

INTRODUCTION

A

LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE

STOCHASTIQUE

ET A

LA THEORIE DE DECISION

EXERCICE

MODELE DYNAMIQUE D 'INVENTAIRE

T. AL ANI

Laboratoire A²SI-ESIEE-Paris

e-mail: t.alani@esiee.fr

Modèle dynamique d'inventaire

Considérons une société, qui vend un seul produit, et qui souhaite décider combien d'articles à stocker en inventaire pour chacune des n périodes prochaines. (horizon de planification (planning horizon)).

La longueur d'une période peut être considérée comme une semaine, un mois, etc.

Le nombre de périodes pour lesquelles la société souhaite effectuer la prévision de son inventaire (dans ce cas n) est appelée horizon de planification (planning horizon).

La demande (par les clients) D_i (entier positif) de ce produit dans la période i est une variable aléatoire avec $p_i(d)$ la probabilité que $D_i=d$, et nous supposons que les demandes $\{D_i, i=1, 2, \dots, n\}$ sont indépendantes.

Au début de chaque période, la société révisé le niveau d'inventaire et décide le nombre d'articles à commander à son fournisseur (ou éventuellement la société fabrique elle même ses propres articles).

Soit s_i la quantité de stock d'inventaire en main au début de la période i .

Soit q_i la quantité de stock d'inventaire en main et la quantité d'articles (stock) en commande (ensemble des commandes de réapprovisionnement non encore reçues) au début de la période i mais avant effectuer une commande dans la période i .

$q_i = s_i + \text{stock en commande.}$

Si une commande par la société de z_i (entier positif) articles est passée, elle arrive en $i+\lambda$ où $\lambda < n$ est un nombre entier connu, qui est le retard de livraison (delivery lag). La société ne commande jamais dans les périodes $n-\lambda+1, n-\lambda+2, \dots, n$.

Soit y_i la quantité de stock d'inventaire en main et la quantité en cours de commande (stock en commande) après la commande à la période i . Ainsi,

$$y_i = q_i + z_i.$$

Dans certains cas il existe des restrictions sur les quantités commandées z_i ou le niveau d'inventaire y_i .

Soit w_i la quantité d'inventaire en main (qui n'inclut pas la quantité en cours de commande) dans la période i après que la commande de la période $i-\lambda$, $z_{i-\lambda}$ ait été livré mais avant qu'une demande par les clients arrive.

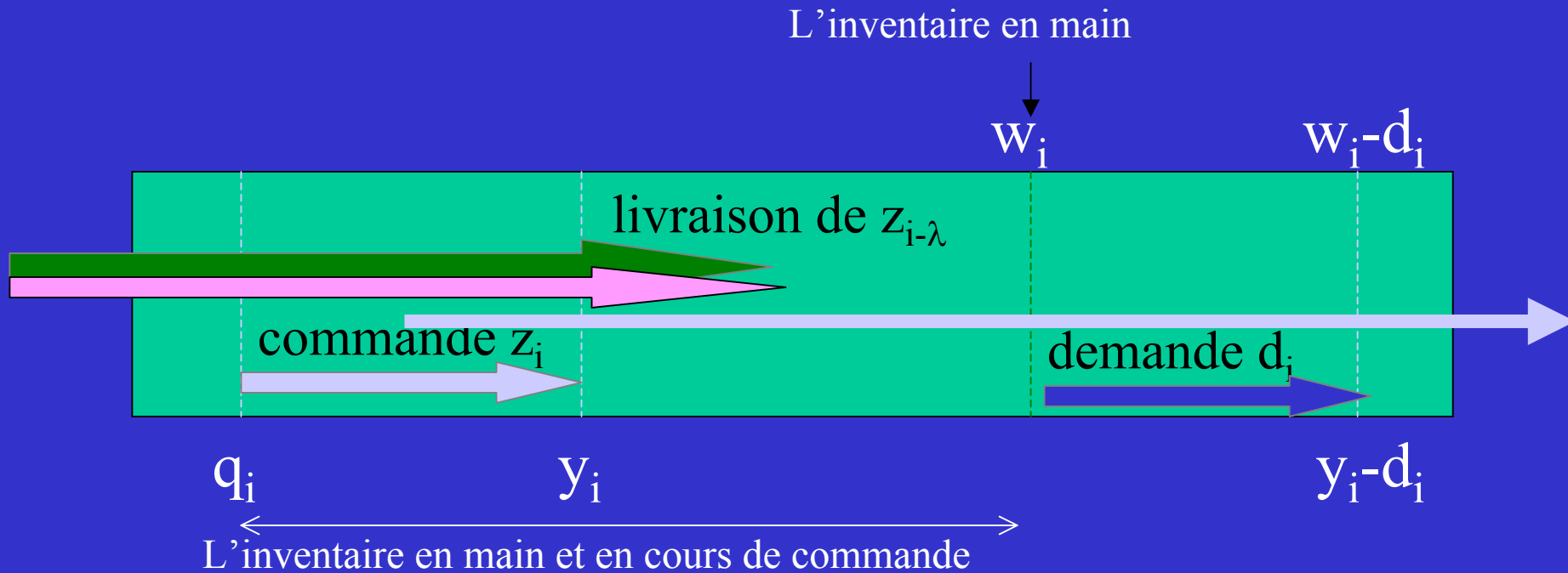
Alors w_i est la quantité d'inventaire réellement disponible pour faire face à la demande dans la période i .

Si $\lambda=0$, alors $w_i = y_i$; et si $\lambda > 0$, alors

$$w_{i+\lambda} = y_i - (d_i + d_{i+1} + \dots + d_{i+\lambda-1})$$

où d_i est la demande réelle dans la période i .

La séquence d'événements (pendant une période du temps i) pour $\lambda \geq 0$.



Pour déterminer q_{i+1} , il est nécessaire de faire quelques hypothèses sur ce qui se passe quand $d_i > w_i$. Nous considérerons deux cas différents.

- Cas de demandes en attente (accumulation) (Backlogged case) : Toutes les demandes en attente à la fin de la période i sont éventuellement satisfaites par les livraisons futures.
- Dans ce cas $q_{i+1} = y_i - d_i$ qui peut être une valeur négative.

- Cas de ventes manquées (lost sales case) : Toutes les demandes non satisfaites à la fin de la période i sont supposées perdues. Dans ce cas, si $\lambda=0$ alors

$$q_{i+1} = \max(y_i - d_i, 0);$$

et si $\lambda>0$, alors la situation est plus complexe (ce problème sera traité plus tard).

Dans le cas des ventes manquées, il est supposé qu'une demande non satisfaite dans la période i est perdue après avoir déterminé le stock disponible en main à la fin de la période i , $(w_i - d_i)$ et la quantité $(y_i - d_i)$, mais avant le début de la période $i+1$. L'expression de w_{i+1} donnée ci-dessus n'est plus valide.

Il existe trois coûts associés au fonctionnement de ce système d'inventaire.

- Si z articles sont commandés dans la période i , alors il y a un coût de commande (ordering cost) $c_i(z)$ subi au moment de livraison dans la période $i+\lambda$. (il est aussi possible de supposer que ce coût est subi au moment de la commande.)

- Si le stock disponible en main à la fin de la période i , $(w_i - d_i) > 0$, alors il existe un coût d'immobilisation (holding cost) $h_i(w_i - d_i)$. Ce coût inclut tous les coûts comme le loyer du magasin, l'assurance, les taxes et la maintenance. Il inclut aussi le coût d'avoir un capital lié à l'inventaire au lieu qu'il soit investi ailleurs.

- Si le stock disponible en main à la fin de la période i , $(w_i - d_i) < 0$ (il y a une demande en attente à la fin de la période i), alors il existe un coût de rupture de stock ou pénalité (shortage cost, penalty) $\pi_i(d_i - w_i)$ et un coût d'immobilisation minimal (minimal holding cost) $h_i(0)$.

Il est supposé que $\pi_i(0)=0$.

Le coût de rupture de stock inclut le coût dû au stockage supplémentaire dans le cas d'une demande en attente et le coût dû à la perte de revenu dans le cas de la vente manquée. Dans certains systèmes ce coût pourrait inclure un coût dû à la perte de l'estime des clients (loss of customer's goodwill cost).

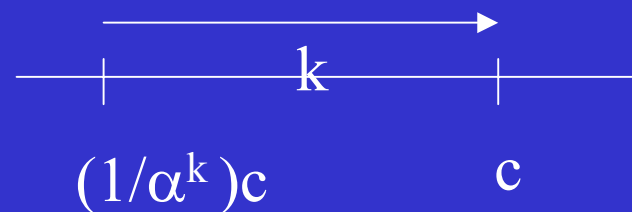
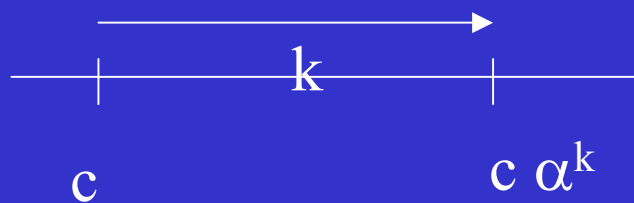
Nous pouvons supposer que le coût c subi dans la période j est équivalent à un coût subi dans n'importe quelle période dans le futur. Cependant, si la longueur d'une période est suffisamment longue et/ou le taux d'intérêt* sur le capital investi est suffisamment grand, alors cette hypothèse n'est plus bonne.

* Pourcentage du capital qui en détermine le revenu annuel.

Soit τ le taux d'intérêt par période de temps sur le capital investi. Par exemple, 1 € investi au début de la période j vaut $(1+\tau)$ € au début de la période $j+1$.

Soit $0 < \alpha \leq 1$ le facteur d'actualisation (discount factor) ou le facteur d'escompte défini par $\alpha = 1/(1+\tau)$.

Ainsi un coût c subi dans la période $j+k$ possède une valeur d'actualisation (discounted value) de $\alpha^k c$ dans la période j . Ceci est équivalent à dire qu'un investissement de $\alpha^k c$ € dans la période j au taux d'intérêt τ produira k périodes plus tard c € ($c = \alpha^k c (1 + \tau)^k$).



Une politique de commande est une règle pour décider combien d'articles qu'une société doit commander au début de chaque période.

L'objectif de la société est de choisir une politique de commande optimale (optimal ordering policy) qui minimise le coût total espéré (expected total discounted cost).

Dans la suite nous développons les modèles suivants :

1. Modèles avec un retard de livraison nul ($\lambda=0$) ou négligeable par rapport à la longueur de la période de temps.
2. Modèles avec un retard de livraison non nul ($\lambda>0$)
3. Modèles avec un retard de livraison incertain.

1. Modèles avec un retard de livraison nul ($\lambda=0$) ou négligeable par rapport à la longueur de la période de temps ($\lambda \ll i$)

1.1 Cas d'une demande en attente (accumulation)

Nous supposons que s'il existe un inventaire non négatif de v articles à la fin de la période n (le début de la période $n+1$), alors v articles peuvent être retournés et la société reçoit une valeur résiduelle (salvage value) de $s(v)$ (subit un coût de $-s(v)$).

Inversement, s'il y'a une attente de v articles à la fin de la période n , alors cette attente peut être satisfaite par l'achat de v articles à un coût de $b(v)$.

Si $t(v)$ est le coût terminal quand il existe un inventaire de v ($v = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) articles à la fin de la période n , alors $t(v)$ est donné par

$$t(v) = \begin{cases} -s(v) & \text{si } v \geq 0, \\ b(-v) & \text{si } v < 0, \end{cases}$$

Supposons qu'au début de la période i , q articles sont en main (pas d'articles sont en commande ($z_{i-\lambda} = 0$) puisque $\lambda=0$). Si nous commandons $(y-q)$ articles dans la période i , alors un coût de commande $c_i(y-q)$ est subi et y articles sont disponibles pour faire face à la demande.

Soit $L_i^0(w,d)$ le coût d'immobilisation et de rupture de stock dans la période i quand w ($w=y$ puisque $\lambda=0$) articles sont en main et il y a une demande d .

$$L_i^0(w,d) = \begin{cases} h_i(w-d) & \text{si } w-d \geq 0, \\ \pi_i(d-w) + h_i(0) & \text{si } w-d \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

Soit $L_i^0(w)$ le coût espéré d'immobilisation et de rupture de stock dans la période i quand il y'a w articles en main pour satisfaire la demande.

$$L_i^0(w) = \sum_{d=0}^{\infty} L_i^0(w, d) p_i(d) \quad (2)$$

Maintenant nous allons considérer la formulation par la programmation dynamique stochastique pour ce problème.

Supposons que les coûts futurs sont actualisés avec un taux α par période et que la société souhaite déterminer une politique de commande qui minimise le coût total espéré pour l'horizon des n périodes de planification.

1.1 Cas d'une demande en attente (suite)

Soit $f_i(q)$ = le coût total espéré actualisé (expected total discounted cost) (actualisé jusqu'à la période i) pour les périodes $i=1, 2, \dots, n$ (plus le coût terminal) si la quantité d'inventaire en main au début de la période i est q (aucun article n'est en cours de commande ($z_{i-\lambda} = 0$) puisque $\lambda=0$) et une politique optimale de commande est utilisée. (3)

1.1 Cas d'une demande en attente (suite)

Si $D_i=d$, alors $q_{i+1}=y-d$ et il est facile de démontrer que $f_i(q)$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$f_i(q) = \min_{y \geq q} [c_i(y-q) + L_i^0(y) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+1}(y-d) p_i(d)], \quad i=1,2,\dots,n \quad (4a)$$

Pour chaque valeur de i , $f_i(q)$ est calculée pour chaque valeur possible de q . Si $(y_i(q)-q)$ est la quantité optimale à commander quand $q_i=q$, alors $y_i(q)$ est égal à la valeur de y qui minimise le côté droit de l'équation (4a).

Les conditions limites sont

$$f_{n+1}(q) = t(q) \quad (4b)$$

et si q_1 est spécifié comme l'inventaire initial, alors $f_1(q_1)$ est la réponse au problème à n périodes.

Exemple numérique

Supposons qu'une société souhaite programmer son inventaire pour les 3 périodes prochaines en utilisant les données suivantes :

$$p(0) = \frac{1}{4}, p(1) = \frac{1}{2}, p(2) = \frac{1}{4};$$

$$c(0) = 0, c(1) = 3, c(2) = 5, c(3) = 6, c(z) = \infty \quad \text{pour } z \geq 4 ;$$

$$h(v) = v \quad \text{pour } v \geq 0 ; \pi(v) = 5v \quad \text{pour } v \geq 0 ;$$

$$s(v) = 2v \quad \text{pour } v \geq 0 ; b(v) = 4v \quad \text{pour } v < 0 ;$$

$$q_1 = 0, \alpha = 1.$$

$$f_4(q) = -2q \quad \text{pour } q = 0, 1, 2, \dots, 9 \text{ (l'inventaire maximal possible est 9)}$$

$$f_4(q) = -4q \quad \text{pour } q = -1, -2, \dots, -6 \text{ (la demande maximale en attente est 6)}$$

Remarquer que toutes les fonctions de coût et les distributions des demandes sont indépendents du temps.

Ce problème consiste alors à calculer $f_1(0)$ le coût espéré minimal (actualisé par α) et $y_1(0)$ le nombre d'articles au début de la période 1.

Quel est le paramètre qui permet de déterminer le nombre optimal d'articles au début de la période i ?

1.2 Cas des ventes manquées

Dans ce cas il existe un inventaire non négatif de v articles à la fin de la période n , ainsi il existe encore une valeur résiduelle $s(v)$. Cependant, s'il existe une demande en attente à la fin de la période n , aucun coût est subi au début de la période $n+1$ parce que l'excès de la demande (*) est perdue.

(*) Différence entre la quantité demandée et la quantité offerte à un certain prix. Elle peut être positive, négative ou nulle.

1.2 Cas des ventes manquées (suite)

Si $D_i=d$, alors $q_{i+1} = \max(y-d,0)$ et $f_i(q)$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$f_i(q) = \min_{y \geq q} [c_i(y-q) + L_i^0(y) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+1}(\max(y-d,0)) p_i(d)], \quad i=1,2,\dots,n \quad (5a)$$

Pour chaque valeur de i , $f_i(q)$ est calculée pour uniquement les valeurs non négatives possible de q . Ainsi, pour $\lambda > 0$ le cas des ventes manquées nécessite moins de calcul que celui dans le cas précédent.

Les conditions limites sont

$$f_{n+1}(q) = -s(q) \quad \text{pour} \quad x \geq 0 \quad (5b)$$

2. Modèles avec un retard de livraison non nul ($\lambda > 0$)

2.1 Cas $\lambda = 1$

2.1.1 Cas d'une demande en attente

Soit $f_i(w)$ = le coût total espéré actualisé (expected total discounted cost) (actualisé jusqu'à la période i) pour les périodes $i=1, 2, \dots, n$ (autre que le coût dû à la livraison z_{i-1}) sachant que w articles seront en main dans la période i et une politique optimale de commande est utilisée.

2.1.1 Cas $\lambda=1$, cas d'une demande en attente (suite)

Dans ce cas $f_i(w)$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$f_i(w) = \min_{y \geq w} [\alpha c_i (y - w) + L_i^0(w) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+1}((y - d)) p_i(d)], \quad (7a)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$f_n(w) = L_n^0(w) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} t(w - d) p_n(d) \quad (7b)$$

En supposant qu'une commande par la société n'existe pas au début de la période 1, alors $w_1 = x_1$ et la réponse recherchée est $f_1(q_1)$.

2.1 Cas $\lambda > 1$ (suite)

2.1.2 Cas des ventes manquées

Dans ce cas $f_i(w)$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$f_i(w) = \min_{y \geq w} [\alpha c_i (y - w) + L_i^0(w) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+1}(\max(y - d, 0)) p_i(d)] \quad (8a)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$f_n(w) = L_n^0(w) - \alpha \sum_{d=0}^{\infty} s(w - d) p_n(d) \quad (8b)$$

En supposant qu'une commande par la société n'existe pas au début de la période 1, alors $w_1 = x_1$ et la réponse recherchée est $f_1(q_1)$.

2. Cas $\lambda > 1$ (suite)

2.2 Cas $\lambda \geq 2$

Une commande de z articles par la société envoyée au début de la période i arrivera dans la période $i+\lambda$, et il est supposé que le coût de la commande est subi réellement au temps de livraison. Il est aussi supposé que la société ne commande jamais dans les périodes $n-\lambda+1, n-\lambda+2, \dots, n$ et que tous les coûts subis au début de la période $n+1$ sont donnés par équation (4b) dans le cas d'une demande en attente ou par l'équation (5b) dans le cas des ventes manqués.

2.2.1 Cas d'une demande en attente

Nous présentons une formulation de programmation dynamique qui nécessite uniquement une variable d'étape (une étape) et une variable d'état. Supposons que q articles sont en main et en cours de commande au début de la période i .

2.2.1 Cas $\lambda > 1$, cas d'une demande en attente (suite)

Soit $f(w, z_{i-\lambda+1}, \dots, z_{i-1}) =$ le coût total espéré actualisé (actualisé jusqu'à la période i) pour les périodes de i jusqu'à n (autre que le coût dû aux livraisons des commandes précédentes) sachant que w articles seront en main dans la période i après $z_{i-\lambda}$ a été livrées, z_j articles ont été commandés dans la période j ($j = i-\lambda+1, j = i-\lambda+2, \dots, i-1$), et une politique optimale de commande est utilisée. (9)

Deux observations :

1. Le nombre d'articles commandés dans la période i , disons z , n'affecte nullement les coûts subis dans la période de i à $i+\lambda-1$. Ceci parce que le coût de la commande $c_i(z)$ est subi dans la période $i+\lambda$ et, de plus, puisque la commande de z articles arrive dans la période $i+\lambda$, elle n'affecte pas les coûts d'immobilisation et de rupture dans les périodes i à $i+\lambda-1$. Pour ces raisons il est possible de négliger les coûts dans les périodes i à $i+\lambda-1$ dans la définition de la fonction optimal de la valeur espérée (définition (9)).

2. La valeur de l'inventaire réellement en main pour satisfaire la demande dans la période $i+\lambda$, $w_{i+\lambda}$, dépend uniquement de q_i , la quantité de l'inventaire en main et en cours de commande au début de la période i , sur z_i , la commande dans la période i (et non pas sur les commandes précédentes), et sur $d_i + d_{i+1} + \dots + d_{i+\lambda-1}$. En particulier, $w_{i+\lambda}$ est donné par

$$w_{i+\lambda} = y_i - \sum_{j=i}^{i+\lambda-1} d_j \quad (10)$$

2.2.1 Cas $\lambda > 1$, cas d'une demande en attente (suite)

En se basant sur les deux observations précédentes nous définissons la fonction optimale de la valeur espérée :

Soit $f_i(q)$ = le coût total espéré actualisé (actualisé jusqu'à la période $i+\lambda$) pour les périodes de $i+\lambda$ jusqu'à n sachant que q articles sont en main et en cours de commande au début de la période i et une politique optimale de commande est utilisée.

$$(11)$$

Définissons

$$p_{i,j}(d) = p(D_i + D_{i+1} + \dots + D_j = d)$$

$p_{i,j}(d)$ est appelé la convolution de $p_i(d)p_{i+1}(d), \dots, p_j(d)$

($i = 1, 2, \dots, n; j = i, i + 1, \dots, n$)

$$p_{i,i}(d) \equiv p_i(d)$$

$$p_{i,k}(d) = \sum_{l=0}^d p_{i,k-1}(l)p_k(d-l) \quad (k = i + 1, i + 2, \dots, j)$$

Soit $L_i^0(w)$ le coût espéré d'immobilisation et de rupture de stock dans la période i quand il y'a w articles en main pour satisfaire la demande.

$$\begin{aligned}
 L_i(y) &= \sum_{d=0}^{\infty} \left[\sum_{d'=0}^{\infty} L_{i+\lambda}^0(y-d, d') p_{i+\lambda}(d') \right] p_{i,i+\lambda-1}(d) \\
 &= \sum_{d=0}^{\infty} L_{i+\lambda}^0(y-d) p_{i,i+\lambda-1}(d) \quad (12)
 \end{aligned}$$

2.2.1 Cas $\lambda > 1$, cas d'une demande en attente (suite)

La relation appropriée de récurrence pour cette formulation est

$$f_i(q) = \min_{y \geq q} [c_i(y - q) + L_i^0(y) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+1}((y - d)) p_i(d)], \quad i = 1, 2, \dots, n - \lambda \quad (13a)$$

$$f_{n-\lambda+1}(q) = \sum_{d=0}^{\infty} t(q - d) p_{n-\lambda+1,n}(d) \quad (13b)$$

Nous calculons successivement $f_{n-\lambda}$ jusqu'à f_1 , alors $f_1(q_1)$ est le coût total espéré actualisé (actualisé jusqu'à la période $\lambda+1$) pour les périodes $\lambda+1$ jusqu'à n . Il n'inclut pas les coûts d'immobilisation et de rupture pour les périodes de 1 à λ , qui ne sont pas affectés par les décisions de commande.

Le coût total espéré actualisé (actualisé jusqu'à la période 1) pour le total des n périodes est

$$L^0_1(q_1) + \sum_{i=2}^{\lambda} [\alpha^{i-1} \sum_{d=0}^{\infty} L^0_i(q_i - d) p_{1,i-1}(d)] + \alpha^{\lambda} f_1(x_1) \quad (14)$$

où $L^0_i(w)$ est donné par l'équation (2).

Exemple numérique

Trouver la politique optimale de commande et le coût minimal espéré en utilisant le problème d'inventaire suivant:

$$n = 4, \lambda = 2, \alpha = 1, q_1 = 0 ;$$

$$p(0) = \frac{3}{4}, p(1) = \frac{1}{4} ;$$

$$c(0) = 0, c(1) = 3, c(z) = \infty \quad \text{pour } z \geq 2 ;$$

$$h(v) = v \quad \text{pour } v \geq 0 ; \pi(v) = 3v \quad \text{pour } v \geq 0 ;$$

$$s(v) = 2v \quad \text{pour } v \geq 0 ; b(v) = 4v \quad \text{pour } v \geq 0 .$$

2.2.2 Cas des ventes manquées

Malheureusement, il n'est pas possible de donner une formulation, similaire au cas précédent, qui nécessite uniquement une variable d'état. La raison est la suivante :

Considérons le cas $\lambda=2$. Dans le cas précédent, la quantité d'inventaire en main pour faire face à la demande dans la période $i+2$, w_{i+2} , est donné par $w_{i+2} = q_i + z_i - (d_i + d_{i+1})$.

2.2.1 Cas $\lambda > 1$, cas des ventes manquées (suite)

Ainsi, étant donné que q_i , w_{i+2} dépend uniquement de z_i et de la somme de d_i et de d_{i+1} .

Cependant, dans le cas des ventes manquées w_{i+2} est donné par

$$\begin{aligned} w_{i+2} &= \max[w_{i+1} - d_{i+1}, 0] + z_i \\ &= \max[\max\{w_i - d_i, 0\} + z_{i-1} - d_{i+1}, 0] + z_i \\ &= \max[\max\{q_i - z_{i-1} - d_i, 0\} + z_{i-1} - d_{i+1}, 0] + z_i \end{aligned}$$

En général, les deux expressions pour w_{i+2} ne seront pas les mêmes. De plus, w_{i+2} ne peut plus être calculé étant donné q_i uniquement. Alors, il n'est pas possible de donner une formulation qui nécessite uniquement une variable d'état.

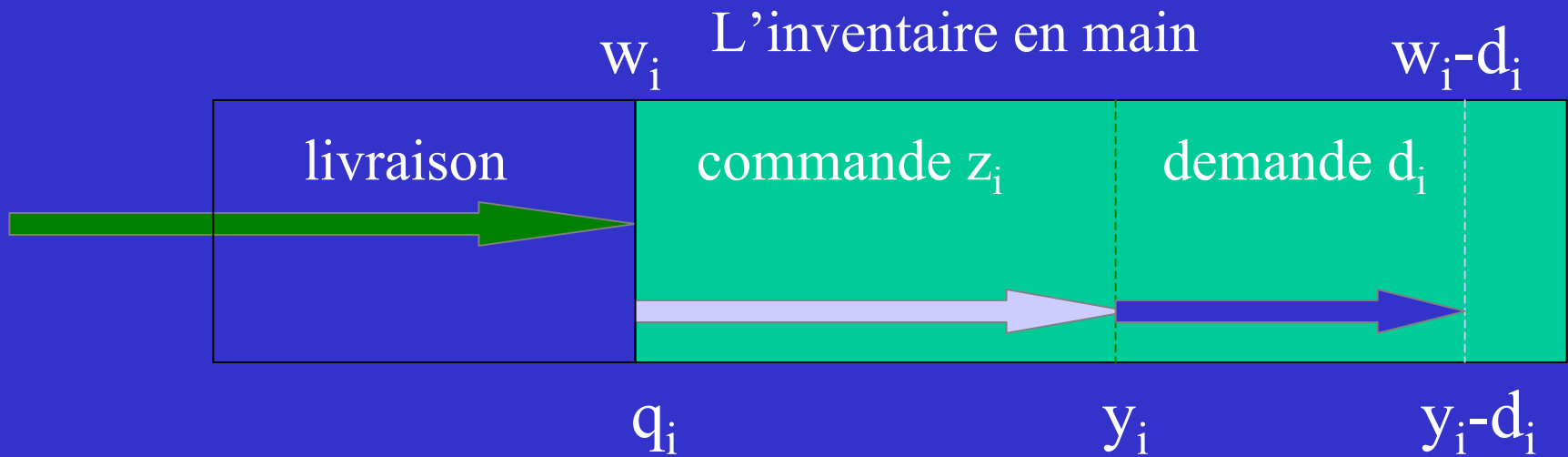
3. Modèles avec un retard de livraison incertain.

Jusqu'à maintenant nous avons supposé que λ est une valeur entière positive connue. Considérons maintenant le cas où λ est une variable aléatoire k dans l'ensemble $\Lambda = \{1, 2, \dots, \lambda_{\max}\}$ avec une probabilité $p(k)$. Si z articles sont commandés dans la période i , alors $c_i(z)$ est subi au moment de la commande. Les article qui arrivent après la période $n+1$ sont supposés qu'ils n'ont pas une valeur résiduelle.

3. Modèles avec un retard de livraison incertain (suite)

3.1 Cas 1 : Il ne peut y avoir jamais plus qu'une commande à la fois . De plus, nous devons maintenant supposer que la livraison de n'importe quelle commande préalable à la période i précède la décision de commande dans la période i .

Période i



L'inventaire en main et en cours de commande

3. Modèles avec un retard de livraison incertain - cas 1 (suite)

Si w articles sont disponibles pour faire face à la demande dans la période i , définissons $L^0_{i,j}(w)$ les coûts totaux espérés actualisés d'immobilisation et de rupture (actualisés jusqu'à la période i) dans les périodes $i, i+1, \dots, j$ sachant qu'aucune commande arrive dans les périodes $i+1, i+2, \dots, j$. (si une commande est arrivé au début de la période i , alors elle est incluse dans w .)

3. Modèles avec un retard de livraison incertain - cas 1 (suite)

Alors est donné par

$$L^0_{i,j}(w) = L^0_i(w) + \sum_{l=i+1}^j \alpha^{l-i} \left[\sum_{d=0}^{\infty} L^0_i(w-d) p_{i,l-1}(d) \right]$$

3. Modèles avec un retard de livraison incertain - cas 1 (suite)

La formulation de la programmation dynamique pour ce problème est la suivante :

Définissons la fonction de la valeur optimale espérée, $f_i(w)$ comme suit :

$f_i(w)$ = le coût total espéré actualisé (expected total discounted cost) (actualisé jusqu'à la période i) pour les périodes ($i=1, 2, \dots, n$) sachant que w articles seront en main (après une commande, s'il y en a, a été livrée), il n'y a pas de commande qui se présente, et une politique optimale de commande est utilisée.

3. Modèles avec un retard de livraison incertain - cas 1 (suite)

$$f_i(w) = \min \left[\begin{array}{l} c_i(0) + L_i^0(w) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+1}(w-d) p_i(d) \\ \min_{y>w} \left\{ \begin{array}{l} c_i(y-w) + \sum_{k=1}^{\lambda_{\max}} [L_{i,i+k-1}^0(w) \\ + \alpha^k \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+k}(y-d) p_{i,i+k-1}(d)] p(k) \end{array} \right\} \end{array} \right], \quad (15a)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - \lambda_{\max};$$

3. Modèles avec un retard de livraison incertain - cas 1 (suite)

$$f_i(w) = \min \left[\begin{aligned} & c_i(0) + L_i^0(w) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+1}(w-d) p_i(d) \\ & \min_{y>w} \left\{ \begin{aligned} & c_i(y-w) + \sum_{k=1}^{\lambda_{\max}} [L_{i,i+k-1}^0(w) \\ & + \alpha^k \sum_{d=0}^{\infty} f_{i+k}(y-d) p_{i,i+k-1}(d)] p(k) \end{aligned} \right\} \\ & + [L_{i,n}^0(w) + \alpha^{n-i+1} \sum_{d=0}^{\infty} t(y-d) p_{i,n}(d)] p(n-i+1) \\ & + \sum_{k=n-i+2}^{\lambda_{\max}} [L_{i,n}^0(w) + \alpha^{n-i+1} \sum_{d=0}^{\infty} t(w-d) p_{i,n}(d)] p(k) \end{aligned} \right], \quad (15b)$$

$$i = n - \lambda_{\max} + 1, n - \lambda_{\max} + 2, \dots, n-1.$$

3. Modèles avec un retard de livraison incertain - cas 1 (suite)

- La première ligne sur le côté droit des équations (15a et 15b) représente le coût espéré si aucun article est commandé dans la période i .
- La deuxième ligne sur le côté droit de l'équation (15a) représente le coût espéré si $y-w$ articles sont commandés dans la période i . Si le retard de livraison est de k périodes, il inclut un terme pour les coûts espérés d'immobilisation et de rupture dans les périodes i à $i+k-1$ et un terme pour le coût espéré pour les périodes $i+k$ (le temps de livraison) à n .

3. Modèles avec un retard de livraison incertain - cas 1 (suite)

- La deuxième ligne sur le coté droit de l'équations (15b) a une interprétation similaire.

Les conditions limites sont

$$f_n(w) = L_n^0(w) + \alpha \sum_{d=0}^{\infty} t(w-d) p_n(d) \quad (15c)$$

En supposant qu'une commande n'est pas présente au début de la période 1, alors $w_1=q_1$ et la réponse est $f_1(q_1)$.

3. Modèles avec un retard de livraison incertain (suite)

3.2 Cas 2 : Il ne peut y avoir plusieurs commandes à la fois . Cependant, supposons qu'une commande passée dans la période i n'est jamais livrée avant une commande passée dans période précédente. (Elle peut être passée dans la même période.) Soit $p(k)$ la probabilité que toutes les commandes passées depuis k ou plus de périodes et qui n'ont pas encore été livrées arrivent dans la période i . Supposons que $p(k)$ est indépendante du nombre de commandes qui n'ont pas été livrées et de leurs volumes.

3. Modèles avec un retard de livraison incertain – cas 2 (suite)

$f_i(w, z_{i-k+1}, \dots, z_{i-1})$ = le coût total espéré actualisé (expected total discounted cost) (actualisé jusqu'à la période i) pour les périodes ($i=1, 2, \dots, n$) sachant que w articles seront en main (après plusieurs commandes, s'il y en a, ont été livrées), z_j articles ont été commandés dans la période j ($j=i-k+1, i-k+2, \dots, i-1$) mais ils n'ont pas encore livrés, et une politique optimale de commande est utilisée.

3. Modèles avec un retard de livraison incertain – cas 2 (suite)

$$f_i(w, z_{i-\lambda_{\max}+1}, \dots, z_{i-1}) = \min_{z_i > 0} \left[c_i(z_i) + L_i^0(w) + \alpha \sum_{m=1}^{\lambda_{\max}} \left\{ f_{i+1} \left(w + \sum_{j=i-\lambda_{\max}+1}^{i-m+1} z_j - d, 0, \dots, 0, z_{i-m+2}, \dots, z_i \right) p_i(d) \right\} p(m) \right], \quad (16a)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$f_i(w, z_{i-k+1}, \dots, z_{i-1}) = L_i^0(w) + \alpha \sum_{m=1}^{\lambda_{\max}} \left[\sum_{d=0}^{\infty} t \left(w + \sum_{j=n-\lambda_{\max}+1}^{n-m+1} z_j - d \right) p_n(d) \right] p(m), \quad (16b)$$

où $z_n \equiv 0$. La réponse au problème est $f_1(q_1, 0, \dots, 0)$.

Solution de l'exercice numérique 1, page 34 (Cas d'une demande en attente avec retard nul) :

$$f_3(6) = \min_{6 \leq y \leq 9} [c(y-6) + L^0(y) + \sum_{d=0}^2 f_4(y-d)p(d)]$$

$$= \min[0+5-10 ; 3+6-12 ; 5+7-14 ; 6+8-16]$$

$$= \min[-5 ; -3 ; -2 ; -2] = -5 ; \quad y_3(6) = 6 ;$$

(il est clair que vous commandez jamais quand q dépasse la demande la plus grande pour le reste du processus.)

Modèle d'inventaire (suite)

$$\begin{array}{ll} f_3(5) = -4, & y_3(5) = 5; \\ f_3(4) = -3, & y_3(4) = 4; \\ f_3(3) = -2, & y_3(3) = 3; \\ f_3(2) = -1, & y_3(2) = 2; \\ f_3(1) = 2, & y_3(1) = 1 \text{ ou } 2; \\ f_3(0) = 4, & y_3(0) = 2 \text{ ou } 3; \\ f_3(-1) = 5, & y_3(-1) = 2; \\ f_3(-2) = 8, & y_3(-2) = 1; \\ f_3(-3) = 15, & y_3(-3) = 0; \\ f_3(-4) = 24, & y_3(-4) = -1; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(3) &= \min_{3 \leq y \leq 6} [c(y-3) + L^0(y) + \sum_{d=0} f_3(y-d)p(d)] \\
 &= \min[0+2-0 ; 5 ; 3+3-2 ; 5+4-3 ; 6+5-4] \\
 &= \min[(3/2) ; 4 ; 6 ; 7] = 3/2 ; \quad y_2(3) = 3 ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(2) &= 11/4, & y_2(2) &= 2; \\
 f_2(1) &= 21/4, & y_3(1) &= 1; \\
 f_3(0) &= 15/2, & y_2(0) &= 3; \\
 f_2(-1) &= 35/4, & y_2(-1) &= 2; \\
 f_2(-2) &= 45/4, & y_2(-2) &= 1;
 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 f_1(0) &= \min_{0 \leq y \leq 3} [c(y) + L^0(y) + \sum_{d=0}^2 f_2(y-d)p(d)] \\
 &= \min[0+5+(145/16) \ ; \ 3+1,5+(15/4) \ ; \ 5+1+(83/16) \ ; \\
 &\quad 6+2+(49/16)] \\
 &= \min[(225/16); \ (47/4) \ ; \ (179/16) \ ; \ (177/16)] = 177/16 \ ; \\
 &\quad y_1(0) = 3 \ ;
 \end{aligned}$$

Ainsi, le coût minimal espéré (actualisé) est $(177/16)$ et il est optimal de commander 3 articles au début de la période 1. Ce qui est optimal à commander dans la période 2 dépend, bien sûr, sur la demande pendant la période 1.

Solution de l'exercice numérique 2, page 52 (Cas d'une demande en attente avec retard de 2) :

$$f_3(2) = (9/16)t(2) + (6/16)t(1) + (1/16)t(0) = -3 ;$$

$$f_3(1) = (9/16)t(1) + (6/16)t(0) + (1/16)t(-1) = -(7/8) ;$$

$$f_3(0) = 2 ;$$

$$f_3(-1) = 6 ;$$

$$f_3(-2) = 10.$$

$$f_2(1) = \min[0+L_2(1)+\{ (3/4) f_3(1)+ (1/4) f_3(0) ; 3+ L_2(2)+\{ (3/4) f_3(2)+ (1/4) f_3(1)\}] = \min[(25/32) ; (19/16)]$$

$$=25/32 ; \quad y_2(1)=1 ;$$

$$f_2(0) =121/32 ; \quad y_2(0)=1 ;$$

$$f_2(-1) =33/4 ; \quad y_2(-1)=0 ;$$

$$f_1(0) = \min[0+L_1(0)+\{ (3/4) f_3(0)+ (1/4) f_3(-1) ; 3+ L_1(1)+\{ (3/4) f_2(1)+ (1/4) f_2(0)\}] = \min[(915/128) ; (175/32)]$$

$$=175/32 ; \quad y_1(0)=1 ;$$

Ainsi, le coût minimal espéré pour les périodes 3 et 4 est $175/32$ et le coût minimal espéré pour les périodes 1 à 4 est

$$L_1^0(0)+[(3/4) L_2^0(0)+(1/4) L_2^0(-1)]+ f_1(0)=247/32.$$

Bibliographie

- [Bat00] Bather J. Decision Theory. An Introduction to Dynamic Programming and Sequential Decisions. John Wiley & Sons, 2000.
- [Bel57] Bellman. R. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1992.
- [Dre77] Dreyfus S.E. and Law A. M. The Art and Theory of Dynamic Programming, Academic Press 1977.
- [How60] Howard R. Dynamic Programming and Markov Processes. MIT Press, Cambridge, MA, 1960.
- [Alt1] T. AL ANI. Programmation dynamique stochastique : Modèle dynamique d'inventaire (http://www.esiee.fr/~info/a2si/docu_ens.html)
- [Alt2] T. AL ANI. Apprentissage par Renforcement (http://www.esiee.fr/~info/a2si/docu_ens.html)
- [Alt3] T. AL ANI. Programmation dynamique stochastique –partie 1 (http://www.esiee.fr/~info/a2si/docu_ens.html)
- [Der70]:Derman, C., Finite State Markovian Decision Processes, Academic Press, New York, 1970.