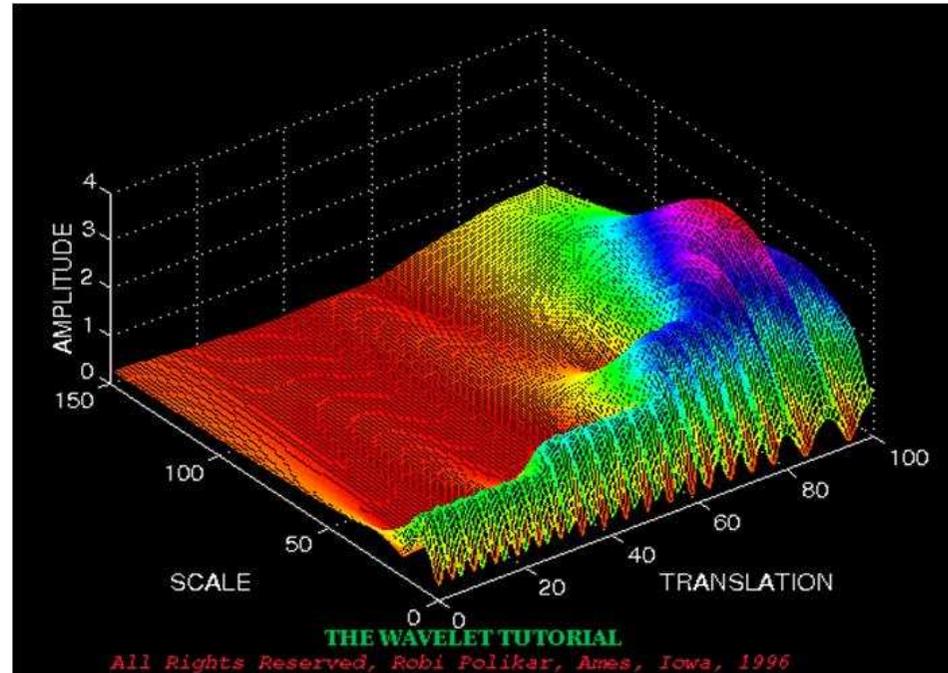
**Fig. 30** [1] « *Scaleogram* ou *Scalogram* » : coefficients des ondelettes en fonction de  $s$  et  $\tau$ . Les axes sont normalisés. A peu près, les 100 points sur la translation correspondent à 1000 ms, et les 150 points sur l'échelle correspondent à une bande de fréquence de 40 Hz. (les nombres sur l'axe de translation et de l'échelle ne correspondent pas aux secondes et Hz, respectivement, ils ne sont que le nombre d'échantillons dans le calcul).

## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Exemple 11 (suite)

De plus petites échelles correspondent à des fréquences plus élevées, à savoir, la fréquence diminue avec l'augmentation échelle, par conséquent, la partie du graphe avec des échelles autour de zéro, correspondent en fait aux plus hautes fréquences dans l'analyse, et que des échelles élevées correspondent aux basses fréquences. Rappelons-nous que la première composante du signal a 30 Hz (fréquence la plus élevée), ce qui apparaît au plus bas échelle à des translations de 0 à 30. Vient ensuite la composante 20 Hz, le deuxième plus haute fréquence, et ainsi de suite. La composante 5 Hz apparaît à la fin de l'axe de translation (comme prévu), et à des échelles supérieures (basses fréquences) à nouveau comme prévu.

$$CWT_x \psi(\tau, s)$$



## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Exemple 11 (suite)

Figure 31 est la Figure 30 vue d'un autre angle.

À la différence du STFT qui a une résolution constante à tout les instants du temps et à toutes les fréquences, la WT a une bonne résolution temporelle et une faible résolution fréquentielle en hautes fréquences, et une bonne résolution fréquentielle et une faible résolution temporelle aux basses fréquences.

$$CWT_x^\psi(\tau, s)$$

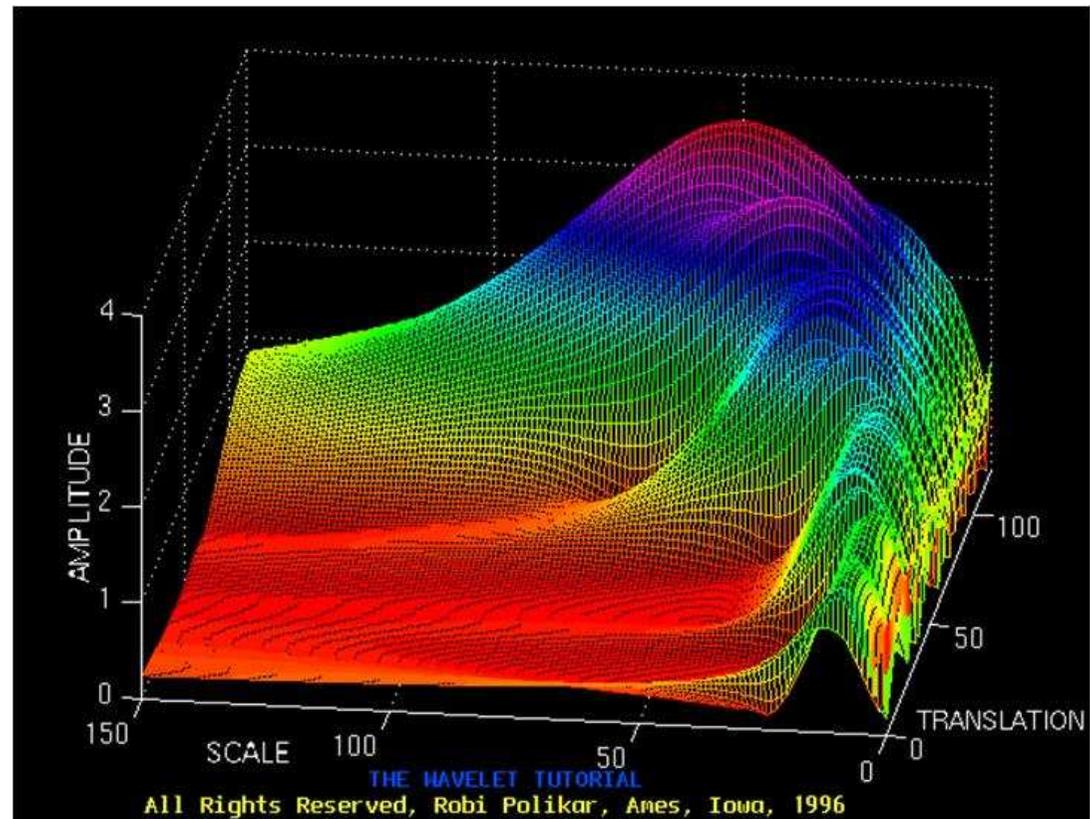


Fig. 31 [1]

## Résolutions en temps et en fréquence

Chaque case correspond à une valeur de la WT dans le plan temps-fréquence. Remarquez que les cases possèdent certaines surfaces constantes non nulles qui impliquent que la valeur d'un point particulier dans le plan temps-fréquence ne peut pas être connue. Tous les points dans ce plan qui se situent dans une case sont représentés par une seule valeur sur la WT.

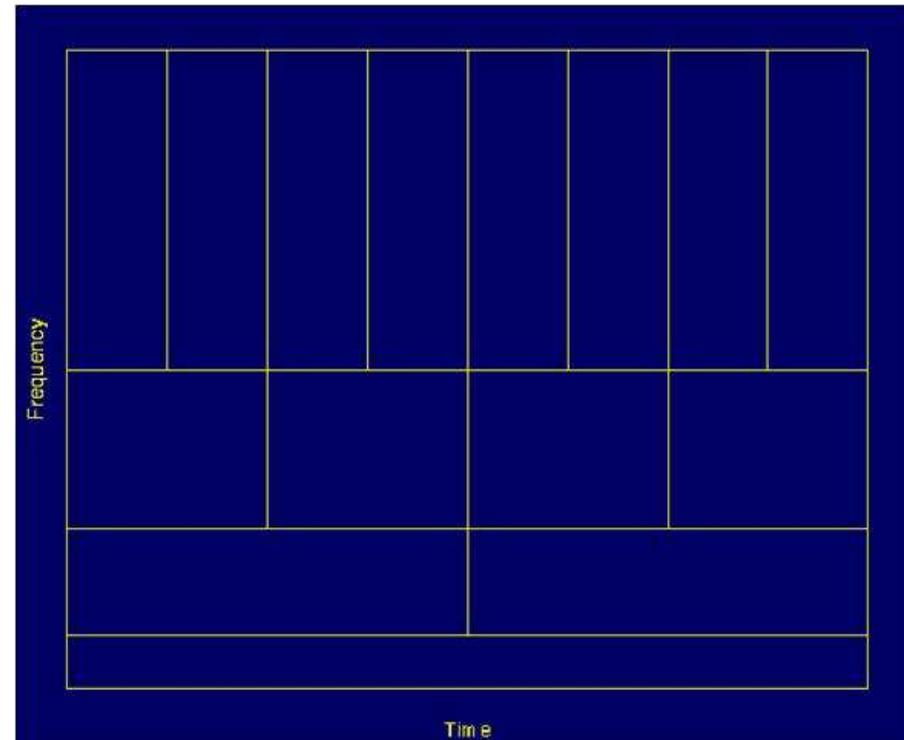


Fig. 32 [1]

## 2. Transformée en Ondelette Continue

- Malgré que les largeurs et les hauteurs des cases changent, la surface (déterminée par la CWT) est constante, c'est-à-dire chaque case représente une part égale du plan temps-fréquence, mais donne des proportions différentes pour le temps et pour la fréquence.
- Aux basses fréquences, les hauteurs des cases sont plus courts (ce qui correspond à des meilleures résolutions fréquentielles, car il y a moins d'ambiguïté quant à la valeur exacte de la fréquence), mais leurs largeurs sont plus longues (ce qui correspond à des mauvaises résolutions temporelles, car il y a plus d'ambiguïté quant à la valeur exacte du temps).
- Aux fréquences plus élevées la largeur des cases baisse, c'est-à-dire, la résolution temporelle s'améliore, et l'hauteur des cases augmente, c'est-à-dire, la résolution en fréquence devient plus faible.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

- Dans le cas de STFT les résolutions temporelles et fréquentielles sont constantes. Par conséquent le plan temps-fréquence se compose de carrées constantes (déterminée par la STFT).
- Toutes les surfaces sont limitées par à une valeur minimale  $1/4\pi$ .
- D'autre part, pour une ondelette mère donnée, les dimensions des cases peuvent être changées, tout en gardant la même surface. C'est exactement ce que la transformation en ondelette fait.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

### Inverse de la transformée en ondelette continue (ICWT)

La fonction d'origine  $x(t)$  peut être reconstruite :

Signal  
d'origine

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x^\psi(\tau, s) \frac{1}{|s|^{5/2}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau ds \quad (12a)$$

Le *constant d'admissibilité* (la TF de  $\psi$ ) :

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|} d\zeta, \quad 0 < c_\psi < +\infty \quad (12b)$$

Où  $\hat{\psi}(\zeta)$  est la TF de  $\psi(t)$  avec  $\hat{\psi}(0) = \int \psi(t) dt = 0$  qui implique que l'ondelette doit être oscillatoire.

## Idée principale de la théorie de l'analyse en ondelettes

La TF utilise des **fonctions de base** (**basis functions**) pour analyser et reconstruire une fonction. La TF est basée sur le *principe de linéarité* : chaque vecteur dans un espace vectoriel peut être écrit comme une combinaison linéaire des *vecteurs de base* (**basis vectors**) dans cet espace vectoriel, c'est à dire, en multipliant les vecteurs par des nombres constants, puis en prenant la somme des produits. L'analyse du signal implique l'estimation de ces chiffres constants (*coefficients de transformation*, ou les *coefficients de Fourier*, *coefficients de l'ondelette*, etc.) La synthèse, ou de la reconstruction, correspond à l'équation de calcul de combinaison linéaire.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Toutes les définitions et les théorèmes relatifs à ce sujet peuvent être trouvées, par exemple, dans les livres de Stephane Mallat et Keiser [4, 6].

### Vecteurs de base

Une base  $V$  d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, tel que tout vecteur  $v$  de  $V$  peut être écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs de base. Il peut y avoir plus d'une base pour un espace vectoriel. Cependant, tous ont le même nombre de vecteurs, et ce nombre est connu sous le nom de la *dimension de l'espace vectoriel*. Par exemple dans l'espace à deux dimensions, la base aura deux vecteurs

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Soit  $\mathbf{b}_k$  un vecteur de base et  $v_k$  son coefficient associé

$$\mathbf{v} = \sum_k v_k \mathbf{b}_k \quad (13)$$

Ce concept, donné en termes de vecteurs, peut facilement être généralisée à des fonctions, par le remplacement des vecteurs de base  $\mathbf{b}_k$  par les fonctions de base  $\phi_k(t)$ , et le vecteur  $\mathbf{v}$  par une fonction  $f(t)$ .

$$f(t) = \sum_k \mu_k \phi_k(t) \quad (14)$$

Les fonctions exponentielle complexe (sinus et cosinus) sont les fonctions de base pour le TF. De plus, elles sont des fonctions orthogonales, qui fournissent certaines propriétés désirables pour la reconstruction.

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Soit  $f(t)$  et  $g(t)$  deux fonctions dans  $L^2[a, b]$ . ( $L^2[a, b]$  désigne l'ensemble de carré des fonctions intégrables dans l'intervalle  $[a, b]$ ). Le produit scalaire de deux fonctions est défini par

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) g^*(t) dt \quad (15)$$

Selon cette définition, le CWT peut être considéré comme le produit scalaire du signal de test avec fonctions de base de la

$\psi_{\tau,s}^*(t)$  :

$$CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{\tau,s}^*(t) dt \quad (16)$$

où

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (17)$$

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Cette définition de la CWT montre que l'analyse en ondelettes est une mesure de similitude entre les fonctions de base (ondelettes) et le signal lui-même. Ici la similitude est dans le sens de même contenu fréquentiel. Les coefficients calculés de CWT se réfèrent à la proximité du signal à l'ondelette à l'échelle courant.

Ceci clarifie davantage la discussion précédente sur la corrélation du signal avec l'ondelette à une certaine échelle. Si le signal est une composante importante de fréquence correspondant à l'échelle courant, l'ondelette (la fonction de base) à l'échelle courant sera similaire ou proche du signal à l'endroit particulier où cette composante de fréquence se produit. Par conséquent, le coefficient de CWT calculé à ce point dans le plan temps-échelle sera un nombre relativement important.

## Produits scalaires, Orthogonalité, et Orthonormalité

Deux vecteurs  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est égal à zéro :

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_n \mathbf{v}_n \mathbf{w}_n^* = 0 \quad (18)$$

De même, deux fonctions  $f$  et  $g$  sont dits *orthogonales* les unes aux autres si leur produit scalaire est nul :

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) g^*(t) dt = 0 \quad (19)$$

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Un ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  est dit *orthonormé*, s'ils sont deux à deux orthogonaux les uns aux autres, et tous ont une longueur de "un". Cela peut être exprimé comme suit:

$$\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n \rangle = \delta_{mn} \quad (20)$$

où  $\delta_{kl} = 0$ , si  $k \neq l$  et  $\delta_{kl} = 1$ , si  $k = l$   
est la fonction de Dirac (Kronecker).

De même, un ensemble de fonctions  $\{\phi_k(t)\}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , est dit *orthonormé* si (conditions d'orthogonalité) :

$$\int_a^b \varphi_k(t) \varphi_l^*(t) dt = \delta_{kl}, \quad (21)$$

## 2. Transformée en Ondelette Continue

Comme indiqué plus haut, il peut y avoir plus d'un ensemble de fonctions de base (ou vecteurs). Parmi elles, les fonctions de base *orthonormées* (ou vecteurs) sont d'une importance particulière en raison des bonnes propriétés qu'elles fournissent à trouver ces coefficients analyse. Les bases orthonormales permettent le calcul de ces coefficients d'une manière direct et très simple en utilisant la propriété orthonormalité.

Pour les bases orthonormales, les coefficients,  $\mu_k$ , peuvent être calculés comme

$$\mu_k = \langle f, \phi_k \rangle = \int f(t) \cdot \phi_k^*(t) dt \quad (22)$$

## 2. Transformée en Ondelette Continue

et la fonction  $f(t)$  peut alors être reconstruit par l'équation (14) en remplaçant les coefficients  $\mu_k$ . Cela donne

$$f(t) = \sum_k \mu_k \phi_k(t) = \sum_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k(t) \quad (23)$$

Les bases orthonormales peuvent ne pas être disponibles pour chaque type d'applications où une version généralisée, ***bases biorthogonales*** peut être utilisée. Le terme "biorthogonales" se réfère à deux bases différentes qui sont orthogonales les uns aux autres, mais chacune ne forme pas un ensemble orthogonal.

Dans certaines applications, cependant, les bases biorthogonales peuvent également ne pas être disponibles, un cas où les frames (frames) peuvent être utilisés. Cadres constituent une partie importante de la théorie des ondelettes [4, 6, 7].

## Exemples

Les exemples suivants correspondent à des signaux réels non stationnaires. Ces signaux sont issus des bases de données de signaux qui représentent des potentiels évoqués liées à un évènement (*event related potentials*) pour une personne normale et pour une personne atteint d'une maladie d'Alzheimer. Puisque ces signaux sont des signaux réels, leur interprétation n'est pas simple. L'objectif de ces exemples est de donner uniquement une idée sur l'allure de CWT pour ces signaux.

2. Transformée en Ondelette Continue

Exemples (suite)

Signal de potentiel évoqué d'une personne normale

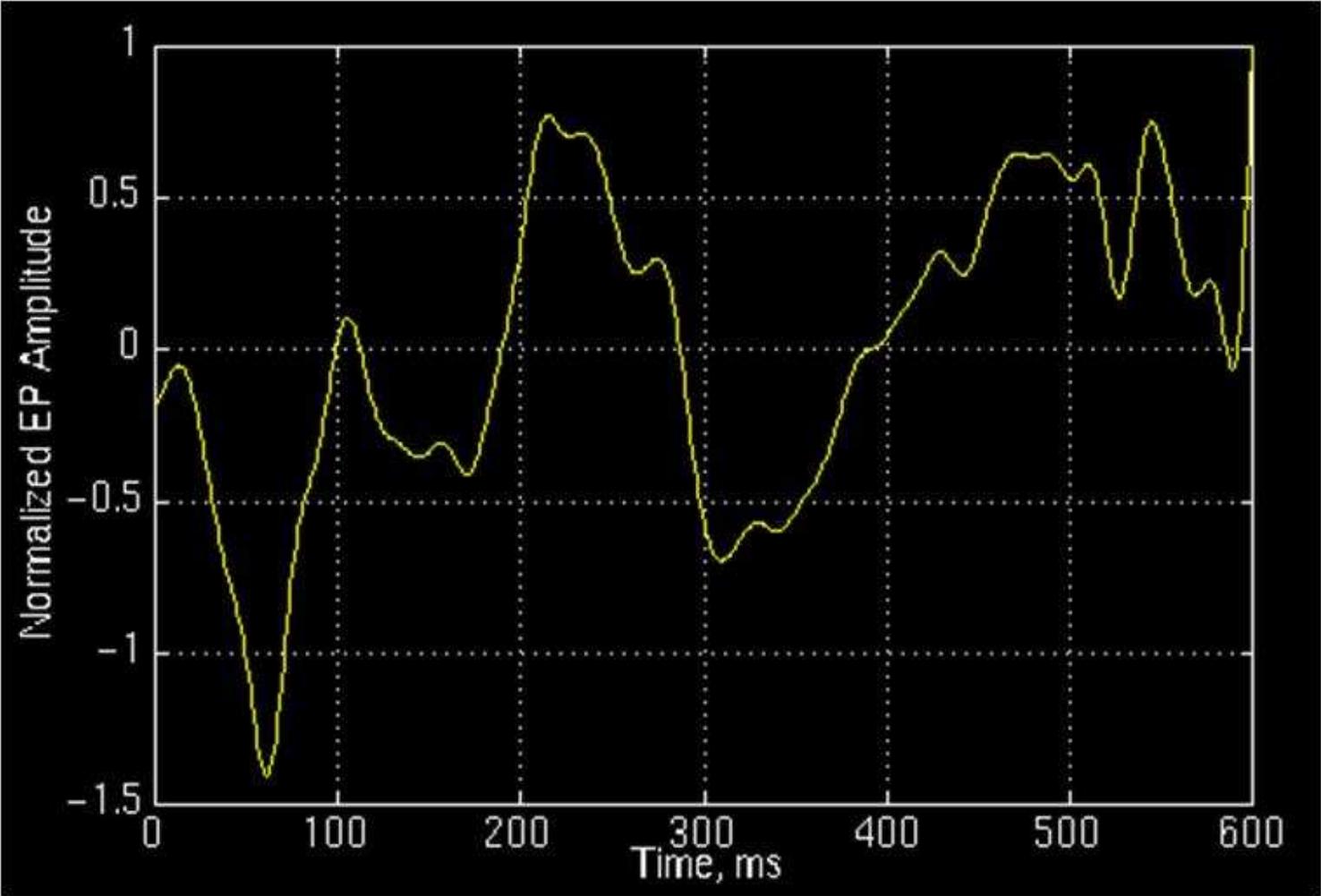


Fig. 33 [1]

2. Transformée en Ondelette Continue

Exemples (suite)

CWT de potentiel évoqué d'une personne normale

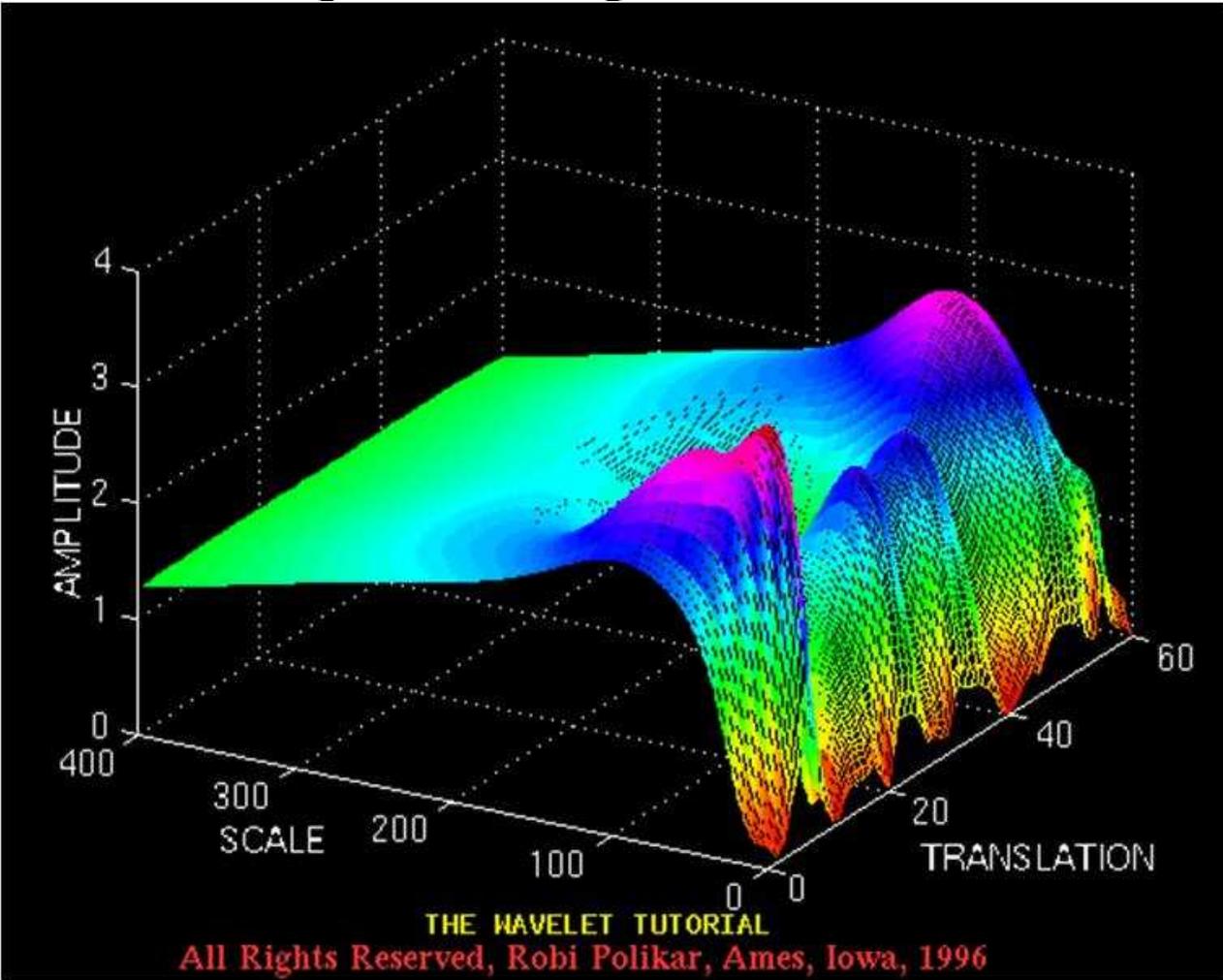


Fig. 34a [1]

2. Transformée en Ondelette Continue

Exemples (suite)

CWT de potentiel évoqué d'une personne normale

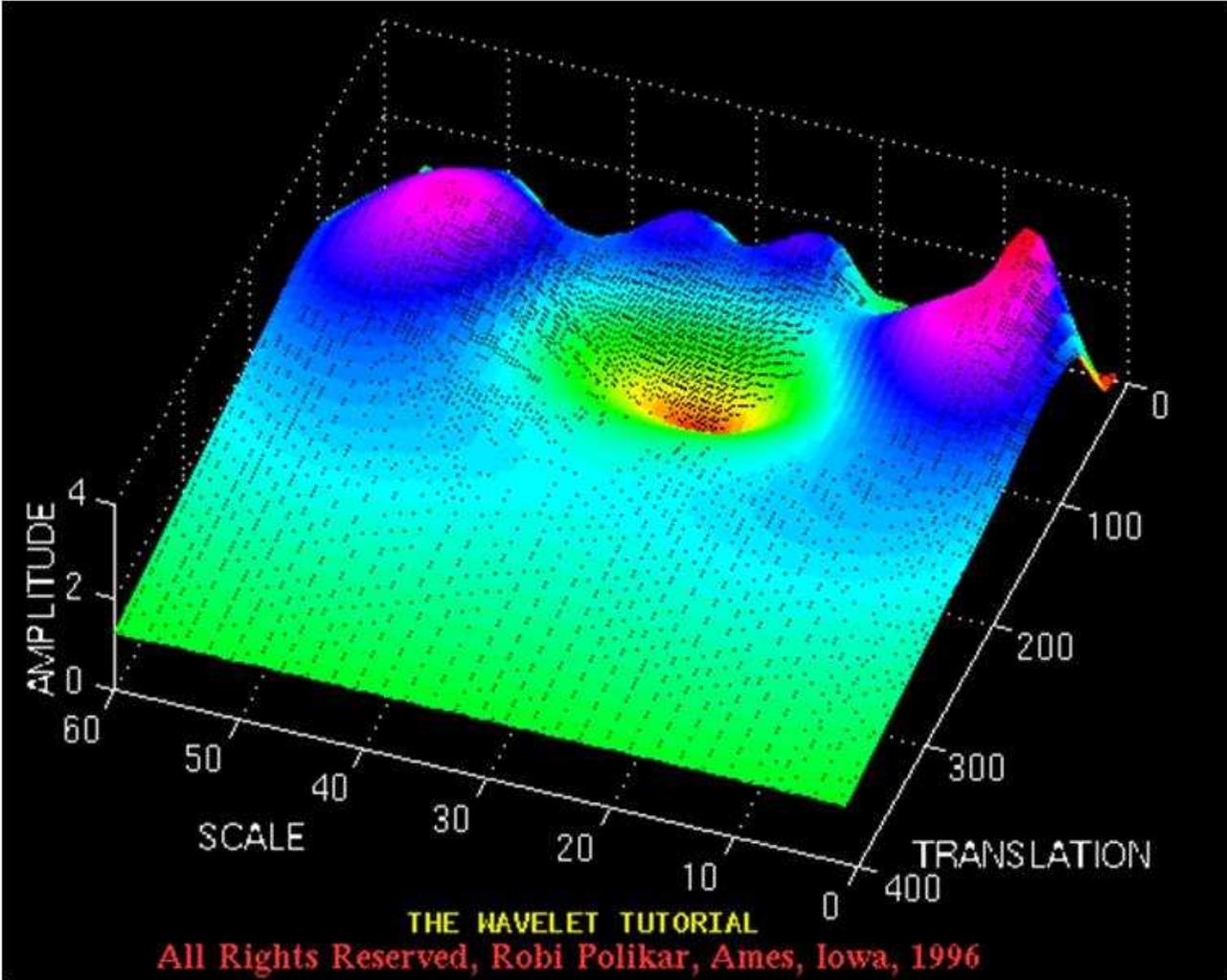


Fig. 34b [1] Un autre angle de vue.

Exemples (suite)

CWT de potentiel évoqué d'une personne normale (suite)

Un point important à noter ici est le fait que le calcul n'est pas un véritable WT continu, puisque ce calcul est effectué au nombre fini de valeurs de  $\tau$  et  $s$ . C'est seulement une version discrétisée de CWT, qui est expliqué plus tard dans ce document.

Notez, cependant, qu'il ne s'agit pas d'une *transformation par ondelettes discrète (DWT)* qui est la matière de la dernière partie de ce documents.

2. Transformée en Ondelette Continue

Exemples (suite)

Signal de potentiel évoqué d'une personne atteint d'une maladie d'Alzheimer

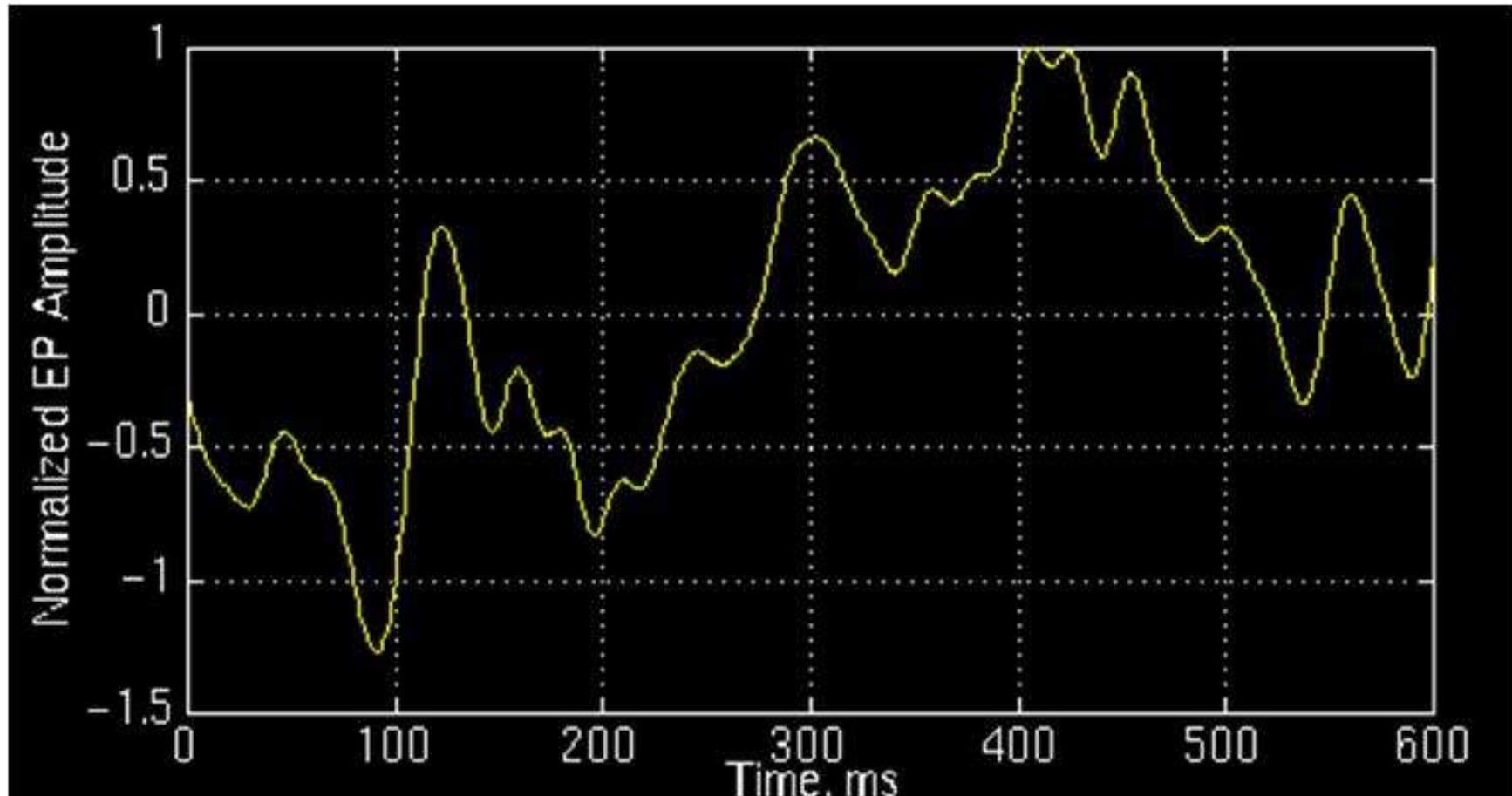


Fig. 35 [1]

2. Transformée en Ondelette Continue

Exemples (suite)

CWT de potentiel évoqué d'une personne atteinte d'une maladie d'Alzheimer (suite)

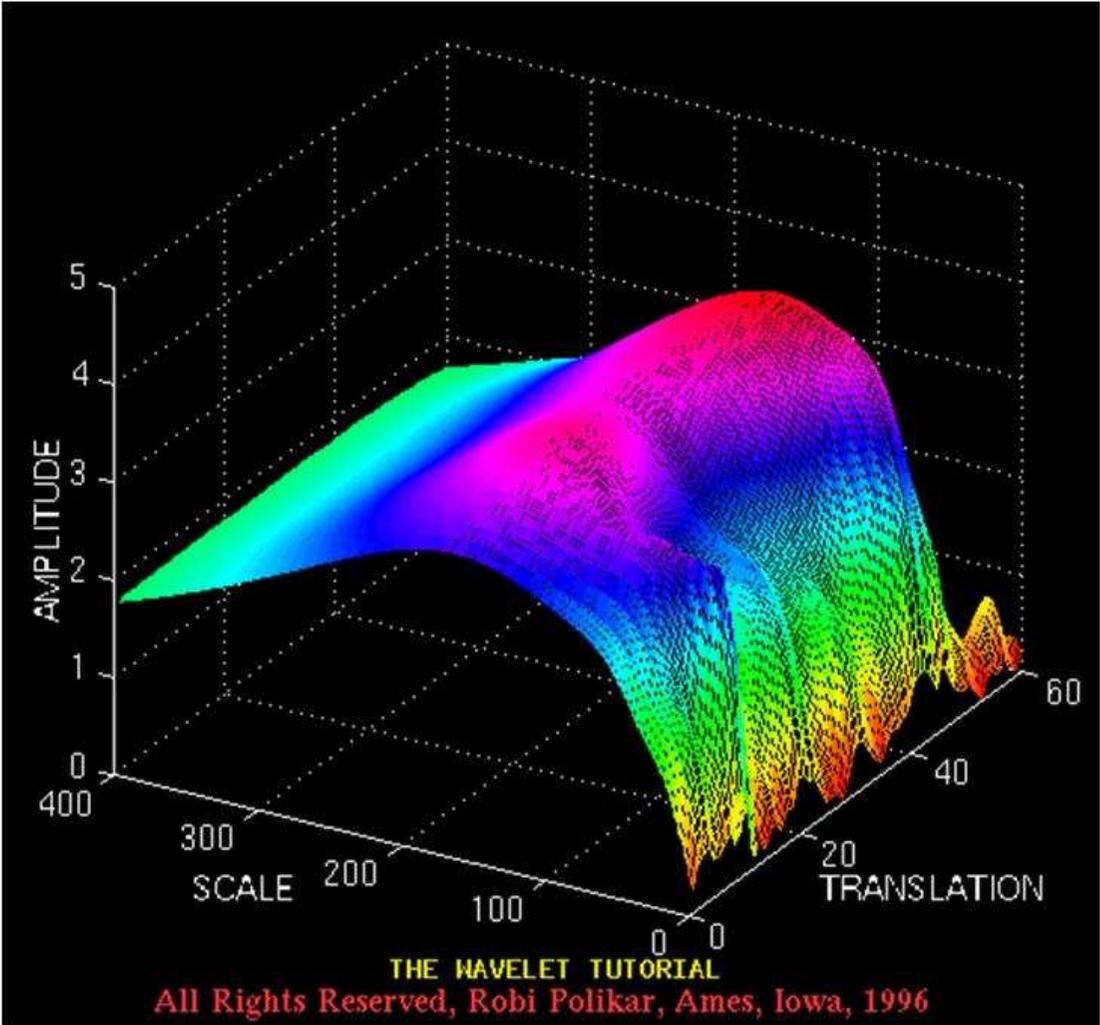


Fig. 36a [1]

2. Transformée en Ondelette Continue

Exemples (suite)

CWT de potentiel évoqué d'une personne atteinte d'une maladie d'Alzheimer (suite)

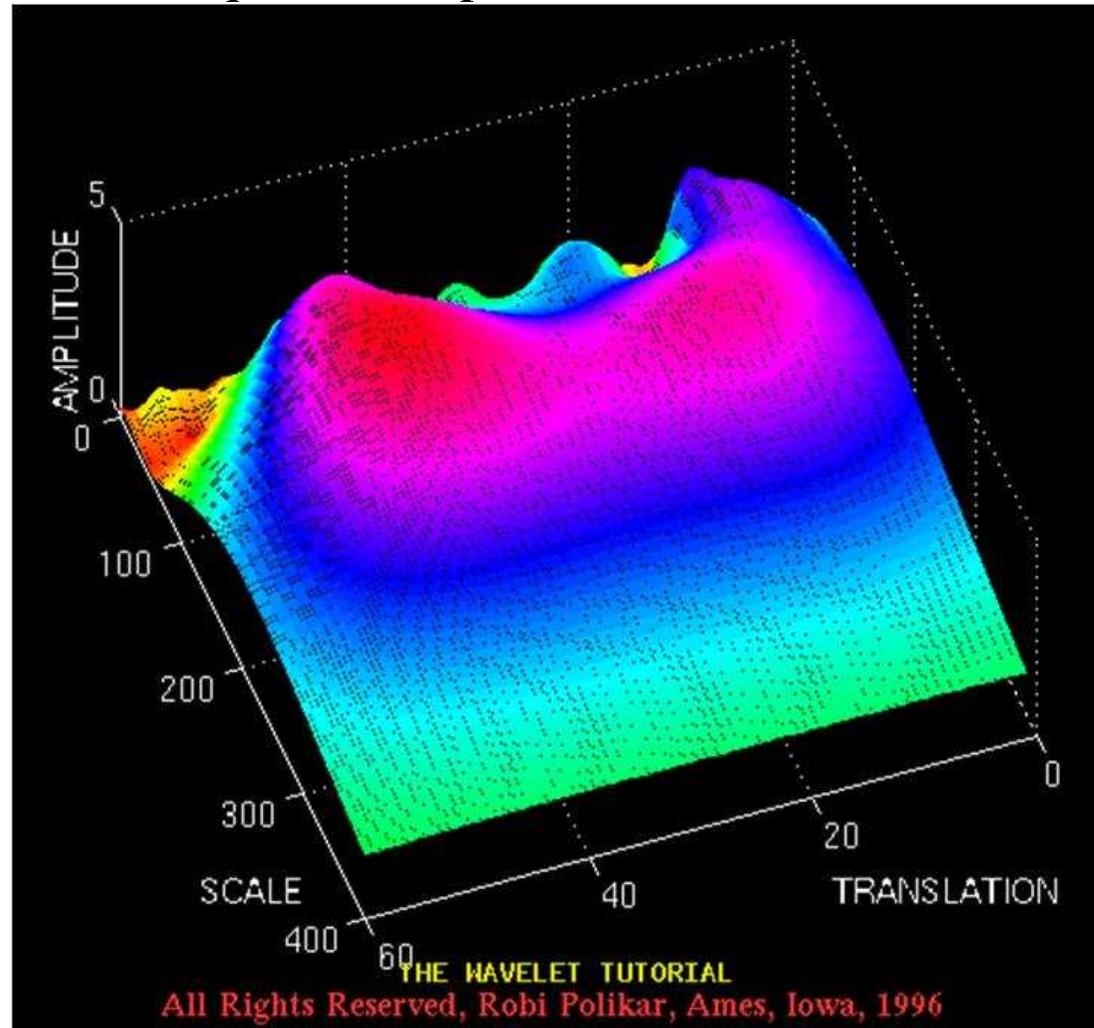


Fig. 36b [1] Un autre angle de vue.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les *séries d'ondelettes* (*Wavelet series*)

Dans le monde d'aujourd'hui, les ordinateurs sont utilisés pour faire la plupart des calculs. Il est évident que ni la WT, ni la STFT, ni la CWT ne puissent être pratiquement calculées en employant des équations analytiques, des intégrales, etc... Il est donc nécessaire de discrétiser ces transformées.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Comme dans la TF et la STFT, la manière la plus intuitive de faire ceci est simplement d'échantillonner le plan temps-fréquence (échelle). Encore intuitivement, l'échantillonnage du plan avec un taux d'échantillonnage uniforme semble le choix le plus normal. Cependant, dans le cas de la WT, le changement de l'échelle peut être employé pour réduire le taux d'échantillonnage.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Aux plus hautes échelles (aux plus basses fréquences), le taux d'échantillonnage peut être diminué, selon la règle de Nyquist. En d'autres termes, si le plan temps-échelle doit être échantillonné avec un taux d'échantillonnage de  $N_1$  à l'échelle  $s_1$ , le même plan peut être échantillonné avec un taux d'échantillonnage de  $N_2$ , à l'échelle  $s_2$ , où,  $s_1 < s_2$  (ou  $f_1 > f_2$ ) et  $N_2 < N_1$  :

$$N_2 = \frac{s_1}{s_2} N_1 \quad (24a)$$

$$N_2 = \frac{f_2}{f_1} N_1 \quad (24b)$$

Autrement dit, aux fréquences basses le taux d'échantillonnage doit être diminué ce qui permet de gagner un temps important de calcul.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Cependant, la discrétisation peut être faite de n'importe quelle façon sans restriction en ce qui concerne l'analyse du signal. Si la synthèse n'est pas exigée, même les critères de Nyquist n'a pas besoin d'être satisfaits. Les restrictions à la discrétisation et au taux d'échantillonnage deviennent importantes si, et seulement si, la reconstruction de signal est désirée. Le taux d'échantillonnage de Nyquist est le taux minimum d'échantillonnage qui permet au signal original en temps continu d'être reconstruit à partir de ses échantillons discrets.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Comme cité précédemment, l'ondelette  $\psi(t,s)$  qui satisfait l'équation 12b, permet la reconstruction du signal par l'équation 12a. Cependant, ceci est vrai pour la transformée continue. La question est : pouvons-nous néanmoins reconstruire le signal si nous discrétisons les paramètres du temps et de l'échelle ? La réponse est « oui », mais sous certaines conditions.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Le paramètre  $s$  de l'échelle est discrétisé d'abord sur une grille logarithmique. Le paramètre de temps est alors discrétisé par rapport au paramètre de l'échelle, c'est-à-dire, un taux différent d'échantillonnage est employé pour chaque échelle. En d'autres termes, l'échantillonnage est fait par l'*échantillonnage dyadique* (*dyadic sampling*) représenté sur le schéma suivant :

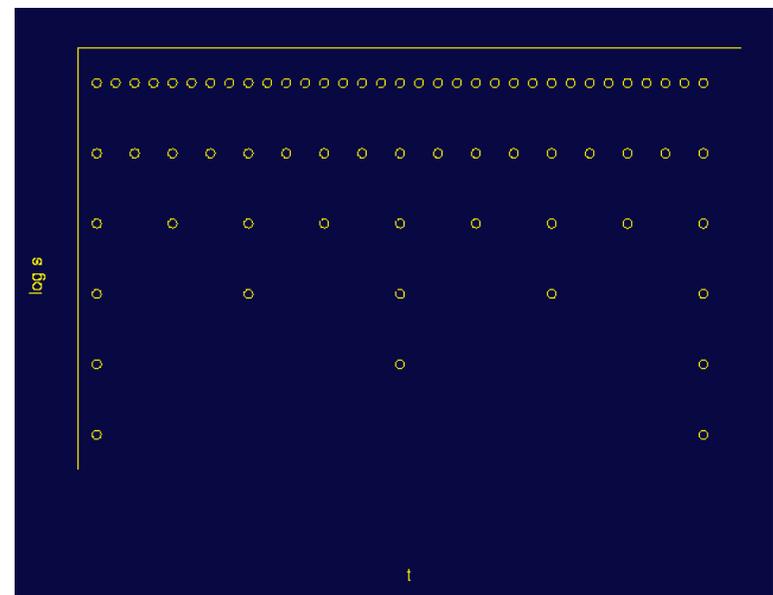


Fig. 37 [1]

## Echantillonnage dyadique

Une forme d'échantillonnage est dyadique si les ondelettes filles sont générées en dilatant la mère ondelette par  $s_0^j$  et la translater par  $ks_0^j$ .

L'échantillonnage dyadique est optimale parce que la variable de translation est échantillonné à la fréquence de Nyquist pour toutes fréquences données.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Considérons le domaine couvert par les axes comme le plan entier échelle-temps. Le CWT attribue une valeur à la continuité des points sur ce plan. Par conséquent, il y a un nombre infini de coefficients de CWT.

Considérons d'abord la discrétisation de l'axe de l'échelle. Parmi le nombre infini de points, seulement un nombre fini sont pris, en utilisant une règle logarithmique. La base du logarithme dépend de l'utilisateur. La valeur la plus commune est 2 en raison de sa convenance. Si 2 est choisi, seulement les échelles 2, 4, 8, 16, 32, 64.... etc. sont calculées. Si la valeur était 3, les échelles 3, 9, 27, 81, 243....etc. auraient été calculées.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

L'axe du temps est alors discrétisé selon la discrétisation de l'axe de l'échelle. Puisque l'échelle discrète change par des facteurs de 2, le taux d'échantillonnage est réduit pour l'axe du temps par un facteur de 2 à chaque échelle.

Remarquons que pour la plus basse échelle ( $s=2$ ), seulement 32 points de l'axe de temps sont échantillonnés (pour le cas particulier donné sur la figure 36). À la prochaine valeur de l'échelle,  $s=4$ , le taux d'échantillonnage de l'axe du temps est réduit par un facteur de 2 puisque l'échelle est augmenté par un facteur de 2, et donc, seulement 16 échantillons sont pris. A l'étape suivante,  $s=8$  et 8 échantillons sont pris dans le temps, et ainsi de suite.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Bien que ce plan s'appelle plan échelle-temps, il est plus précis de l'appeler *plan échelle-translation*, parce que le « temps » dans le domaine de transformation correspond réellement au décalage de l'ondelette dans le temps. Pour la série d'ondelette, le temps réel est encore continu.

Comme pour la relation entre la transformée de Fourier, la série de Fourier continue et la transformée de Fourier discrète, nous avons alors une *transformée par ondelettes continue*, une *transformée par ondelettes semi-discrète* (*semi-discrete wavelet transform*) (également connue sous le nom de *série d'ondelette* (*wavelet series*)) et une *transformée par ondelettes discrète*.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Exprimant le procédé ci-dessus de discrétisation en termes mathématiques, la discrétisation de l'échelle est  $s = s_0^j$ , et la discrétisation de translation est  $\tau = k.s_0^j.\tau_0$  où les paramètres entiers  $s_0 > 1$  et  $\tau_0 > 0$ . Noter, comment la discrétisation de la translation dépend de la discrétisation de l'échelle avec  $s_0$ . Dans ce cas, les ondelettes filles utilisées dans le cas des ondelettes continues, équation (11), deviennent :

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi \left( s_0^{-j} t - k \tau_0 \right) \quad (25)$$

où  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

**Définition mathématique** : Une fonction  $\psi$  est appelée **ondelette orthonormale** (**orthonormal wavelet**) si elle peut être utilisée pour définir l'**espace de Hilbert** (système orthonormal complet de l'espace de Hilbert des fonction carrées intégrables). La base de Hilbert est construit comme une famille de fonctions  $\{ \psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z} \}$  par une translation dyadique et une dilatation de  $\psi$ .

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Si  $\{\psi_{j,k}\}$  constitue une base orthonormée, la série transformée en ondelettes (coefficients des ondelettes) devient

$$\Psi_x^{\psi_{j,k}}(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,k}^*(t) dt \quad (26)$$

$$x(t) = c_\psi \sum_j \sum_k \Psi_x^{\psi_{j,k}}(j, k) \psi_{j,k}^*(t) \quad (27)$$

Une série d'ondelettes exige que  $\{\psi_{j,k}\}$  sont soit orthonormé, biorthogonales, ou le cadre. Si  $\{\psi_{j,k}\}$  ne sont pas orthonormé, l'équation (26) devient

$$\Psi_x^{\psi_{j,k}}(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{\psi}_{j,k}^*(t) dt \quad (28)$$

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

L'analogie suivante peut expliquer ce concept. Considérez le processus entier comme en regardant un objet particulier. Les yeux humains déterminent d'abord une vue grossière qui dépend de la distance des yeux à l'objet. Ceci correspond à ajuster le paramètre de l'échelle  $s_0^j$ . En regardant un objet très près, avec beaucoup de détail,  $j$  est négatif et grand (basse échelle, haute fréquence, analyses le détail du signal). En déplaçant la tête (ou les yeux) très lentement et avec des incréments très petits (d'angle, de la distance, selon l'objet qui est regardé), correspond à de petites valeurs de  $\tau = k.s_0^j.\tau_0$ .

Notons que lorsque  $j$  est négatif et grand, il correspond à de petits changements dans le temps,  $\tau$ , (taux d'échantillonnage élevé) et de grands changements dans  $s_0^j$  (petite échelle, hautes fréquences, où le taux d'échantillonnage est élevé). Le paramètre d'échelle peut aussi être considéré comme un grossissement .

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Combien bas le taux d'échantillonnage peut-il être maintenue tout en permettant toujours la reconstruction du signal ? C'est la question principale à répondre pour optimiser la procédure. La valeur la plus commode (en termes de programmation) s'avère « 2 » pour  $s_0$  et « 1 » pour le  $\tau_0$ . Dans ce cas,  $\tau = k2^j$  (*dilation dyadique* ou *dilatation binaire*) et  $s = 2^j$  (*échelle dyadique* ou *échelle binaire*), alors équation (25), devient :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k) \quad (29)$$

Évidemment, quand le taux d'échantillonnage est forcé pour être aussi bas que possible, le nombre d'ondelettes orthonormales disponibles est également réduit.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

**Remarque** : Une série d'ondelettes nécessite que la fonction  $\psi$  soit *orthonormale*, *biorthonormale*, ou *frame* (*frame*) [4,6, 7]. Si ce n'est pas le cas,  $\psi$  sera remplacé par soit la *base orthonormale dual* soit par le *trame dual*.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Les exemples des CWT qui ont été donnés en ce chapitre étaient réellement les séries d'ondelette des signaux donnés. Les paramètres ont été choisis selon le signal. Puisque la reconstruction n'était pas nécessaire, les taux d'échantillonnage étaient parfois lointains au-dessous de la valeur critique où  $s_0$  a changé de 2 à 10, et de  $\tau_0$  changé de 2 à 8, pour différents exemples.

### 3. Discrétisation de la Transformée en Ondelette Continue : Les séries d'ondelettes

Quoique la transformée en ondelettes discrétisées puisse être calculée sur un ordinateur, ce calcul peut prendre de quelques secondes à quelques heures selon votre taille de signal et la résolution que vous voulez. Un algorithme étonnamment rapide est réellement disponible pour calculer la transformée en ondelettes d'un signal. La *transformée en ondelettes discrète* (*Discrete Wavelet Transform (DWT)*) est présentée dans le chapitre suivant.

## **4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution**

### **Pourquoi nous avons besoin de la DWT ?**

Bien que la transformée en ondelettes continues discrétisées permette le calcul de la CWT par des ordinateurs, elle n'est pas une vraie transformée discrète. En fait, la série d'ondelette est simplement une version échantillonnée de la CWT, et les informations qu'elle fournit sont fortement redondantes en ce qui concerne la reconstruction du signal. Cette redondance, d'autre part, exige une quantité significative de temps et de ressources de calcul.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Dans chaque exemple de la transformée en ondelettes, il y a seulement un nombre fini de coefficients d'ondelette pour chaque région rectangulaire bornée dans le demi-plan supérieur. Il est toujours nécessaire d'évaluer une intégrale pour calculer chaque coefficient d'ondelette. La DWT, d'autre part, fournit des informations suffisantes pour l'analyse et la synthèse du signal original, en réduisant significativement le temps de calcul. Comparée à la CWT, il est considérablement plus facile d'implémenter la DWT.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

## *Transformée en Ondelette Discrète (DWT)*

Les bases de la DWT ont été développées à 1976 où Croiser, Esteban, et Galand ont conçu une technique pour décomposer les signaux discrets dans le temps. Dans la même année, Crochiere, Weber, et Flanagan ont effectué un travail semblable sur le codage des signaux de sons. Ils ont appelé leur approche d'analyse comme *codage de sous-bande (subband coding)*. En 1983, Burt a défini une technique très semblable au codage de sous-bande et l'a appelée le *codage pyramidal (pyramidal coding)* qui est également connu comme *analyse multirésolution (multiresolution analysis)*.

Plus tard en 1989, Vetterli et Le Gall ont apporté quelques améliorations au codage de sous-bande, enlevant la redondance existante dans le codage pyramidal.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

### *Le codage de sous-bande et l'analyse Multiresolution*

L'idée principale est identique à celle de CWT. Une représentation de l'échelle de temps d'un signal numérique est obtenue en utilisant des techniques de filtrage numériques. Rappelons-nous que la CWT est une corrélation entre une ondelette à différentes échelles et le signal avec l'échelle (ou la fréquence) étant employée comme mesure de similarité.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

La CWT a été calculée en changeant l'échelle de la fenêtre d'analyse, en la décalant dans le temps, en la multipliant par le signal, et en intégrant sur tout le temps. Dans le cas discret, des filtres de différentes fréquences de coupure sont utilisés pour analyser le signal à différentes échelles. Le signal est passé par une série de filtres passe hauts pour analyser les hautes fréquences, et par une série de filtres passe bas pour analyser les basses fréquences.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

La résolution du signal, qui est une mesure de la quantité d'information détaillée du signal, est changée par les opérations de filtrage, et l'*échelle* est changée par des opérations de *sur-échantillonnage* « *upsampling* » et *sous-échantillonnage* « *downsampling (subsampling)* ». Le sous-échantillonnage d'un signal correspond à la réduction du taux d'échantillonnage, ou à enlever certains échantillons du signal. Le sous-échantillonnage par un facteur  $n$  réduit  $n$  fois le nombre d'échantillons.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Le sur-échantillonnage d'un signal correspond à augmenter le taux d'échantillonnage d'un signal en ajoutant de nouveaux échantillons au signal. Par exemple, sur-échantillonner par deux revient à ajouter un nouvel échantillon, habituellement un zéro ou une valeur interpolée, entre chaque deux échantillons du signal. Le sur-échantillonnage par un facteur  $n$  augmente  $n$  fois le nombre d'échantillons.

Bien que ceci ne soit pas le seul choix possible, les coefficients de la DWT sont habituellement échantillonnés de CWT sur une grille dyadique, i.e.,  $s_0 = 2$  et  $\tau_0 = 1$ , produisant  $s = 2^j$  et  $\tau = k \cdot 2^j$ , comme décrit précédemment.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

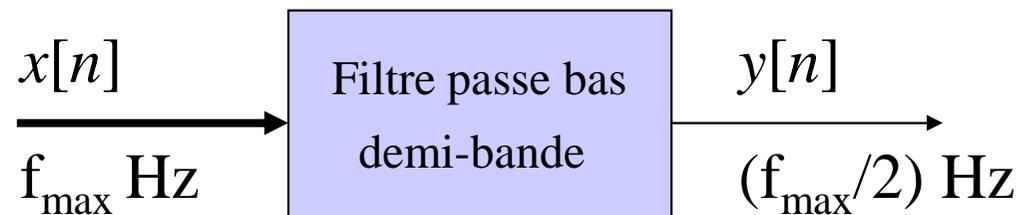
Puisque le signal est une fonction discrète dans le temps, par une *séquence*. Cette séquence sera dénoté par le  $x[n]$ , où  $n$  est un nombre entier.

Le procédé commence par passer ce signal (séquence) par un filtre numérique passe bas de demi-bande avec la réponse impulsionnelle  $h[n]$ . Le filtrage d'un signal correspond à l'opération mathématique de la convolution du signal avec la réponse impulsionnelle du filtre. Cette opération en temps discret est définie comme suit :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * h[n-k] \quad (30)$$

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Un filtre passe bas demi-bande enlève toutes les fréquences qui sont au dessus de la moitié de la fréquence la plus élevée du signal. Par exemple, si un signal dans le domaine continu possède une composante de fréquence maximale de 1000 Hz, alors le filtre passe bas demi-bande enlève toutes les fréquences au dessus de 500 Hz.



**Fig. 38**

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

L'unité de fréquence pour les signaux à temps discret est exprimée en *radians*. Ainsi, si un signal possède une composante de fréquence maximale de  $2\pi$  radians en terme de *fréquence radiale*. Alors la fréquence la plus élevée du signal est  $\pi$  rad, si le signal est échantillonné à la fréquence de Nyquist (qui est le double de la fréquence maximale qui existe dans le signal), c'est-à-dire la fréquence de Nyquist correspond à  $\pi$  rad/s en terme de *fréquence discrète*.

Par conséquent, employer le Hz n'est pas approprié pour les signaux discrets. Cependant, le Hz est employé à chaque fois où il est nécessaire de clarifier une discussion, puisqu'il est plus commun de penser à la fréquence en termes de Hz.

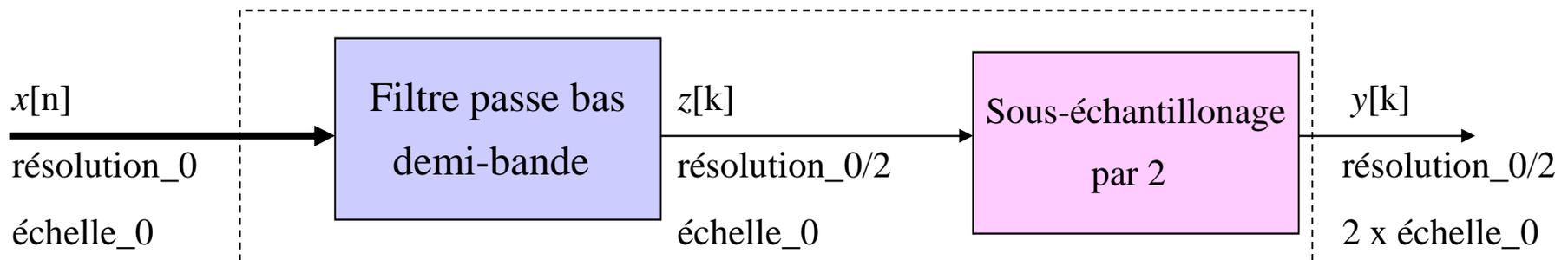
#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Enlever un échantillon parmi deux échantillons consécutifs permet simplement de sous-échantillonner le signal par deux, et le signal aura alors la moitié du nombre de points. L'échelle du signal est maintenant doublée. Notez que le filtrage de passe bas classique enlève l'information à haute fréquence, mais laisse l'échelle inchangée.

La résolution, d'autre part, est liée à la quantité de l'information dans le signal, et donc, il est affecté par les opérations de filtrage. Le filtrage passe bas demi-bande enlève la moitié des fréquences, qui peuvent être interprétées en tant que moitié d'information perdues. Par conséquent, la résolution est divisée par deux après l'opération de filtrage.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Remarquons, cependant, que l'opération de sous-échantillonnage après filtrage n'affecte pas la résolution, puisque enlever la moitié des composantes spectrales du signal rend la moitié du nombre d'échantillons redondante de toute façon. La moitié des échantillons peut être enlevés sans aucune perte d'information.



**Fig. 39**

$$y_{bas} [k] = \sum_{n=-\infty}^n x[n] * h[2k-n] \quad (31)$$

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

### *Calcul de la DWT*

La DWT analyse le signal à différentes bandes de fréquence avec différentes résolutions en décomposant le signal par une *approximation grossière* et une *information détaillée*. La DWT utilise deux ensembles de fonctions, appelés *fonctions d'étalonnage* (*scaling functions*) et des *fonctions d'ondelette* (*wavelet functions*), qui sont associées à des filtres passe bas et passe haut, respectivement. La décomposition du signal en différentes bandes de fréquence est simplement obtenue par les filtrages successifs passe haut et passe bas d'un signal définie dans le domaine temporel. Le signal original  $x[n]$  est d'abord passé par un filtre passe haut demi-bande  $g[n]$  et un filtre passe bas  $h[n]$ .

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Après le filtrage, on peut éliminer la moitié des échantillons selon la règle du Nyquist, puisque le signal a maintenant la fréquence la plus élevée de  $\pi / 2$  radian au lieu de  $\pi$ . Le signal peut donc être sous-échantillonné par 2, en enlevant simplement un échantillon sur deux. Ceci constitue un *niveau de décomposition* et peut être exprimé comme suit :

$$y_{haut} [k] = \sum_n x[n] \cdot g[2k - n] \quad (32a)$$

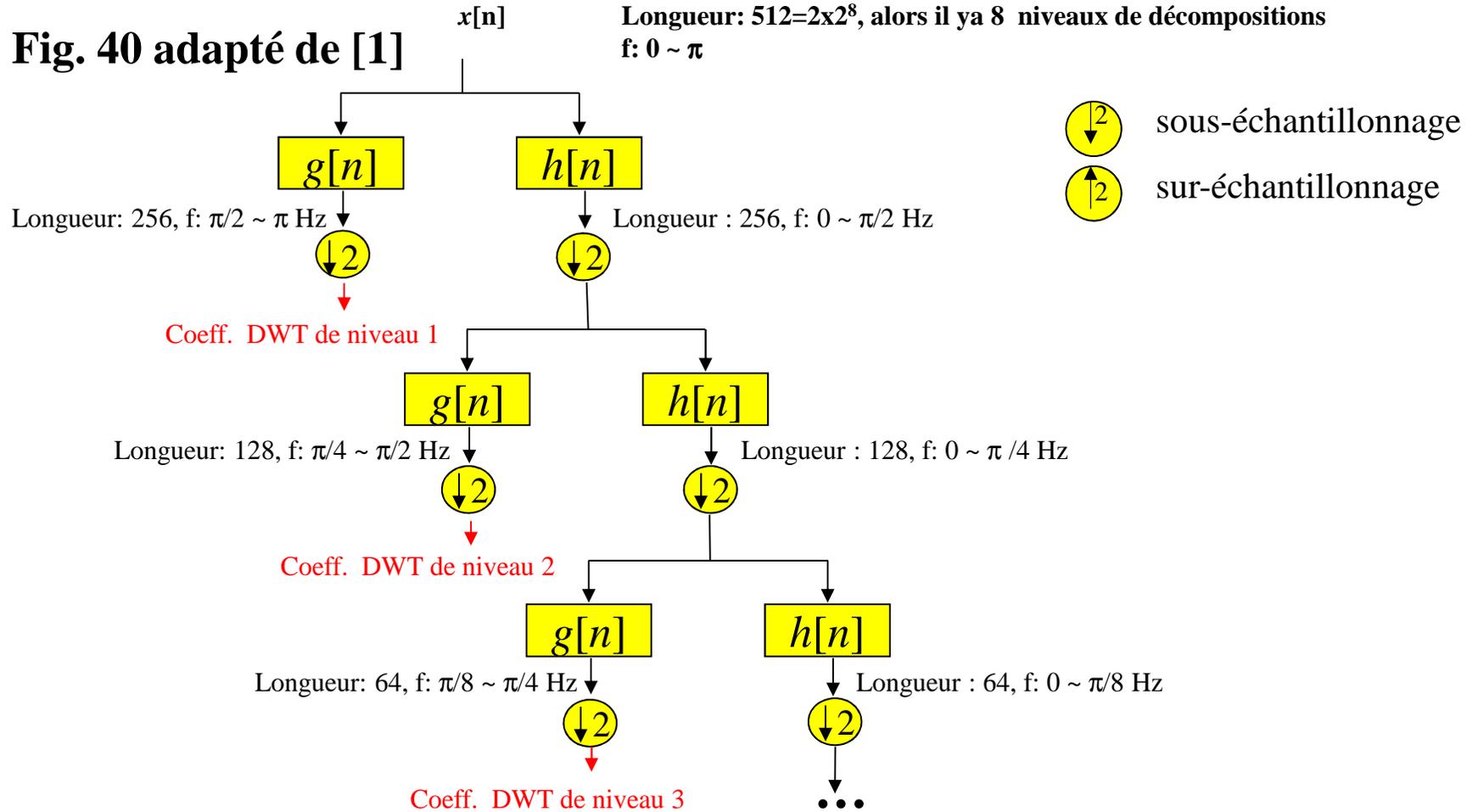
$$y_{bas} [k] = \sum_n x[n] \cdot h[2k - n] \quad (32b)$$

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Cette décomposition divise en deux la résolution de temps puisque seulement la moitié du nombre d'échantillons caractérise maintenant le signal entier. Cependant, cette opération double la résolution de fréquence, puisque la bande de fréquence du signal enjambe maintenant seulement la moitié de la bande de fréquence précédente, réduisant effectivement l'incertitude dans la fréquence par moitié. Le procédé ci-dessus, qui est également connu comme *codage de sousbande* (*subband coding*), peut être répété pour davantage de décomposition. À chaque niveau, le filtrage et le sous-échantillonnage auront comme conséquence d'obtenir la moitié du nombre d'échantillons (et par conséquent la moitié de la résolution temporelle) et la moitié de la bande de fréquence enjambée (et par conséquent la double la résolution fréquentielle).

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Figure 40 illustre ce procédé, où  $x[n]$  est le signal original à être décomposé,  $h[n]$  et  $g[n]$  sont les filtres passe bas et passe haut, respectivement. La largeur de la bande du signal à chaque niveau est marquée sur la figure en tant que "f".

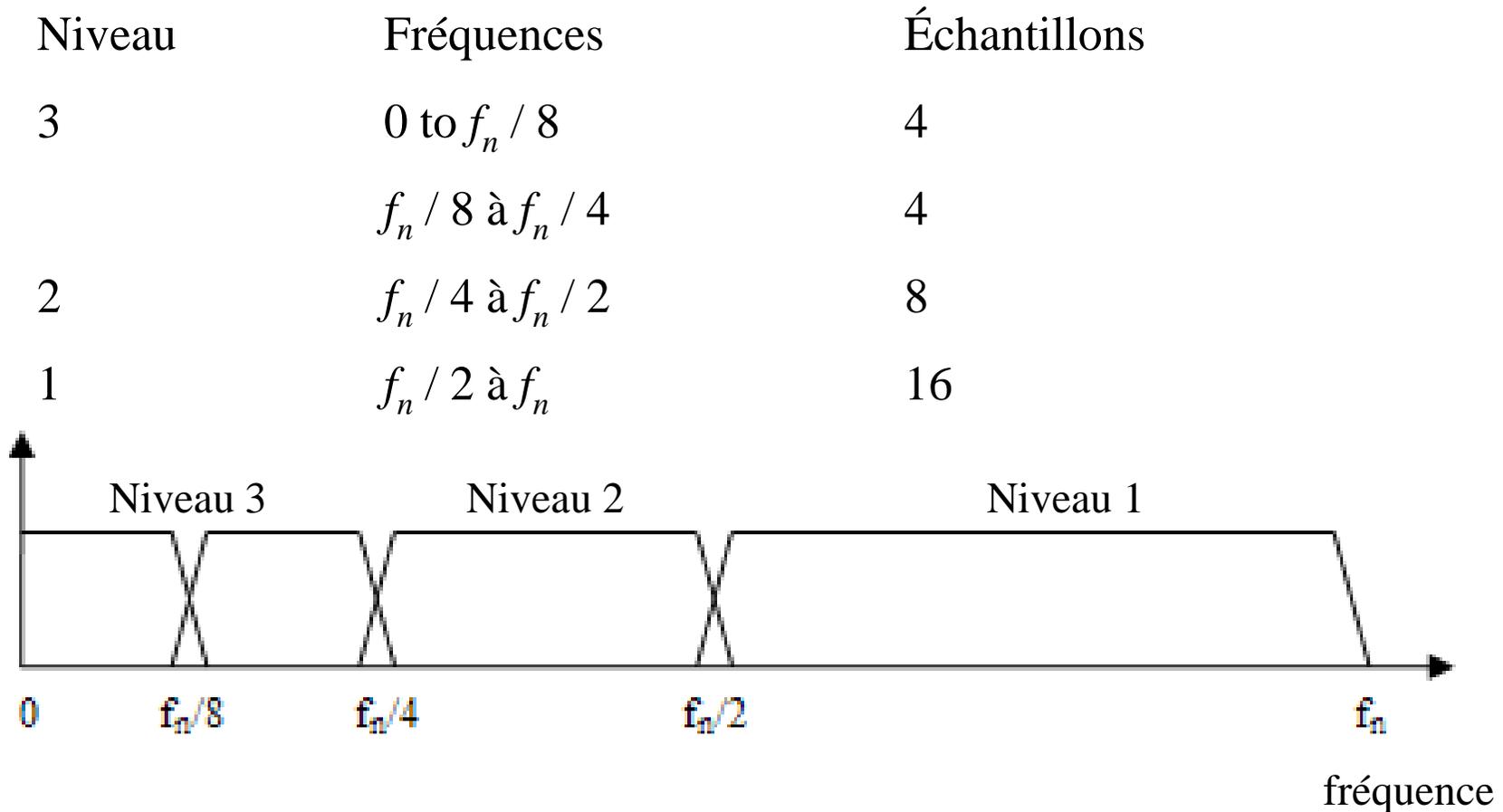


#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Notez que dû au sous-échantillonnage successifs par 2, la longueur de signal doit être une puissance de 2, ou au moins un multiple de la puissance de 2, pour que cette procédure soit efficace. La longueur du signal détermine le nombre de niveaux en lesquels on peut décomposer le signal. Pour cet exemple spécifique il y aurait 8 niveaux de décomposition. Chaque niveau de décomposition ayant la moitié du nombre d'échantillons du niveau précédent.

Le processus de décomposition continue jusqu'à ce que deux échantillons soient laissés. La DWT du signal original est alors obtenu en concaténant tous les coefficients à partir du dernier niveau de la décomposition (deux échantillons restants, dans ce cas-ci). La DWT aura alors le même nombre de coefficients que le signal original.

**4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)* ) basée sur l'analyse multirésolution**



**Fig. 41** Représentation de la domaine de fréquence de la DWT pour un signal avec 16 échantillons et fréquence de 0 à  $f_n$ .

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Les fréquences qui sont les plus importantes dans le signal d'origine apparaîtront en tant qu'amplitudes élevées dans la région du signal de la DWT qui inclut ces fréquences particulières. La différence de cette transformée avec la transformée de Fourier est que la localisation dans le temps de ces fréquences ne sera pas perdue. Cependant, la localisation dans le temps aura une résolution qui dépend de quel niveau elle apparaît. Si l'information principale du signal se situe dans les hautes fréquences, c'est qui est le cas le plus fréquent, la localisation dans le temps de ces fréquences sera plus précise, puisqu'elles sont caractérisées par plus de nombre d'échantillons.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Si l'information principale se trouve seulement aux fréquences très basses, la localisation dans le temps ne sera pas très précise, puisque peu d'échantillons sont employés pour exprimer le signal à ces fréquences. Cette procédure offre en effet une bonne résolution dans le temps aux hautes fréquences, et une bonne résolution de fréquence aux basses fréquences. Beaucoup de signaux produits en pratiques sont de ce type.

Les bandes de fréquence qui ne sont pas très importantes dans le signal d'origine auront des amplitudes très basses, et ainsi ses parties dans le signal DWT peuvent être négligées sans subir une perte importante d'information. Ceci permet ainsi la réduction de données.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

La figure 42 illustre un exemple de la façon dont les signaux de DWT ressemblent et à la façon dont la réduction de données est obtenue. La figure 42a montre un signal après la première décomposition (256 échantillons), normalisé à l'amplitude unité, d'un signal typique de 512 échantillons d'origine. L'axe horizontal est le nombre d'échantillons, tandis que l'axe vertical est l'amplitude normalisée. La figure 42b montre les 8 niveaux de DWT du signal de la figure 42a. Les 256 derniers échantillons dans ce signal correspondent à la plus haute bande de fréquence dans le signal, les 128 échantillons précédents correspondent à la deuxième plus haute bande de fréquence et ainsi de suite :

256	128	64	32	16	8	4	2
-----	-----	----	----	----	---	---	---

Nous remarquons que seulement les 64 premiers échantillons, qui correspondent aux fréquences les plus basses de l'analyse, portent l'information appropriée et le reste de ce signal n'a pratiquement aucune information. Par conséquent, tout sauf les 64 premiers échantillons peuvent être enlevé sans aucune perte d'information. Ce résultat montre l'efficacité de la DWT pour la réduction de données (application : *compression de données*).

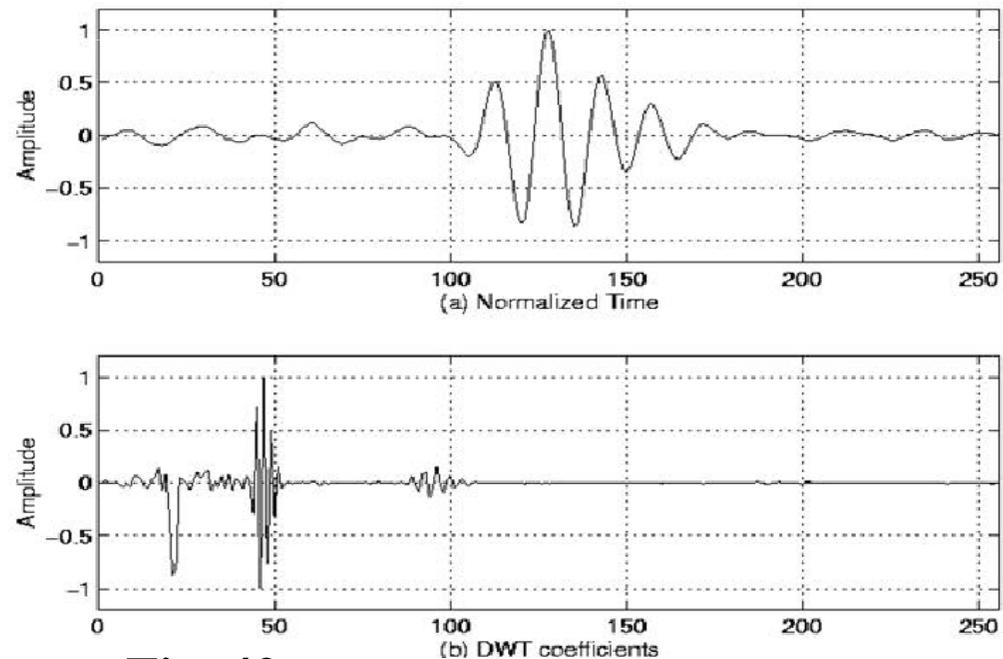


Fig. 42

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Une propriété importante de la DWT est le rapport entre les réponses impulsionnelles des filtres passe haut et passe bas. Ces filtres ne sont pas indépendants l'un de l'autre, et ils sont liés par

$$g[L-1-n] = (-1)^n \cdot h[n] \quad (33)$$

où  $g[n]$  est le filtre passe haut, le  $h[n]$  est le filtre passe bas, et  $L$  est la longueur de filtre (en nombre des points). Notons que les deux filtres sont d'indice impair de versions en alternance inversée les unes des autres.

La conversion de passe bas au passe haut est fourni par le terme  $(-1)^n$ .

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Des filtres satisfaisant cette condition sont généralement utilisés dans le traitement des signaux, et ils sont connus comme *filtre miroir en quadrature* « *Quadrature Mirror Filters (QMF)* ». Les deux opérations de filtrage et de sous-échantillonnage peuvent être exprimées comme

$$y_{haut} [k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot g[-n+2k] \quad (34a)$$

$$y_{bas} [k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h[-n+2k] \quad (34b)$$

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

La reconstruction dans ce cas est très facile puisque les filtres de demi-band forment des bases orthonormales. La procédure précédente est suivie dans un ordre renversé pour la reconstruction. Les signaux à chaque niveau sont sur-échantillonnés par deux, passés par les filtres  $g'[n]$ , et  $h'[n]$  (passe haut et passe bas respectivement) et ensuite additionnés. Le point intéressant ici est que les filtres d'analyse et de synthèse sont identiques, sauf pour une inversion dans le temps. Par conséquent, la formule de reconstruction devient (pour chaque niveau) :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_{haut}[k] \cdot g[-n+2k]) + (y_{bas}[k] \cdot h[-n+2k]) \quad (35)$$

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Cependant, si les filtres ne sont pas demi-band parfaits, alors une reconstruction parfaite ne peut pas être réalisée. Bien qu'il ne soit pas possible de réaliser des filtres parfaits, dans certaines conditions il est possible de trouver des filtres qui fournissent la reconstruction parfaite. Les plus célèbres sont ceux développés par Ingrid Daubechie appelés *ondelettes de Daubechies* (*Daubechies' wavelets* ).

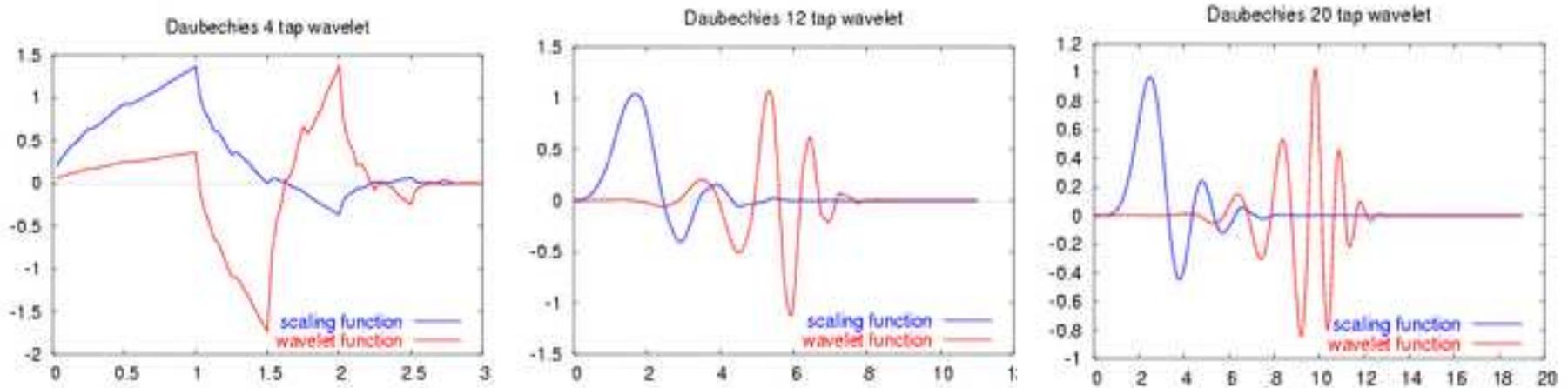
#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

##### *Ondelettes de Daubechies (Daubechies' wavelets )*

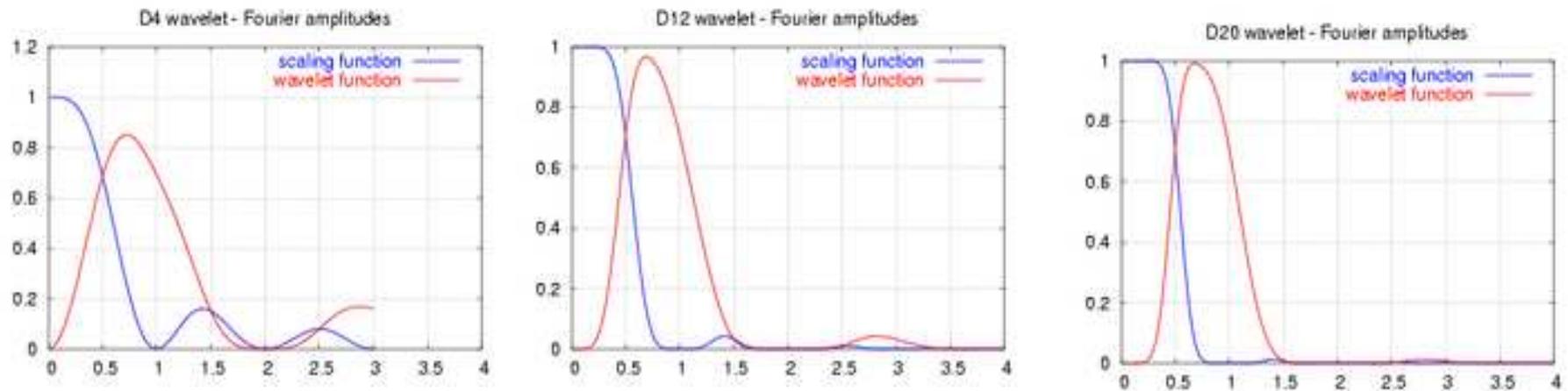
Appelé d'après Ingrid Daubechies, les ondelettes de Daubechies sont une famille d'ondelettes orthogonales définissant une DWT et caractérisées par un nombre maximal de *moments de fuite* «*vanishing moments*» pour un certain support donné. Avec chaque type d'ondelette de cette classe, il y a une fonction d'échelle (également appelé *ondelette père (father wavelet)*) qui produit une analyse multirésolution orthogonale.

**4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution**

**Fig. 43** Fonctions d'ondelette et d'échelle



Amplitudes de spectres de fréquence



#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

Les ondelettes orthogonales D2-D20 de Daubechies (nombres d'indices pairs seulement) sont généralement employées. Le nombre d'indices se rapporte au nombre N de coefficients. Chaque ondelette a un certain nombre de moments zéro ou moments de fuite égaux à la moitié du nombre de coefficients. Par exemple D2 (l'ondelette de Haar) a un moment de fuite, D4 a deux moments, etc... Un moment de fuite se rapporte à la capacité des ondelettes de représenter le comportement polynomial ou l'information dans un signal. Par exemple, D2, avec un moment, encode facilement des polynômes avec un coefficient, ou un signal avec des composantes constantes. D4 encode des polynômes de deux coefficients, c'est-à-dire un signal avec des composantes constantes et linéaires, D6 encode 3-polynômes, c'est-à-dire un signal avec des composantes constantes, linéaires et quadratiques.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

L'interprétation des coefficients de DWT peut parfois être plutôt difficile parce que la manière que les coefficients de DWT sont présentés est plutôt particulière. Les coefficients de DWT de chaque niveau sont concaténés, en commençant par le dernier niveau.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

##### Exemple (Fig. 42) :

Supposons que nous avons un long signal de 256 échantillons échantillonné à 10 mégahertz et nous souhaitons obtenir ses coefficients de DWT. Puisque le signal est échantillonné à 10 mégahertz, la composante de la fréquence la plus élevée qui existe dans le signal est de 5 mégahertz. Au premier niveau, le signal est passé par le filtre passe bas  $h[n]$ , et le filtre passe haut  $g[n]$ , dont les sorties sont sous-échantillonnées par deux. Le filtre passe haut est le premier niveau de coefficients de la DWT. Il y a de 128 parmi eux, et représentent le signal dans la plage [ 2.5 5 ] mégahertz. Ces 128 échantillons sont les 128 derniers échantillons tracés.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

##### Exemple (suite)

La sortie de filtre passe bas, qui a également 128 échantillons, mais couvre une bande de fréquence [ 0 2.5 ] mégahertz, sont encore décomposés en les passant par le même  $h[n]$  et  $g[n]$ . La sortie du deuxième filtre passe haut est le niveau 2 des coefficients de la DWT et ces 64 échantillons précèdent les 128 coefficients du niveau 1 dans le tracé. La sortie du deuxième filtre passe bas est encore décomposé, de nouveau en la passant par les filtres  $h[n]$  et  $g[n]$ . La sortie du troisième filtre passe haut est les coefficients de la DWT du niveau 3. Ces 32 échantillons précèdent les coefficients du niveau 2 de la DWT dans le tracé.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

##### Exemple (suite)

La procédure continue jusqu'à ce que seulement 1 coefficient de la DWT peut être calculé au niveau 9. Ce coefficient est le premier à tracer dans le tracé de la DWT. Ceci est suivi de 2 coefficients au niveau 8, de 4 coefficients du niveau 7, de 8 coefficients du niveau 6, de 16 coefficients du niveau 5, de 32 coefficients du niveau 4, de 64 coefficients du niveau 3, de 128 coefficients du niveau 2 et finalement de 256 coefficients du niveau 1. Notez que moins en moins de nombre d'échantillons est employé aux fréquences les plus basses, donc, la résolution dans le temps diminue pendant que la fréquence diminue, mais puisque l'intervalle de fréquence diminue également à de basses fréquences, la résolution dans la fréquence augmente.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

##### Exemple (suite)

Évidemment, les premiers quelques coefficients ne porteraient pas une quantité importante d'information, simplement dû à la résolution considérablement réduite dans le temps. Pour illustrer cette représentation de la DWT, jetons un coup d'œil à un vrai signal du monde réel. Notre signal d'origine est un long signal 256-échantillons ultrasonique, qui a été échantillonné à 25 MHz. Ce signal à l'origine a été produit en utilisant un capteur de 2.25 MHz, donc la composante spectrale principale du signal est à 2.25 MHz. Les 128 derniers échantillons correspondent à la plage [ 6.25 12.5 ] MHz.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

##### Exemple (suite)

Comme montré dans le tracé, aucune information n'est disponible ici, par conséquent ces échantillons peuvent être enlevés sans aucune perte d'information. Les 64 échantillons précédents représentent le signal dans la plage [ 3.12 6.25 ] MHz, qui également ne diffuse aucune information significative. Les petites impulsions parasites très rapides correspondent probablement au bruit de haute fréquence dans le signal. Les 32 échantillons précédents représentent le signal dans la plage [ 1.5 3.1 ] MHz. Comme nous pouvons voir, la majorité de l'énergie du signal est focalisée dans ces 32 échantillons. Les 16 échantillons précédents correspondent au [ 0.75 1.5 ] MHz et les crêtes qui sont vues à ce niveau représentent probablement l'enveloppe de plus basse fréquence du signal.

#### 4. Transformée en Ondelette Discrète ( *Discrete Wavelet Transform (DWT)*) basée sur l'analyse multirésolution

##### Exemple (suite)

Les échantillons précédents ne portent probablement aucune autre information significative. Nous sommes presque sûr de considérer que nous pouvons nous débrouiller avec les coefficients de niveaux 3èmes et 4èmes, c'est-à-dire que nous pouvons représenter le long signal de 256 échantillons avec  $16+32 = 48$  échantillons, une réduction de données significative.

## 5. Domaines d'application

1. *Compression* (**Compression**) des données de haute résolution (e.g. images)
2. *Filtrage* (*filtering, de-noising*)
3. *Lissage* (*smoothing*)
4. *Extraction des propriétés caractéristiques* (*Feature Extraction*)
5. *Détection des discontinuités* (*discontinuity detection*)
6. *Estimation des distributions de probabilités* (*distribution estimation*)
7. *Analyse des données* (*data analysis*) (par exemple, *biomédicales, financières*)

## 5. Domaines d'application

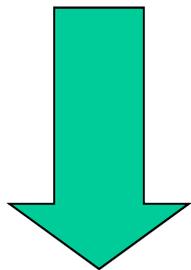
8. **Télécommunication** (par exemple, codage de sources et canaux (*Source and Channel Coding*))
9. **Astronomie** (par exemple, distances dans l'univers, galaxies formant de structures hiérarchiques à différent niveaux de l'échelle).
10. **Analyse de séries temporelles** pour des prévisions de marché boursier.
11. **Fractals** : ajustement parfait pour analyser les fractals.
12. **Analyse de turbulences** : Analyse d'écoulement turbulent des fluides de basse viscosité coulant aux vitesses élevées.
13. **Réseaux d'ondelette** (*wavelet networks*) : apprentissage en temps réel des fonctions inconnues.

### Compression d'images

Pour une image donnée, vous pouvez calculer la DWT de chaque ligne, et enlever toutes les valeurs dans les DWT qui sont inférieurs un certain seuil. Nous sauvons alors seulement ces coefficients de DWT qui sont au-dessus du seuil pour chaque ligne, et quand nous devons reconstruire l'image d'origine, remplissons simplement chaque ligne avec autant de zéros que de nombre de coefficients enlevés, et employons la DWT inverse pour reconstruire ligne de l'image originale. Nous pouvons également analyser l'image à différentes bandes de fréquences, et reconstruisons l'image d'origine en employant seulement les coefficients qui sont d'une bande particulière.

## 6. Histoire de l'ondelette

- 1807, J.B. Fourier:
  - Toutes les fonctions périodiques peuvent être exprimées comme une somme pondérée de fonctions trigonométriques
  - Publication démentie par Lagrange, Legendre et Laplace !!
  - 1822: Publication des travaux de Fourier...
  - ...
  - ...
  - ...
  - 1965, Cooley & Tukey: Fast Fourier Transform (FFT)



143 années

## 6. Histoire de l'ondelette

- 1946, Gabor : analyse de STFT :
  - composantes à haute fréquence en utilisant une fenêtre étroite, ou
  - composantes à basse fréquence en utilisant une fenêtre large, mais pas les deux en même temps
- Fin des années 1970, le problème de Morlet (ingénieur géophysicien) :
  - Analyse Temps - fréquence de signaux avec des composantes à haute fréquences avec un temps court et des composantes à basse fréquence avec un temps long.
  - STFT peut faire l'un ou l'autre, mais pas les deux → Solution: utiliser différentes fonctions de fenêtre pour découper les signaux avec différentes contenues de fréquences
  - Windows à produire de la dilatation/compression du prototype → ondelettes
- Critique pour un manque de rigueur mathématique!!!
- Début des années 1980, Grossman (Physicien théorique ) : Formalise la transformée et conçoit la transformée inverse → La première transformée en ondelette !
- Redécouverte de travail d'Alberto Calderon 1964 sur l'analyse harmonique

# Les années 1980

- 1984, Yves Meyer :
  - Similarité entre les travaux de Morlet et Calderon, 1984
  - Redondance dans le choix de Morlet's des fonctions de bases (basis functions).
  - 1985, fonctions de bases orthogonal d'ondelette avec une meilleure localisation dans le domaine temporel et dans la domaine fréquentiel.
- Redécouverte de travail de J.O. Stromberg 1980 les mêmes fonctions de bases (aussi analyse harmonique)
- Pourtant re-redécouverte du travail d'Alfred Haar sur les fonctions de base orthogonale, 1909 (!).
- Les ondelettes orthonormales connues les plus simples

## Transition à l'analyse des signaux discrets



### Ingrid Daubechies:

- Discrétisation des paramètres temps et échelle de la transformée en ondelette
- Trames d'ondelettes (Wavelet frames), 1986
- Bases orthonormales de « compactly supported wavelets » (Daubechies wavelets), 1988
- Liberté de choix des fonctions de base au prix de la redondance



### Stephane Mallat:

- Analyse Multirésolution w/ Meyer, 1986  
Ph.D. dissertation, 1988
- Transformée d'ondelette discrète
- Algorithme « Cascade » pour calculer la DWT

## ...Cependant...

- Décomposition des fréquences discrètes au fréquences dyadique (MRA) , appelées « Quadrature Mirror Filters », Croisier, Esteban and Galand, 1976 (!)



### Martin Vetterli & Jelena Kovacevic

- « Wavelets and filter banks », 1986
- Reconstruction Parfaite de signaux en utilisant les banques de filtres (filter banks) FIR, 1988
- Subband coding
- Multidimensional filter banks, 1992



## Les années 1990

- Équivalence de QMF et MRA, Albert Cohen, 1990
- « Compactly supported biorthogonal wavelets », Cohen, Daubechies, J. Feauveau, 1993
- « Wavelet packets », Coifman, Meyer, et Wickerhauser, 1996
- « Zero Tree Coding », Schapiro 1993 ~ 1999
- Recherchez des nouvelles ondelettes avec de meilleures propriétés de localisation en temps et en fréquence.
- « Super-wavelets »
- « Matching Pursuit », Mallat, 1993 ~ 1999

# Références

- [1] ROBI POLIKAR, « The wavelet tutorial »  
( <http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html> ), Dept. of Electrical and Computer Engineering Rowan University.  
Une bonne partie de ce cours est adaptée de cette référence.
- [2] <http://www.cmap.polytechnique.fr/~mallat/>
- [3] Stéphane Mallat, « A Wavelet Tour of Signal Processing », ELSEVIER, second edition.
- [4] [http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour\\_presentation/Wavetour\\_presentation\\_US.html](http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/Wavetour_presentation_US.html)
- [5] Gerald Kaiser, A Friendly Guide to Wavelets
- [6] Une introduction aux ondelettes adaptée pour le web par F. CHAPLAIS  
[http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour\\_presentation/Wavetour\\_presentation\\_fr.html#Chemins](http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/Wavetour_presentation_fr.html#Chemins)