

Introduction à la commande des systèmes linéaires

Organization

- ▶ Intervenant : [Abdel Reama](#) et [Arben Cela](#)
(a.reama@esiee.fr, a.cela@esiee.fr)
- ▶ Répartitions des enseignements :
 1. **12h de cours** : **2h** RST, **4h** Système de Commande et **6h** Optimisation des Systèmes
 2. **6h de TD** : **2h** Système de Commande et **4h** d'Optimisation des Systèmes
 3. **12h de TP** : **4h** TP RST, **8h** TP Contrôle de Pendule/Bille,
- ▶ Mode d'évaluation :
 1. Examen final de **3h** : **1h** sur RST, **1h** sur Systèmes de Commande et **1h** sur Optimisation des systèmes \Rightarrow **Coefficient 3**
 2. Rapport de TP \Rightarrow **Coefficient 2**
 3. Evaluation d'avancement en TD (rendu des fichiers/documents Matlab en fin de séance) \Rightarrow **Coefficient 1**
- ▶ **Référence** \Rightarrow : *[Feedback Systems: Astrom and Murray](#)*

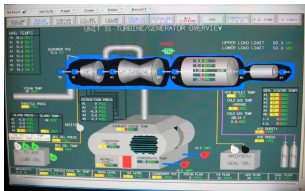
Introduction à la commande des systèmes linéaires

Domaines d'Application

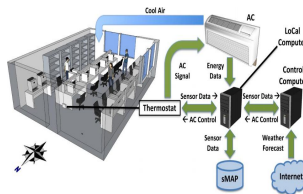
- ▶ Espace



- ▶ Production et consommation de l'énergie :



Interface d'un système de production de l'énergie



Contrôle de température (HVAC) des bâtiments

Introduction à la commande des systèmes linéaires

Modélisation des systèmes Pendulaire

- ▶ **Trois système pendulaire** : Un système pendulaire consiste à une masse en mouvement de rotation par rapport a un axe se trouvant au dessous de sa centre de masse/inertie. La stabilisation est réalisé par une force créant un mouvement de rotation du corps par rapport à l'axe de rotation. Trois exemples de cette classe de systèmes sont donnés dans la figure ci-dessous :

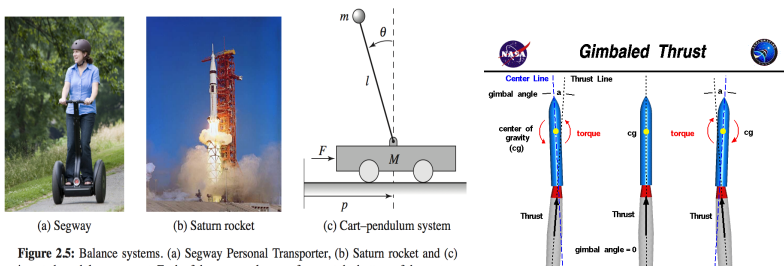


Figure 2.5: Balance systems. (a) Segway Personal Transporter, (b) Saturn rocket and (c) inverted pendulum on a cart. Each of these examples uses forces at the bottom of the system to keep it upright.

Introduction à la commande des systèmes linéaires

Modélisation du pendule inversé (Fig. 2.5(c))

- ▶ Les équations décrivant la dynamique sont donnée par :

$$\begin{bmatrix} M + m & -ml\cos\theta \\ -ml\cos\theta & (J + ml^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\dot{p} + ml\sin\theta\dot{\theta}^2 \\ \gamma\dot{\theta} - mglsin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

- ▶ Les coefficients M est la masse de la base et m, J sont la masse et l'inertie du corps en mouvement pendulaire.
- ▶ l est la distance du centre de gravité du corps en mouvement pendulaire
- ▶ c, γ sont les coefficient du frottement visqueux et g l'accélération gravitationnelle
- ▶ Définissons la masse et l'inertie totale par $M_t = M + l$ et $J_t = J + ml^2$.
- ▶ Si on définit l'état du système par $z = [p, \theta, \dot{p}, \dot{\theta}]^T$, l'entré par $u = F$ et la sortie par $y = [p, \theta]$ on réécrit les équation dynamique (1) comme :

Introduction à la commande des systèmes linéaires

Modélisation des systèmes Pendulaire

- Equation d'état non-linéaire :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\theta} \\ \frac{mls_{\theta}\dot{\theta}^2 + mg(m l^2 / J_t) s_{\theta} c_{\theta} - c\dot{p} - \gamma l m c_{\theta} \dot{\theta} + u}{M_t - m(m l^2 / J_t) c_{\theta}} \\ \frac{m l^2 s_{\theta} c_{\theta} \dot{\theta}^2 + M_t g l s_{\theta} + c l c_{\theta} \dot{p} - \gamma (M_t / m) \dot{\theta} + l c_{\theta} u}{J_t (M_t / m) - m (l c_{\theta})^2} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} p \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{où : } c_{\theta} = \cos\theta \wedge s_{\theta} = \sin\theta)$$
(2)

- Nous pouvons réécrire (2) :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(p, \theta, \dot{p}, \dot{\theta}, u), & f &= [f_1, f_2, f_3, f_4]^T, \\ y &= Cz, & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

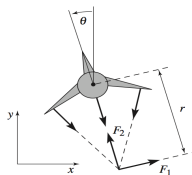
Introduction à la commande des systèmes linéaires

Modélisation des systèmes dynamiques

- ▶ Avion de chasse *Harrier* à décollage vertical donné dans la figure ci-dessous¹



(a) Harrier "jump jet"



(b) Simplified model

Figure 2.17: Vectored thrust aircraft. The Harrier AV-8B military aircraft (a) redirects its engine thrust downward so that it can "hover" above the ground. Some air from the engine is diverted to the wing tips to be used for maneuvering. As shown in (b), the net thrust on the aircraft can be decomposed into a horizontal force F_1 and a vertical force F_2 acting at a distance r from the center of mass.

- ▶ **Modèle dynamique :** Notons par (x, y, θ) la position du centre de masse et l'orientation de l'avion sur le plan vertical oxy . Supposons que la masse m , le moment d'inertie J , la constante de gravitation g et le coefficient d'amortissement c sont connus.

1. pour plus de détails : Feedback Systems: Astrom and Murray

Introduction à la commande des systèmes linéaires

Modélisation des systèmes dynamiques

- ▶ Les équations différentielles décrivant la dynamique des mouvements de l'avion sont données par :

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_1 \cos\theta - F_2 \sin\theta - c\dot{x} \\m\ddot{y} &= F_1 \sin\theta + F_2 \cos\theta - mg - c\dot{y} \\J\ddot{\theta} &= rF_1\end{aligned}\quad (4)$$

- ▶ Notons par $u_1 = F_1$ et $u_2 = F_2 - mg$ les deux signaux de commandes effectives sur l'avion \Rightarrow les équations (4) peuvent être réécrit :

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -mg\sin\theta - c\dot{x} + u_1 \cos\theta - u_2 \sin\theta \\m\ddot{y} &= mg(\cos\theta - 1) - c\dot{y} + u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta \\J\ddot{\theta} &= ru_1\end{aligned}\quad (5)$$

Introduction à la commande des systèmes linéaires

Modélisation des systèmes dynamiques

- Prenant comme vecteur d'état

$$z = [\theta, x, y, \dot{\theta}, \dot{x}, \dot{y}]^T = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]^T \text{ et}$$

$u = [F_1, F_2]^T = [u_1, u_2]^T$ on obtient les équations d'état non linéaire de l'avion :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \frac{r}{J} u_1 \\ g \sin \theta - \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{1}{m} u_1 \cos \theta - \frac{1}{m} u_2 \sin \theta \\ g(\cos \theta - 1) - \frac{c}{m} \dot{y} + \frac{1}{m} u_1 \sin \theta + \frac{1}{m} u_2 \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z, u) \\ f_2(z, u) \\ f_3(z, u) \\ f_4(z, u) \\ f_5(z, u) \\ f_6(z, u) \end{bmatrix}$$

- et le **modèle d'état non-linéaire équivalent**

$$\dot{z} = f(z, u_1, u_2) \quad (6)$$

Introduction à la commande des systèmes linéaires

Un système dynamique peut être représenté par un ensemble des équations différentiel de la forme

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (7)$$

- ▶ $f \in R^n$: est un vecteur fonction non linéaire.
- ▶ $x \in R^n$: est le vecteur d'état du système.
- ▶ $u \in R^m$: est le vecteur de la commande.
- ▶ $t \in R^+$: est le temps.

Introduction à ma commande des systèmes linéaires

- ▶ **Un point dans l'espace d'état** R^n correspond à un état du système, c.a.d à l'ensemble des valeurs, nécessaires pour déterminer le fonctionnement présent et futur du système.
- ▶ **L'ordre du système** est égale à la dimension du vecteur d'état d'une représentation minimale².
- ▶ **Une solution** $x(t)$, des équations (7), correspond à une courbe dans l'espace d'état en fonction du temps. Cette courbe est appelée *trajectoire de l'état ou trajectoire du système*.
- ▶ Si l'on suppose que la commande est obtenue par :

$$u(t) = g(x, t) \quad (8)$$

alors la dynamique du système bouclé peut être mise sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, g(x, t), t) \Rightarrow \dot{x} = f(x, t) \quad (9)$$

2. nombre minimale des variables d'état nécessaire à décrire le fonctionnement du système

Introduction à ma commande des systèmes linéaires : Les points d'équilibre

- ▶ **Définition** : Un état x_e est un état d'équilibre d'un système si $x(t_e) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e, \forall t \in (t_e, +\infty)$.
- ▶ **Exemple** : Cas du pendule \Rightarrow deux points d'équilibre :
Si pour $t = t_e$, $\theta(t_e) = 0 \vee \theta(t_e) = \pi$ et $\dot{\theta}(t_e) = 0$ alors $\forall t \in (t_e, +\infty)$ on a $\theta(t) = 0 \vee \theta(t) = \pi, \dot{\theta}(t) = 0$ (le point ou l'état d'équilibre).
- ▶ $\Rightarrow \dot{x}(t_e) = 0 = f(x_e, t_e)$
- ▶ Dans le cas des systèmes linéaires en boucle fermée :
 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), u(t) = -Kx(t)$, nous pouvons écrire $\dot{x} = (A - BK)x(t) \Rightarrow 0 = (A - BK)x_e$. S'il $\exists (A - BK)^{-1} \Rightarrow x_e = 0$ est la solution unique³.

3. Un système est asymptotiquement stable en boucle fermée si tous ces pôles sont dans la partie gauche du plan complexe ce qui implique que la matrice d'état en boucle fermée $A - BK$ est inversible

Le Concept de stabilité

- ▶ **Définition** : L'état d'équilibre, est dit stable si pour $\forall R \geq 0, \exists r \geq 0$, tel que si $\|x(0)\| \leq r$, alors $\|x(t)\| \leq R$, pour $t \geq 0$, sinon l'état d'équilibre est dit instable.
- ▶ **Définition** L'état d'équilibre, est dit asymptotiquement stable s'il est stable et en plus s'il $\exists r \geq 0$, tel que $\|x(0)\| \leq r$ implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. La sphère $B_r = \|x(0)\| \leq r$ est appelée domaine d'attraction.
- ▶ **Définition** : Un point d'équilibre qui est stable mais pas asymptotiquement stable est nommé marginalement stable.
- ▶ **Définition** : Un point d'équilibre $x(0)$ est exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs α et λ tels que :

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

Le Concept de stabilité

- ▶ **Remarque** : Dans le cas des systèmes linéaires :
 1. Stabilité asymptotique implique que les pôles du système sont à partie réelle strictement négative.
 2. L'instabilité implique au moins un pôle du système à partie réelle strictement positive ou deux pôles sur l'axe imaginaire (deux pôles à zéro ou deux paires de pôles imaginaires).
 3. Stabilité marginale implique qu'un pôle ou une paire de pôles du système se trouve sur axe imaginaire et les autres à partie réelle strictement négative.

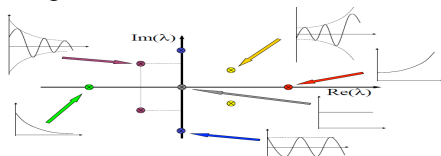


Figure: Le domaine de stabilité d'un système linéaire

- ▶ **Remarque** : Dans le cas des systèmes non-linéaires, la stabilité est liée à un points d'équilibre et d'une zone autour de ce point d'équilibre. Dans le cas linéaire elle est globale ($\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$).

Linéarisation et stabilité locale

- ▶ Considérons le **système non-linéaire et autonome**⁴

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (10)$$

$$\dot{x} = f(x_e, u_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{(x_e, u_e)}(x - x_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\bigg|_{(x_e, u_e)}(u - u_e) + T_{os}(x, u) \quad (11)$$

où $T_{os}(x, u)$ désigne les termes d'ordre supérieur de la série de Taylor.

- ▶ $(\delta x = x(t) - x_e, \delta u(t) = u(t) - u_e) \Rightarrow (\delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) - f(x_e, u_e))$
- ▶ L'équations différentielles (10) peuvent être écrites de la forme

$$\delta \dot{x}(t) = f(x_e, u_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{(x_e, u_e)}\delta x(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\bigg|_{(x_e, u_e)}\delta u(t) + T_{os}(x, u) \quad (12)$$

- ▶ Par hypothèse, le système est autonome $\frac{\partial f}{\partial u}\big|_{(x_e, u_e)}$ sont des matrices à coefficients constantes dénommé **matrice Jacobienne**.

4. la fonction $f(.,.)$ ne dépend pas explicitement du temps t

Linéarisation et stabilité locale

- ▶ Négligeant les termes d'ordre supérieur à un ($T_{os}(x, u)$) on obtient le modèle linéaire de premier ordre ou le linéarisé tangent du système autour du point d'équilibre (x_e, u_e) :

$$\delta\dot{x} = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{(x_e, u_e)}}_A \delta x + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\bigg|_{(x_e, u_e)}}_B \delta u \quad (13)$$

- ▶ qu'on peut l'écrire de la forme : $\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u$, avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

- ▶ **Attention**, l'état d'équilibre, x_e , et la commande à l'état d'équilibre, u_e , ne sont pas forcément égales à zéro.

Linéarisation et stabilité locale

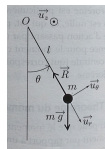
- ▶ **Théorème** : (*La méthode de linéarisation de Lyapunov*)
 1. *Si le système linéarisé est strictement stable alors le point d'équilibre du système non-linéaire est asymptotiquement stable.*
 2. *Si le système linéarisé est instable, alors le point d'équilibre est instable.*
 3. *Si le système linéarisé à un pôle sur l'axe imaginaire (marginale ment stable) , alors on ne peut pas conclure sur la stabilité du système non-linéaire.*
- ▶ **Remarque** : Dans le cas du système linéarisé marginalement stable, les dynamiques négligées peuvent rendre le système non-linéaire soit stable soit instable.

Linéarisation et stabilité locale

Modélisation du pendule : Principe fondamentale de la dynamique

- ▶ Supposons que la masse de la tige est négligeable par rapport à la masse de la masselotte m et sa longueur est égale à l
- ▶ Bilan des forces :
 1. poids $m\vec{g}$ et la tension exercée par le fil \vec{R}
 2. force $\vec{f}(t)$ colinéaire avec \vec{u}_θ créée par le couple $\tau(t)$ développé par le moteur placé sur l'axe de rotation de la tige au point O
- ▶ Appliquant le principe fondamentale de la dynamique en coordonnées polaires $(0, r, \theta)$ on obtient les équations différentielles (14)

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{R} + f(t)\vec{u}_\theta & (14) \\
 \vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= \frac{d(l\vec{\omega}(t))}{dt}\vec{u}_\theta + l\omega\frac{d(\vec{u}_\theta)}{dt} = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r \\
 \vec{f}(t) &= \frac{\tau(t)}{l}\vec{u}_\theta
 \end{aligned}$$



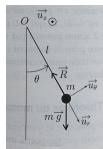
- ▶ $\tau(t)$ est le module du vecteur de couple moteur exercé sur l'axe de

Linéarisation et stabilité locale

Modélisation du pendule : Principe fondamentale de la dynamique

- ▶ On projette le principe fondamentale de la dynamique suivant \vec{u}_θ . Ainsi on s'affranchit de la tension \vec{R} qui n'a de composante non-nulle que sur \vec{u}_r .
On obtient :

- ▶
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + f(t)$$



- ▶
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{1}{ml}f(t) \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{1}{ml^2}\tau(t)$$

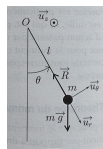
- ▶ La force $f(t)$ ou le couple $\tau(t)$ moteur constituent la commande du pendule

Linéarisation et stabilité locale

Modélisation du pendule : Equation de Lagrange

- ▶ Dans cet exemple on va passer les étapes nécessaires pour obtenir les équations d'état du système :
- ▶ L'énergie cinétique K et l'énergie potentielle P du pendule sont données par⁵ :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (v = l\dot{\theta}) \\ P &= mgl\cos\theta \end{aligned} \quad (15)$$



- ▶ Le Lagrangien est donné par :

$$L = K - P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \quad (16)$$

5. le moment d'inertie \mathcal{I} d'une masse m et de distance l par rapport au centre de rotation est ml^2).

Linéarisation et stabilité locale

Exemple : Modélisation et modèle d'état du pendule

- ▶ Suivant les équations de mouvement de Lagrange nous pouvons écrire :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (17)$$

où τ est le couple moteur.

- ▶ Remplaçant (16) dans (17) on obtient l'équation de l'équilibre dynamique :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = \tau \quad (18)$$

- ▶ où bien sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{\tau}{ml^2} \quad (19)$$

Linéarisation et stabilité locale

Exemple : Les équations d'état non-linéaire du pendule

- ▶ Si on choisit comme état du pendule $x = [\theta, \dot{\theta}]^T$ on peut écrire (25) de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tau}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

qu'on peut mettre sous la forme générique :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

représentant un **système dynamique non-linéaire autonome**

Linéarisation et stabilité locale

Exemple : Linéarisation du modèle d'état du pendule

- Calcul des matrices Jacobiennes pour $x_e = 0 \wedge u_e = 0$ et $[\delta(x(t), \delta u(t)) \Rightarrow [x(t), u(t)]^6$:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{(x_e, u_e)} x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\bigg|_{(x_e, u_e)} u$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -(\frac{g}{l})\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tau}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}}_B \tau \quad (22)$$

6. l'évolution de l'état du système et de sa commande autour du point d'équilibre

Linéarisation et stabilité locale

Exemple : Linéarisation du modèle d'état du pendule

- ▶ Equation de sortie :⁷

$$y(t) = c_1 \theta(t) + 0u = \underbrace{[c_1, 0]}_C x(t) + \underbrace{0}_D u$$

- ▶ Regardons la stabilité du pendule autour de $x_e = (0, 0)^T \Rightarrow$ les valeurs propres de la matrice A .
- ▶ L'équation ou le polynôme caractéristique de la matrice A est :
 $P(A) = \det(pI - A) = p^2 + g/l = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm i\sqrt{g/l}$, qui est un pôle "simple" du système sur l'axe imaginaire du domaine de Laplace S .
- ▶ **Conclusion** : le pendule est marginalement stable ou bien oscillant autour du point d'équilibre $x_e = (0, 0) \wedge u_e = 0$. Si on considère les frottement visqueux entre les pièces en rotation alors **le pendule est bien stable mais pas nécessairement suffisamment amorti**.

7. Nous avons placé seulement un capteur d'angle de rotation de la barre de gain c_1

Linéarisation et stabilité locale

Exemple : Linéarisation du modèle d'état du pendule

- ▶ Etudions le pendule inversé $\Rightarrow x_e = (\pi, 0) \wedge u_e = 0$.

$$\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m l^2} \end{bmatrix}}_B \tau \quad (23)$$

- ▶ L'équation ou le polynôme caractéristique de la matrice A est :
 $P(A) = \det(pI - A) = p^2 - g/l = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm\sqrt{g/l}$, qui donne deux pôles réels symétriques par rapport à l'axe imaginaire du domaine de Laplace S.
- ▶ Le pôle $p_1 = +\sqrt{g/l}$ est responsable de la nature instable du pendule inversé.

Linéarisation et stabilité locale

Exemple : Linéarisation du modèle d'état du pendule

- ▶ Modèle du pendule en présence des frottements visqueux.

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + f_v\dot{\theta} = \tau \quad (24)$$

- ▶ où bien sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{f_v}{ml^2}\dot{\theta} = \frac{\tau}{ml^2} \quad (25)$$

- ▶ le modèle d'état du pendule et du pendule inversé sont donnés par :

$$\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm \frac{g}{l} & -\frac{f_v}{ml^2} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}}_B \tau \quad (26)$$

- ▶ $\Rightarrow P(A) = \det(pI - A) = p(p + \frac{f_v}{ml^2}) - (\pm g/l) = 0$

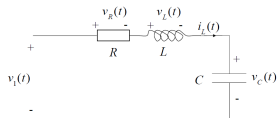
- ▶ Cas du pendule : $P(A) = p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2$, avec $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $\zeta = \frac{f_v}{2m\sqrt{gl^3}}$

Modélisation et analyse des systèmes

Modélisation du circuit RLC

- ▶ En appliquant les lois de Kirchhoff et les lois de mailles on obtient :

$$\begin{cases} C \frac{d}{dt} v_C(t) = i_L(t) \\ L \frac{d}{dt} i_L(t) = v_L(t) \\ v_R(t) = R i_L(t) \\ v_L = v_1(t) - v_R(t) - v_C(t) \end{cases}$$



- ▶ $\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} v_C(t) + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} v_C(t) + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{LC} v_1(t)$
- ▶ $\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} v_C(t) = -\frac{R}{L} \frac{d}{dt} v_C(t) - \frac{1}{LC} v_C(t) + \frac{1}{LC} v_1(t)$
- ▶ $v_1(t)$ et $v_C(t)$ sont respectivement le signal du contrôle et la tension aux bornes de la capacité.

Modélisation et analyse des systèmes

Modélisation du circuit RLC

- ▶ L'ordre de l'équation différentielle décrivant le fonctionnement de ce circuit est égale à deux (l'ordre de dérivation de v_C)
- ▶ Les signaux $v_C(t)$ and $i_L(t)$, représentent les valeurs instantanées de la tension et du courant respectivement aux bornes de la capacité et de la bobine qui constituent les deux éléments inertiels du circuit.
- ▶ Le vecteur d'état du circuit RLC est $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ où $x_1(t) = v_C(t)$ et $x_2(t) = i_L(t)$.
- ▶ La tension aux bornes de la **capacité** est l'image de **l'énergie potentielle** et **le courant de la bobine (self)** est l'image de **l'énergie cinétique** .
- ▶ La **tension d'entrée** est une source extérieure d'énergie : $u(t) = v_1(t)$.

Modélisation et analyse des systèmes

Modélisation du circuit RLC : Modèle d'état

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \quad & C \frac{d}{dt} v_C(t) = i_L(t) \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{C} x_2(t) \\
 & L \frac{d}{dt} i_L(t) = v_1(t) - R i_L(t) - v_C(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} v_1(t) \\
 \Rightarrow \dot{x}(t) = & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_B u(t) = f(x(t), u(t)), \quad (27)
 \end{aligned}$$

► Les caractéristiques générales :

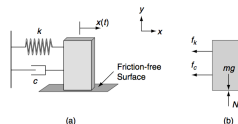
1. système de deux équations différentielles de premier ordre \Rightarrow deux états liés aux éléments capable de conserver et d'échanger l'énergie
2. RLC circuit is **autonomous** (A et B ne dependent pas du temps)
3. La fonction $f(x(t), u(t))$ est linéaire en $x(t)$ et en $u(t)$.
4. La dynamique est décrit par **ED linéaire**
5. Les équations d'état sont structurellement semblables aux équations d'état du pendule dont le polynôme caractéristique peut se mettre sous la forme générale : $P(A) = p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2$
6. Pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{1/LC}$ et amortissement : $\zeta = \frac{R}{2\sqrt{L/C}}$

Modélisation et analyse des systèmes

Modélisation du système d'amortissement Masse-Ressort : Modèle d'état

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (28)$$

- ▶ m, k, c sont respectivement, la masse en [kg], k est la raideur du ressort en [N/m], c est le coefficient des frottements visqueux en [N s/m]
- ▶ $f(t)$ est une force externe appliquée sur la masse
- ▶ $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$ sont respectivement la position, la vitesse et l'accélération de la masse.
- ▶ La masse et le ressort sont les deux éléments capable de conserver l'énergie⁽⁸⁾.



8. une rotation de $\pi/2$ permet d'obtenir une representation du système de suspension d'un véhicule où m serait la masse de 1/4 de ce véhicule

Modélisation et analyse des systèmes

Modélisation du système d'amortissement Masse-Ressort : Modèle d'état

- ▶ Nous allons choisir le vecteur d'état : $z(t) = (x(t), \dot{x}(t))^T$ et la commande $u(t) = f(t)$
- ▶ Les équations d'état peuvent être écrit :

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}_A z(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_B u(t) = f(z(t), u(t)) \quad (29)$$

- ▶ Le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P(A) = p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2$$

avec

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Systèmes linéaires à temps continue

- ▶ La représentation d'état des systèmes est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (30)$$

où :

- ▶ $x \in R^n$: est le vecteur d'état du système.
- ▶ $u \in R^m$: est le vecteur de la commande.
- ▶ $t \in R^+$: est le temps.
- ▶ A, B, C, D sont des matrices constantes de dimensions convenables.

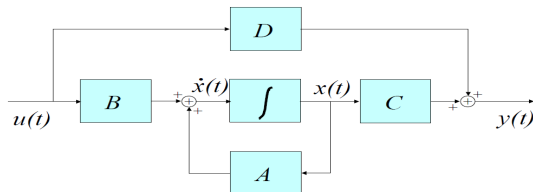


Figure: Représentation schématique des équations d'état du système

La solution des équations d'états

Domaine fréquentiel :

- ▶ Si on opère la transformée de Laplace des deux côtés de (30) on obtient :

$$\begin{aligned} pX(p) - x_0 &= AX(p) + BU(p) \\ Y(p) &= CX(p) + DU(p) \end{aligned} \tag{31}$$

où $x_0 = x(0)$ est l'état initial et $X(p)$, $Y(p)$, $U(p)$ sont les transformées de Laplace de $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ respectivement. Les équations (31) peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{aligned} (pI - A)X(p) &= x_0 + BU(p) \\ Y(p) &= CX(p) + DU(p) \end{aligned} \tag{32}$$

ou bien sous la forme :

La solution des équations d'états

Domaine fréquentiel :

$$X(p) = (pl - A)^{-1}(x_0 + BU(p)) \quad (33)$$

$$Y(p) = C((pl - A)^{-1}(x_0 + BU(p))) + DU(p)$$

- ▶ La matrice $(pl - A)^{-1}$ est appelée **la matrice de resolution** (dont la transformée inverse de Laplace est la matrice de transition d'état) que l'on note par : $\Phi(p) = (pl - A)^{-1} = \frac{adj(pl-A)}{det(pl-A)}$

- ▶ (33) \Rightarrow

$$X(p) = \Phi(p)x_0 + \Phi(p)BU(p) \quad (34)$$

$$Y(p) = C\Phi(p)x_0 + C\Phi(p)BU(p) + DU(p)$$

- ▶ Si $x_0 = 0$ on peut écrire :

$$Y(p) = H(p)U(p) \Rightarrow H(p) = C\Phi(p)B + D \quad (35)$$

La solution des équations d'états

Domaine temporelle :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (36) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \forall x(0) \in \mathcal{R}^n \\ x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (37)$$

- ▶ De la relation entre la sortie $y(t)$ et l'état $x(t)$ on peut trouver l'expression de la sortie :

$$y(t) = C[e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau] + Du(t) \quad (38)$$

- ▶ De la linéarité du système (36) on réécrit (37) \Rightarrow :

$$x(t) = e^{At}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (39)$$

La solution des équations d'états

Domaine temporelle :

Sachant que :

$$\int_0^t \delta(t - \tau) u(\tau) d\tau = u(t) \quad (40)$$

- ▶ on peut écrire :

$$Y(t) = Ce^{At}x(t_0) + \int_{t_0}^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t - \tau)]u(\tau)d\tau \quad (41)$$

- ▶ **Définition** La matrice de transition d'état est donnée par :

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (42)$$

- ▶ Si on considère le cas où $u(t) \equiv 0$, alors de (39) on peut écrire :

$$x(t) = e^{At}x(t_0) \quad (43)$$

La solution des équations d'états

Domaine temporelle :

- ▶ Si l'état initial est identique à zéro alors on peut dire que la sortie est obtenue par la convolution de :

$$h(t) \equiv Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (44)$$

avec l'entrée $u(t)$.

- ▶ $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système sous forme d'état $\{A, B, C, D\}$.
- ▶ Notons la transformée de Laplace de $h(t)$: $L\{h(t)\} = H(p)$:
 $\Rightarrow H(p)$ est la matrice de transfert **entrée/sortie** du système.

Modes naturelles et la stabilité interne

- ▶ Supposons que la matrice de transfert du système soit mis sous la forme :

$$H(p) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{p - p_i} \quad (45)$$

où :

- ▶ p_i : sont les pôles du système
 - ▶ K_i : sont les résidus du pôle (une matrice de dimension $p \times m$)
- ▶ La réponse impulsionnelle est obtenue par la transformation inverse de Laplace de (46) :

$$h(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u_{-1}(t) \quad (46)$$

où $u_{-1}(t)$ est l'échelon unité :

- ▶ $u_{-1}(t) = 0$ si $t \leq 0$
- ▶ $u_{-1}(t) = 1$ si $t \geq 0$

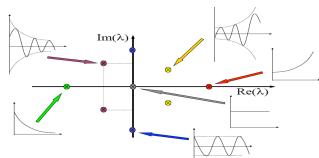
Modes naturels et la stabilité interne

- ▶ De (46) on peut voir clairement qu'à chaque pôle est associée une fonction temporelle de la forme $e^{p_i t}$. Ces fonctions sont appelées les **modes naturels** du système.
- ▶ **Définition** Une mode naturelle est stable si elle converge vers zéro quand temps va vers l'infini.
- ▶ Les pôles du système sont les racines du polynôme caractéristique de la **matrice d'état A**

$$\Delta(p) = \det(pI - A)$$

- ▶ **Définition** : Un pôle est dit stable s'il a un mode naturel stable.
Si on écrit le mode naturel comme :

$$e^{p_i t} = e^{\alpha t} e^{j\beta t}$$



- ▶ avec $p_i = \alpha + j\beta$. Alors, $e^{\alpha t}$ est la partie réelle qui détermine la vitesse de convergence vers zéro ou de divergence de ce mode.

Modes naturelles et la stabilité interne

- ▶ **Définition** : Une mode naturelle est dit marginalement stable si elle est bornée.

$$U(p) = \frac{1}{p}, \quad U(p) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} = \frac{\beta}{(p + i\beta)(p - i\beta)}$$

- ▶ Ces deux fonctions de transfert ont des pôles simples sur l'axe imaginaire donc elles sont **marginalement stables**. Un pôle est stable si et seulement s'il est un pole simple sur l'axe imaginaire ou bien à partie réelle strictement négative. exemples
- ▶ La rampe $u(t) = tu_{-1}(t)$ a pour transformation de Laplace :

$$U(p) = \frac{1}{p^2}$$

et la fonction $u(t) = t \sin \beta t$, a pour transformation de Laplace :

$$U(p) = \frac{p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2} = \frac{p\beta}{(p + i\beta)^2(p - i\beta)^2}$$

Exemple : Etude d'un système de deuxième ordre

Modèle et caractéristiques

- ▶ Considérons le système sous forme d'état ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\alpha \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) \end{aligned} \quad (47)$$

- ▶ Le modèle représente un système masse ressort, un circuit RLC ou bien le pendule en présence fortement visqueux
- ▶ **Pôles du système** : si $\alpha > 0$, le polynôme caractéristique du système : $\det(pI - A) = p^2 + 2\alpha p + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm i\beta$ avec $\beta = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$
- ▶ Le système est un **oscillateur harmonique** avec une **fréquence naturelle** ω_n , une **fréquence d'oscillation** β et un **amortissement** $\zeta = \alpha/\omega_n$.

Exemple : Etude d'un système de deuxième ordre

Modèle et caractéristiques

- **Polynôme caractéristique** en fonction de ζ et $\omega_n \Rightarrow$

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_n^2 = p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = [p + (\alpha + i\beta)][p + (\alpha - i\beta)]$$

- **Matrice de résolution** $\Phi(p) = (pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ \omega_n^2 & p + 2\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(pI - A)} \begin{bmatrix} p + 2\alpha & 1 \\ -\omega_n^2 & p \end{bmatrix}$.

- **Fonction de transfert** : $H(p) = C\Phi(p)B = \frac{1}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{1}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$

- **Matrice de transition d'état** e^{At} est la transformée inverse de $\Phi(p)$:

$$e^{At} = \phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(p)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\alpha t} \cos \beta t u_{-1}(t) + \begin{pmatrix} \alpha/\beta & 1/\beta \\ -\omega_n^2/\beta & -\alpha/\beta \end{pmatrix} e^{-\alpha t} \sin \beta t u_{-1}(t)$$

qui est bien **une combinaison linéaire des pôles ou modes naturelles du système**

Exemple : Etude d'un système de deuxième ordre

Modèle et caractéristiques

- ▶ **Réponse impulsionnelle** est le Laplace inverse de la fonction de transfert $H(p) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t u_{-1}(t)$
- ▶ La sortie en fonction de l'état initial $x(0) = [1 \ 0]$ et le signal d'entrée $u(t) = e^{-\alpha t} u_{-1}(t)$

$$\Rightarrow U(p) = \frac{1}{s + \alpha}, Y(p) = \frac{p + 2\alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{1}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \cdot \frac{1}{p + \alpha}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{(\beta^2 - 1)}{\beta^2} e^{-\alpha t} \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t + \frac{1}{\beta^2} e^{-\alpha t}$$

- ▶ Il est intéressant de souligner que le signal de sortie est composé des fréquences correspondant aux modes naturels du système ainsi que celles correspondant au signal d'entrée.

Exemple : Performances d'un système stable de 2^{me} ordre

- ▶ **Définition** La constante de temps de l'exponentiel $e^{-\alpha t}$, ($\alpha \geq 0$) est le réel τ tel qu'on peut l'écrire $e^{-\frac{t}{\tau}}$ (ou bien le temps pour que l'exponentiel soit égal à e^{-1}) $\Rightarrow \tau = \frac{1}{\alpha}$
- ▶ Le comportement naturel du système stable est oscillatoire avec une fréquence β dont l'amplitude diminue d'une façon exponentielle avec une constante de temps $\tau = \frac{1}{\alpha}$.
- ▶ **Définition** Le temps de réponse ou de rétablissement t_s est le temps qu'il faut pour que l'erreur entre la valeur stabilisée du signal et sa valeur instantanée soit inférieure à 5% ($|y(+\infty) - y(t)| \leq 5\%$).
- ▶ Pour des réponses exponentielles, on peut considérer qu'après $t_s \cong (4 \div 5)\tau$ secondes les transitoires ont pratiquement disparu.

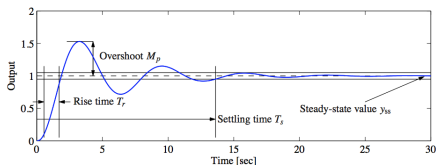


Figure 5.9: Sample step response. The rise time, overshoot, settling time and steady-state value give the key performance properties of the signal.

Les systèmes à temps discret

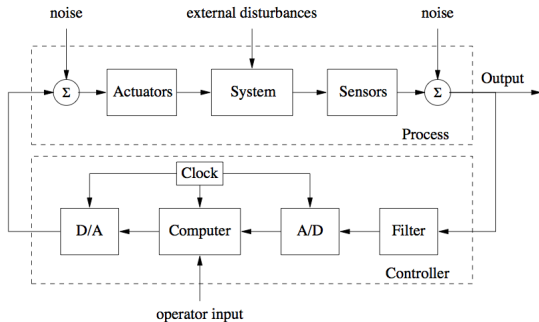


Figure 1.3: Components of a computer-controlled system. The upper dashed box represents the process dynamics, which include the sensors and actuators in addition to the dynamical system being controlled. Noise and external disturbances can perturb the dynamics of the process. The controller is shown in the lower dashed box. It consists of a filter and analog-to-digital (A/D) and digital-to-analog (D/A) converters, as well as a computer that implements the control algorithm. A system clock controls the operation of the controller, synchronizing the A/D, D/A and computing processes. The operator input is also fed to the computer as an external input.

Les systèmes à temps discret

- ▶ Relation entre l'état à un instant donné avec l'état précédent et la commande précédente à tout instant $k * T_{ech}$, $k \in \mathcal{N}$ est donnée par (48) où T_{ech} est la période d'échantillonnage.

$$\begin{aligned}x((k+1)T_{ech}) &= A_d x(kT_{ech}) + B_d u(kT_{ech}), \quad x(0) = x_0 \\ y(kT_{ech}) &= C_d x(kT_{ech}) + D_d u(kT_{ech})\end{aligned} \quad (48)$$

- ▶ La question que l'on peut se poser est de savoir comment on obtient cette équation à partir des équations d'état continues :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \quad (49)$$

Obtention des équations d'état discret

- ▶ La discrétisation des équations d'état va se faire sous l'hypothèse que **la commande reste constante pendant toute la période d'échantillonnage** :

$$u(t) = u(kT_{ech}) = c^{te}, \forall t \in [kT_{ech}, (k+1)T_{ech}]$$

- ▶ Rappelons que l'évolution de l'état du système pour $\forall t \in \mathcal{R}$ est donné par :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- ▶ Pour $t = kT_{ech}$ on obtient :

$$\begin{aligned} x(kT_{ech}) &= e^{AkT_{ech}}x(0) + \dots \\ &\quad + \int_0^{kT_{ech}} e^{A((kT_{ech})-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

- ▶ L'état à l'instant $t = (k+1)T_{ech}$ est donné par :

$$\begin{aligned} x((k+1)T_{ech}) &= e^{A(k+1)T_{ech}}x(0) + \dots \\ &\quad + \int_0^{(k+1)T_{ech}} e^{A(((k+1)T_{ech})-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

- ▶ que l'on peut écrire :

Obtention des équations d'état discret

$$x((k+1)T_{ech}) = e^{AT_{ech}} e^{AkT_{ech}} x(0) + \int_0^{kT_{ech}} e^{A(((k+1)T_{ech})-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_{kT_{ech}}^{(k+1)T_{ech}} e^{A(((k+1)T_{ech})-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$x((k+1)T_{ech}) = e^{AT_{ech}} e^{AkT_{ech}} x(0) + \int_0^{kT_{ech}} e^{A(((k+1)T_{ech})-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_{kT_{ech}}^{(k+1)T_{ech}} e^{A(((k+1)T_{ech})-\tau)} Bu(k) d\tau$$

$$x((k+1)T_{ech}) = e^{AT_{ech}} (e^{AkT_{ech}} x(0) + \int_0^{kT_{ech}} e^{A(((k+1)T_{ech})-\tau)} Bu(\tau) d\tau) + (\int_{kT_{ech}}^{(k+1)T_{ech}} e^{A(((k+1)T_{ech})-\tau)} Bd\tau) u(k)$$

Si on fait un changement de variables : $\lambda = (k+1)T_{ech} - \tau$
alors on obtient $\tau = (k+1)T_{ech} - \lambda$. Pour $\tau = (k+1)T_{ech}$ on a $\lambda = 0$ et
pour $\tau = kT_{ech}$ on a $\lambda = T_{ech}$. Donc on peut écrire :

Obtention des équations d'état discret

$$x((k+1)T_{ech}) = \underbrace{e^{AT_{ech}}}_{A_d} \underbrace{\left[e^{AkT_{ech}} x(0) + \int_0^{kT_{ech}} e^{A((k+1)T_{ech}-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right]}_{x_k} - \underbrace{\left(\int_{T_{ech}}^0 e^{A\lambda} Bd\lambda \right)}_{B_d} u(k)$$

$$\begin{aligned} x((k+1)T_{ech}) &= A_d x(kT_{ech}) + B_d u(kT_{ech}), & x(0) &= x_0 \\ y(kT_{ech}) &= C_d x(kT_{ech}) + D_d u(kT_{ech}) \end{aligned} \quad (50)$$

où :

- ▶ $A_d = e^{AT_{ech}}$
- ▶ $B_d = - \int_{T_{ech}}^0 e^{A\lambda} Bd\lambda$
- ▶ $C_d = C, D_d = D$

Remarque Puisque les équations de sortie ne représentent pas de dynamique on peut écrire $C_d = C, D_d = D$.

Solution des équations d'état discret

- ▶ **Solution fréquentielle** : La transformée de z unilatérale d'une fonction discrete est définie comme :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k} \quad (51)$$

- ▶ La transformée de z de (48) étant donné les conditions initiales x_0 :

$$zX(z) - zx_0 = A_d X(z) + B_d U(z)$$

où bien :

$$(zI - A_d)X(z) = zx_0 + B_d U(z)$$

- ▶ La solution fréquentielle de(48) est :

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI - A_d)^{-1}zx_0 + (zI - A_d)^{-1}B_d U(z) \\ Y(z) &= C_d(zI - A_d)^{-1}zx_d + [C_d(zI - A_d)^{-1}B_d + D_d]U(z) \end{aligned} \quad (52)$$

Solution des équations d'état discret

- ▶ Si l'on définit par $\Phi(z) = (zI - A_d)^{-1}$ la **matrice de transition d'état** (ou de résolution) dans le cas discret alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} X(z) &= \Phi(z)zX_0 + \Phi(z)B_d U(z) \\ Y(z) &= C_d\Phi(z)zX_0 + [C_d\Phi(z)B_d + D_d]U(z) \end{aligned} \quad (53)$$

- ▶ La fonction de transfert discret est donnée par :

$$H(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d + D_d = C_d\Phi(z)B_d + D_d \quad (54)$$

- ▶ d'où on peut récrire l'expression de $Y(z)$:

$$Y(z) = C_d\Phi(z)zX_0 + H(z)U(z) \quad (55)$$

- ▶ L'expression de la sortie permet de constater qu'elle est constituée, comme dans le cas continu, de deux composantes :
 - ▶ Une composante **pour une entre nulle** qui dépend uniquement des conditions initiales \Rightarrow **la solution libre**.
 - ▶ Une composante **pour les conditions initiales nulles** qui dépend uniquement de l'entrée principale \Rightarrow **solution forcée**.

Solution des équations d'état discret

$$H(z) = \frac{C_d \text{adj}(zI - A_d) B_d}{\det(zI - A)} + D \quad (56)$$

$$= \frac{C_d \text{adj}(zI - A_d) B_d + D_d \det(zI - A)}{\det(zI - A)}$$

$$\Rightarrow \Delta_d(z) \equiv \det(zI - A_d) = 0 \quad (57)$$

- **La solution temporelle** \Rightarrow Le développement en série de Laurent autour de l'infini de $z\Phi(z)$ est :

$$z\Phi(z) = z(zI - A_d)^{-1} = I + z^{-1}A_d + z^{-2}A_d^2 + z^{-3}A_d^3 \quad (58)$$

$$+ \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A_d^k$$

- De (51) et de (58) on peut écrire :

Solution des équations d'état discret

$$Z\{A_d^k\} = z\Phi(z) = z(zI - A_d)^{-1} \quad (59)$$

où $Z(\cdot)$ indique l'opérateur de la transformée en z . Il faut noter la présence d'un terme supplémentaire en z . On appelle A_d^k **exponentiel d'une matrice discrète**.

- ▶ Si on opère la transformée inverse de Z de (60) on obtiens la solution temporelle des equation d'état discret (61)

$$x(k) = A_d^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-i-1} B_d u_i. \quad (60)$$

- ▶ Itérant les équations d'état discret (61) de $k = 0$ à $k = n$ nous obtenons aussi le resultat (60) et ainsi l'équivalence des deux approches, fréquentielle et temporelle, de la solution de (61).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) & x(0) &= x_0 \\ y(k) &= C_d x(k) + D_d u(k) \end{aligned} \quad (61)$$

- ▶ **Remarque** : Le second terme de (60) est le produit de convolution de A_d^k et de $B_d u(k)$.

Solution des équations d'état discret

- ▶ Si on suppose que $u(k) \equiv 0$, alors la solution de l'homogène de (50) est :

$$x(k) = A_d^k x(0) \quad (62)$$

- ▶ Si, par contre, les conditions initiales sont identiques à zéro alors on obtient :

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-i-1} B_d u_i \quad (63)$$

- ▶ De (50) et (60), la sortie du système est donnée par :

$$Y(k) = C_d A_d^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C_d A_d^{k-i-1} B_d u_i + D_d u(k) \quad (64)$$

Solution des équations d'état discret

- ▶ De (64), la réponse impulsionnelle de (60) est donnée par :

$$h_k = \begin{cases} D_d & k = 0 \\ C_d A_d^{k-1} B_d & k \geq 1 \end{cases} \quad (65)$$

- ▶ **Conclusion** La sortie du système est composée de la réponse du système pour une entrée identique à zéro ($C_d A_d^k x(0)$) et la convolution de l'entrée et de la réponse impulsionnelle ($\sum_{i=0}^{k-1} C_d A_d^{k-i-1} B_d u_i + D_d u(k)$).

Les modes naturelles discrètes

- ▶ La fonction de transfert, dans le cas des pôles distincts, peut être écrite comme :

$$H(z) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{zK_i}{z - p_i} = \frac{K_i}{1 - p_i z^{-1}} \quad (66)$$

- ▶ où les $K_i, i = 1, \dots, n$ sont les résidus du pôle p_i .
- ▶ Si on prend la transformée inverse de Z ou Z^{-1} de (66) on obtient :

$$h_k = \sum_{i=1}^{i=n} K_i p_i^k, \quad k \geq 0 \quad (67)$$

- ▶ De l'expression de la réponse impulsionnelle (67) il est évident qu'à chaque pôle est associée une fonction exponentielle discrète de la forme p_i^k qui sont les **modes naturels de ces pôles**.

La stabilité interne

- ▶ **Définition** : Un pôle en discret est stable (asymptotiquement) si ces modes naturels convergent vers zéro.
- ▶ Si on écrit :

$$p_i^k = |p_i^k| e^{jkarg(p_i)}$$

- ▶ alors on peut dire qu'un pôle est stable si et seulement s'il est à l'intérieur du cercle unité dans le plan Z (une amplitude inférieure à 1).
- ▶ **Définition** : Un système discret est stable si et seulement si tous ces pôles sont stables.
- ▶ **Définition** : Un système discret est instable s'il a au moins un pôle à l'extérieur du cercle unité ou bien au moins un pôle multiple sur le cercle unité dans le plan Z .
- ▶ **Exemple** : La transformée en z d'un échelon unitaire et d'une rampe unitaire sont données par :

$$U_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ et } U_2(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Atteignabilité

- ▶ Examiner la structure de **couplage entrées/états** pour les systèmes discrets et continus sous les formes :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k)\end{aligned}\tag{68}$$

$$x(t) \in R^n, x(k) \in R^n, u(t) \in R^m, u(k) \in R^m$$

- ▶ L'objectif est d'évaluer la capacité du système à modifier ses états internes utilisant ses entrées de commande. Si un sous ensemble des composantes du vecteur d'état ne peuvent pas être influencées par la commande, alors il y a une limite de l'action de la commande sur le système.
- ▶ **Définition** : Le vecteur d'état $x \in R^n$ est dit atteignable s'il existe une commande $u(t) \in R^m$ et un temps fini T_f tel que, à partir des conditions initiales $x_0 \in R^n$ et en appliquant cette commande $u(t)$, $t \in [0, T_f]$, l'état final du système est $x(T_f) = x$.
- ▶ **Définition** : Un système est dit atteignable si tous ces états sont atteignables.

Atteignabilité des systèmes discrets

- Supposons que les équations d'état discrets du système sont données par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) & x(0) &= x_0 \\ y(k) &= C_d x(k) + D_d u(k) \end{aligned} \quad (69)$$

où, $x(k) \in R^n$, $y(k) \in R^p$, $u(k) \in R^m$

- L'expression de l'état à l'instant (nT_{ech}) ⁽⁹⁾ en fonction de l'état initial et de la commande est donnée par.

$$x(n) = A_d^n x(0) + \sum_{i=0}^{n-1} A_d^{n-i-1} B_d u_i \quad (70)$$

$$= A_d^n x_0 + [B_d, A_d B_d, A_d^2 B_d, \dots, A_d^{n-1} B_d] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

9. n est l'ordre du système

Atteignabilité des systèmes discrets

ou bien :

$$x(n) = A_d^n x(0) + W_c U \quad (71)$$

où :

- ▶ $W_c = [B, A_d B_d, A_d^2 B_d, \dots, A_d^{n-1} B_d]$, est la **matrice d'atteignabilité**.
- ▶ $U = [u(n-1), u(n-2), \dots, u(1), u(0)]^T$ est le vecteur de n commandes.
- ▶ **Théorème** : Une condition nécessaire est suffisante pour que le système (69) soit atteignable est que le rang de la matrice d'atteignabilité W_c soit égale à l'ordre du système n ($n = \dim(x)$).

Contrôlabilité des systèmes discrets

- ▶ **Définition** : Le système est contrôlable s'il est possible de trouver une séquence de commande telle que l'origine soit atteinte en temps fini à partir de n'importe quel état initial.
- ▶ **Remarque** : Une condition suffisante pour qu'un système soit contrôlable est que la matrice d'état soit une matrice Nilpotente¹⁰. Donc la condition d'atteignabilité est plus forte que celle de contrôlabilité.

10. Une matrice nilpotente est une matrice dont il existe une puissance égale à la matrice nulle. Dans notre cas il suffit que cette matrice à la puissance inférieure ou égale à n soit égale à zéro

Atteignabilité des systèmes continus

- ▶ **Remarque** Dans le cas des systèmes linéaires continus, on peut écrire de la même manière la condition d'atteignabilité.

$$W_c = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (72)$$

- ▶ **Théorème** : Le système d'ordre n représenté par les équations d'état continus est atteignable si le rang de la matrice d'atteignabilité (72) est égale à n .
- ▶ **Remarque** : Dans le cas de systèmes linéaires continus la notion d'atteignabilité est équivalente avec la notion de contrôlabilité. C'est la raison pour laquelle pour ce type de système on parle de matrice de commandabilité.
- ▶ **Propriété** : Si T est une transformation linéaire non singulière de l'état du système alors le système obtenu conserve les mêmes propriétés d'atteignabilité et de contrôlabilité.
- ▶ **Remarque** : Cette propriété s'applique aussi dans le cas des systèmes discrets.

Observabilité des systèmes dynamique

- ▶ **Objectif** : Déterminer les conditions nécessaires et/ou suffisantes permettant de reconstruire l'état du système (73) et/ou (74) à partir des mesures envoyée par les capteurs.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{73}$$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C_d x(k)\end{aligned}\tag{74}$$

- ▶ Si certains états du système n'ont pas d'influence sur les variables de la sortie, il est clair que la sortie ne porte pas l'information complète sur l'état du système.

Observabilité des systèmes discrets

- Considérons le système discret (74). On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 x(1) &= A_d x(0) + B_d u(0) \\
 x(2) &= A_d x(1) + B_d u(1) = A_d^2 x(0) \\
 &\quad + A_d B_d u(0) + B_d u(1) \\
 &\vdots = \vdots \\
 x(n) &= A_d x(n-1) + B_d u(n-1) \\
 &= A_d^{n-1} x(0) + \dots + A_d B_d u(0) + B_d u(n-1)
 \end{aligned} \tag{75}$$

- Les sorties : \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 y(0) &= C_d x(0) \\
 y(1) &= C_d A_d x(0) + C_d B_d u(0) \\
 &\vdots = \vdots \\
 y(n-1) &= C_d A_d x(n-2) + C_d B_d u(n-2) \\
 &= C_d A_d^{n-2} x(0) + \dots + C_d A_d B_d u(0) + C_d B_d u(n-2)
 \end{aligned}$$

Observabilité des systèmes discrets

Forme matricielle \Rightarrow

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^{n-1} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_d B_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_d A_d B_d & C_d B_d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_d A_d^{n-2} B_d & C_d A_d^{n-2} B_d & \dots & C_d B_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} \quad (76)$$

Observabilité des systèmes discrets

- **Objectif** : Calculer l'état initial à partir des n mesures de sorties et des n signaux de commandes calculés \Rightarrow

$$Y_n = W_o x(0) \quad (77)$$

où :

$$Y_n = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_d B_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_d A_d B_d & C_d B_d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_d A_d^{n-2} B_d & C_d A_d^{n-3} B_d & \dots & C_d B_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix}$$

Observabilité des systèmes discrets

$$W_o = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^{n-1} \end{bmatrix} \quad (79)$$

- ▶ La solution de l'équation (77) est unique si et seulement si la matrice d'observabilité W_o est de rang n (n étant l'ordre du système).
- ▶ **Théorème** : Le système (83) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité W_o est de rang n .
- ▶ **Remarque** : Comme dans le cas d'atteignabilité nous pouvons définir la notion de constructibilité des systèmes. Cette matrice est donnée par :

$$W_o = \begin{bmatrix} C_d A_d^{-1} \\ \vdots \\ C_d A_d^{-n} \end{bmatrix} \quad (80)$$

Observabilité des systèmes discrets

- ▶ Si la matrice A_d est non sigulière l'observabilité implique constructabilité est inversement.
- ▶ **Remarque.** Si au lieu du système (74) qui est équivalent au quadruplet $\{A_d, B_d, C_d, D_d\}$ on considère le système dual $\{A_d^T, C_d^T, B_d^T, D_d^T\}$ alors le premier est observable (atteignable) si et seulement si son dual est atteignable (observable). Pour voir cette dualité il suffit de regarder les matrices d'atteignabilité et d'observabilité.
- ▶ **Remarque :** Nous avons démontré l'invariance d'atteignabilité par la transformation inversible de l'état du système. De la remarque précédente nous pouvons conclure que l'observabilité est aussi invariante par une transformation inversible de l'état.

Perte d'atteignabilité et d'observabilité par la discrétisation

- ▶ **Exemple** : Considérons le système continu suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (81)$$

- ▶ Le modèle d'état discret correspondant (à réponse indicielle équivalente) est :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} \cos \omega T_{ech} & \sin \omega T_{ech} \\ -\sin \omega T_{ech} & \cos \omega T_{ech} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega T_{ech} \\ \sin \omega T_{ech} \end{bmatrix} u \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned} \quad (82)$$

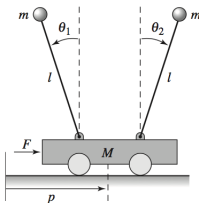
Perte d'atteignabilité et d'observabilité par la discrétisation

- ▶ Les déterminants des matrices d'atteignabilité et d'observabilité sont :

$$\det(W_c) = -2\sin\omega T_{ech}(1 - \cos\omega T_{ech})$$

$$\det(W_o) = \sin\omega T_{ech}$$

- ▶ On peut remarquer que les propriétés d'atteignabilité et d'observabilité du système continu sont perdues dans le cas discret si on échantillonne à $T_{ech} = \frac{n\pi}{\omega}$.
- ▶ **Exercice** : Le double pendule ci-dessous est-t-il atteignable ?



Décomposition selon la commandabilité et l'observabilité

- ▶ Tous les systèmes ne remplissent pas les conditions d'atteignabilité et d'observabilité. La question qui se pose est multiple :
 - ▶ Peut-on décomposer le système suivant l'atteignabilité ou observabilité ?
 - ▶ Est-il possible de contrôler un système non-atteignable ou non-observable ?
- ▶ Etant donné le système dynamique continu :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (83)$$

- ▶ **Théorème** : Si la matrice d'atteignabilité W_c est de rang $n_1 \leq n$ (n est l'ordre du système) alors il existe une transformation inversible T avec :

$$z = Tx = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} x \Rightarrow A^* = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ 0 & A_{22}^* \end{bmatrix}, B^* = TB = \begin{bmatrix} B_1^* & 0 \end{bmatrix}$$

Décomposition selon la commandabilité et l'observabilité

- ▶ Le sous-système (A_{11}^*, B_1^*) est atteignable.
- ▶ Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ 0 & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^* \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1^* & C_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (84)$$

- ▶ L'équation (84) on peut la mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_{11}^* z_1 + A_{12}^* z_2 + B_1^* u \\ \dot{z}_2 &= A_{22}^* z_2 \end{aligned} \quad (85)$$

- ▶ **Définition** : Un système est dit **stabilisable** si on peut le stabiliser par une action de commande.

Décomposition selon la commandabilité et l'observabilité

- ▶ **Propriété** : Un système non-atteignable est stabilisable si et seulement si la partie non-atteignable (non-commandable) est stable.
- ▶ Donc la stabilisabilité est liée directement avec l'atteignabilité mais elles ne sont pas équivalentes. Tout système atteignable est stabilisable mais l'inverse n'est pas toujours vrai.
- ▶ Le concept équivalent à la stabilisabilité est la détectabilité. Dans ce cas on s'intéresse à la décomposition du système (83) suivant l'observabilité.

Décomposition selon la commandabilité et l'observabilité

- **Théorème** : Si la matrice d'observabilité W_o est de rang $n_1 \leq n$ (n ordre du système) alors il existe une transformation inversible T avec :

$$z = Tx = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} T_1 x \\ T_2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

telle que :

$$A^* = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & 0 \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$C^* = TC = [C_1^* \quad 0]$$

- Le sous système (A_{11}^*, C_1^*) est observable ce qui implique :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^* & 0 \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^* \\ B_2^* \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1^* \quad 0] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (86)$$

Décomposition selon la commandabilité et l'observabilité

- ▶ **Remarque** : La décomposition selon l'atteignabilité et l'observabilité se fait de même façon pour les systèmes à temps discret.

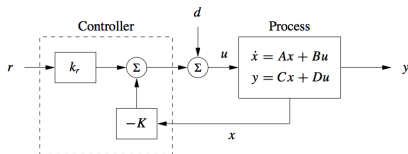
La commande par retour d'état

- Supposons que nous avons le système dynamique continu suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (87)$$

- $x(t) \in R^n, y(t) \in R^p, u(t) \in R^m$: sont respectivement l'état, la sortie et la commande du système (87).
- A, B, C sont des matrices de dimensions convenables.
- Hypothèse 1** : Dans un premier temps nous allons supposer que l'état du système est complètement mesurable, c.a.d que $y(t) \equiv x(t)$.
- L'**objectif à atteindre** est de réaliser une commande par retour d'état : $u(t) = -Kx(t) + k_r r(t)$, $K \in R^m$ permettant de donner la dynamique stable souhaitée au système en boucle fermée :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= -Kx(t) + k_r r(t)\end{aligned}\quad (88)$$



La commande par retour d'état

- ▶ K : est le vecteur des gains de retour.
- ▶ $r(t)$: est l'entrée de référence du système
- ▶ De (88) on peut écrire :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Bk_r r(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (89)$$

- ▶ Supposons que l'équation caractéristique souhaitée du système (88) est :

$$\alpha(p) = \prod_{i=1}^n (p + p_i) \quad (90)$$

- ▶ $H_{BO}(p) = C(pI - A)^{-1}B$, pour le système (87) en boucle ouverte.
- ▶ $H_{BF}(p) = C(pI - A + BK)^{-1}Bk_r$, pour le système (88) en boucle fermée.
- ▶ L'état d'équilibre est : $x_e = -(A - BK)^{-1}Bk_r r$, $y_e = Cx_e + Du_e$
- ▶ Puisque $y_e = r \Rightarrow$, dans le cas SISO, $k_r = \frac{-1}{C(A - BK)^{-1}B}$

La commande par retour d'état

- ▶ Dans le cas des systèmes **une entrée plusieurs sorties (SIMO)** les fonctions de transferts définies plus haut peuvent être écrites :

$$H_{BO}(p) = \frac{C \operatorname{adj}(pI - A) B}{a(p)} \quad (91)$$

où $a(p) = \det(pI - A)$ est le **polynôme caractéristique du système en boucle ouverte**.

$$H_{BF}(p) = \frac{C \operatorname{adj}(pI - A + BK) B}{a_{bf}(p)} \quad (92)$$

- ▶ où $a_{bf}(p) = \det(pI - A + BK)$ est le **polynôme caractéristique du système en boucle fermée**.
- ▶ **L'objectif de synthèse est de choisir les gains de retours K tels que $\alpha(p) = a_{bf}(p)$**

La commande par retour d'état

- ▶ Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée et le polynôme caractéristique souhaité sont donnés par :

$$\begin{aligned}\alpha(p) &= a(p) \det \left\{ 1 + \frac{K}{a(p)} \left[p^{n-1} + p^{n-2}(A + a_1 I) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p^{n-3}(A^2 + a_1 A + a_2 I) + \dots \right] B \right\} \\ \Rightarrow \alpha(p) - a(p) &= K \left[p^{n-1} + p^{n-2}(A + a_1 I) \right. \\ &\quad \left. + p^{n-3}(A^2 + a_1 A + a_2 I) + \dots \right] B\end{aligned}\quad (95)$$

- ▶ Identifiant dans (95) les coefficients auprès des termes de même ordre en p on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha_1 - a_1 &= KB \\ \alpha_2 - a_2 &= KAB + a_1 KB \\ \alpha_3 - a_3 &= KA^2 B + a_1 KAB + a_2 KB \\ &\vdots \\ \alpha_n - a_n &= KA^{n-1} B + \dots + a_{n-1} KAB + a_n KB\end{aligned}$$

La commande par retour d'état

- ▶ La forme vectorielle des coefficients du polynôme caractéristique du système en boucle fermée et le polynôme caractéristique souhaité est donnée par :

$$\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n], a = [a_1, \dots, a_n]$$

- ▶ Etant données les matrices de commandabilité W_c :

$$W_c = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

ainsi qu'une une matrice triangulaire inférieure de Toeplitz.

$$a_a = \text{Toeplitz}(1, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

⇒ La formule de Basse-Gura permettant de calculer des gains de retour $K = [K_{c1}, \dots, K_{cn}]$ dans le cas SIMO :

$$\begin{aligned} \alpha - a &= KW_c a_a^T \\ K &= (\alpha - a) a_a^{-T} W_c^{-1} \end{aligned} \quad (96)$$

La commande par retour d'état

- ▶ **Remarque** : Dans l'obtention de la formule précédente nous avons passé sous silence la condition que le système doit être atteignable ($\text{rang}(W_c) = n$). Cette condition est nécessaire afin d'obtenir la formule de Basse-Gura. En plus, il faut noter que dans le cas **SIMO** ou **SISO** la matrice W_c est une matrice carrée
- ▶ **Remarque** : Pour obtenir les gains de retour il suffit de connaître les coefficients du polynôme caractéristique du système en boucle ouverte et en boucle fermée, la matrice de Toeplitz associée et l'inverse de la matrice de commandabilité.
- ▶ **Remarque** : Il est très important de noter que le résultat (96) de placement de pôles pour les systèmes continus tient compte seulement de l'équation caractéristique du système en boucle ouverte et en boucle fermée. Ainsi, dans le cas discret l'approche est identique et le résultat (96) est directement applicable avec les adaptations pour le cas discret.

La commande par retour d'état

Action integral et rejet des perturbations constantes

- ▶ L'idée de base est de créer un état du contrôleur qui calcule l'intégral du signal d'erreur entre la sortie et la consigne noté $z(t)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Bu \\ y - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Bu \\ Cx - r \end{pmatrix} \quad (97)$$

- ▶ S'il existe un contrôleur qui stabilise le système alors nécessairement nous avons $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}(t) = 0 \Rightarrow y(\infty) = r(\infty)$ ou bien la sortie rejoint la consigne **sans erreur statique indépendamment des matrices A, B, K, k_i** .
- ▶ Le signal de commande calculé est : $u(t) = -Kx(t) - k_i z(t) + k_r r$
- ▶ L'état d'équilibre du système est : $x_e = -(A - BK)^{-1}B(k_r r - k_i z_e)$,

Problème de régulation ou de suivi de consignes constantes

- ▶ La boucle de régulation doit assurer la stabilité mais aussi les performances statiques et dynamiques. Si on considère l'équation d'état (88) après le bouclage par le retour d'état stabilisant $u(t) = -Kx(t) + K_r r_c$ on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + BK_r r_c \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{98}$$

où $r_c = c^{te}$. L'état d'équilibre du (99) est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(+\infty) &= 0 = (A - BK)x(+\infty) + BK_r r_c(+\infty) \\ y(+\infty) &= Cx(+\infty)\end{aligned}\tag{99}$$

d'où :

$$\begin{aligned}x(+\infty) &= -(A - BK)^{-1}BK_r r_c(+\infty) \\ y(+\infty) &= -C(A - BK)^{-1}BK_r r_c(+\infty)\end{aligned}$$

Problème de régulation ou de suivi de consignes constantes

- ▶ Le terme $C(A - BK)^{-1}BK_r$ représente la matrice des gains statiques (en régime établie) entre l'entrée de consigne constante r_c et les sorties $y(t)$ du système.
- ▶ Dans le cas SISO¹¹ si on souhaite que le système suive cette consigne il faut que $C(A - BK)^{-1}BK_r = 1$. Dans le cas SIMO¹² on peut écrire :

$$C(A - BK)^{-1}BK_r = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : Le cas plus général de suivi de consignes exprimé en trajectoire d'état va être traité par la suite. On va voir comment générer le signal de consigne en commande u_c à partir de la trajectoire d'état.

11. SISO : une entrée /une sortie

12. SIMO : une entrée /plusieurs sorties

Les observateurs asymptotiques

- Supposons que nous avons le système en boucle ouverte (100) et l'observateur en boucle ouverte (101).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) & y(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (100) \quad (101)$$

Si on note par $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ l'erreur d'observation \Rightarrow

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - (A\hat{x} + Bu(t)) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) \\ \tilde{x}(t) &= e^{At} \tilde{x}(0) \end{aligned}$$

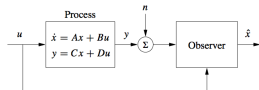


Figure 7.1: Block diagram for an observer. The observer uses the process measurement y (possibly corrupted by noise n) and the input u to estimate the current state of the process, denoted \hat{x} .

Conclusion : Si le système est instable en boucle ouverte alors l'erreur d'observation, $\tilde{x}(t) = e^{At} \tilde{x}(0)$, diverge si l'erreur observation initiale est différent de zero \Rightarrow ajouter les informations fournis par les capteurs et fermer la boucle d'observation.

Les observateurs asymptotiques

- ▶ Est-il capable :
 1. d'annuler l'erreur d'observation ?
 2. d'avoir une dynamique (d'annulation d'erreur) souhaitée ?.

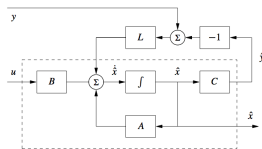


Figure 7.5: Block diagram of the observer. The observer takes the signals y and u as inputs and produces an estimate \hat{x} . Notice that the observer contains a copy of the process model that is driven by $y - \hat{y}$ through the observer gain L .

- ▶ **Hypothèse** : Le système (100) est observable.
- ▶ L'observateur à synthétiser a la représentation mathématique ou d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \\ y(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\quad (102)$$

où $L \in R^{n \times p}$ est la matrice des gains d'observation. L'erreur d'observation est :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + Bu(t) - (A\hat{x} + Bu(t) + L(y - \hat{y})) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= (A - LC)\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) \\ \tilde{x} &= e^{(A-LC)t}\tilde{x}(0)\end{aligned}\quad (103)$$

Les observateurs asymptotiques

- ▶ Afin de construire l'observateur asymptotique stable avec une dynamique souhaitée il faut que les valeurs propres de sa matrice d'état $(A - LC)$ ou les pôles de l'observateur en boucle fermée soient placés, suivant les spécifications, par le choix des gains d'observation L . Rappelons que le choix des gains de retour d'état K réalisent le placement des pôles du système en boucle fermée.
- ▶ Transposant $\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$ on obtient :

$$\dot{\tilde{x}}^T(t) = \tilde{x}^T(t)(A^T - C^T L^T) \quad (104)$$

- ▶ En comparant l'expression (104) avec l'expression (89) ou bien l'expression $\dot{x}(t) = (A - BK_c) + \dots$ nous remarquons que le problème de placement des pôles sont identique avec les transformations :

$$A \rightarrow A^T \wedge B \rightarrow C^T \wedge K \rightarrow L^T$$

- ▶ Donc nous pouvons utiliser la formule de Bass-Gura pour $p = 1$ (une seule sortie du système) afin de placer les pôles de l'observateur asymptotique stable.

Les observateurs asymptotiques

- ▶ Si on note par :
 - ▶ $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ le vecteur des coefficients du polynôme caractéristique souhaité de l'observateur asymptotique
 - ▶ $a = [a_1, \dots, a_n]^T$, est le vecteur des coefficients du polynôme caractéristique du système en boucle ouverte.
 - ▶ $W_o^T = [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$ est la matrice d'observabilité du système. Par hypothèse ($p = 1$) $W_o \in R^{n \times n}$.
 - ▶ $a_a = \text{Toeplitz}[1, a_1, a_2, \dots, a_n]$, la matrice de Toeplitz.
- ▶ Alors à partir de l'expression des gains de retour du contrôleur $K = (\alpha - a)a_a^{-T} W_c^{-1}$, la matrice des gains d'observation est donnée :

$$\begin{aligned} L^T &= (\alpha - a)a_a^{-T} W_o^{-T} \\ L &= W_o^{-1} a_a^{-1} (\alpha - a)^T \end{aligned} \tag{105}$$

Les observateurs asymptotiques

- ▶ **Remarque** : Nous avons passé sous silence le fait que la formule de calcul des gains d'observation donnée plus haut est applicable seulement dans le cas où **le système a une seule sortie ($p = 1$)**. Il existe d'autres méthodes permettant d'obtenir les gains de retour dans le cas multi-variable tout en gardant la même structure mathématique.
- ▶ **Remarque** : La synthèse de l'observateur asymptotique nécessite le choix des gains d'observation afin de déterminer **n coefficients de son polynôme caractéristique**. Puisque le nombre de gains à calculer est égal à $n \times p$ alors nous avons une infinité de solution. **Cette redondance paramétrique peut être utilisée afin de satisfaire d'autres objectives de synthèse.**
- ▶ **Remarque** : Il est très important de noter que le résultat (96) de placement de pôles de l'observateur continu tient compte seulement de l'équation caractéristique de l'observateur en boucle ouverte et en boucle fermée. Ainsi, dans le cas discret l'approche est identique et le résultat (105) est directement applicable avec les adaptations pour le cas discret.

Structure Observateur-Contrôleur de la commande

- ▶ Supposons que nous avons le système dynamique continu suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{106}$$

où :

- ▶ $x(t) \in R^n$: est l'état du système
 - ▶ $y(t) \in R^p$: est la sortie du système
 - ▶ $u(t) \in R^m$: est la commande appliquée
 - ▶ A, B, C sont des matrices aux dimensions convenables.
- ▶ **Hypothèse 1** : Nous allons supposer que le système est atteignable et observable et $D \equiv 0$.

Structure Observateur-Contrôleur de la commande

- observateur-contrôleur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases}$$

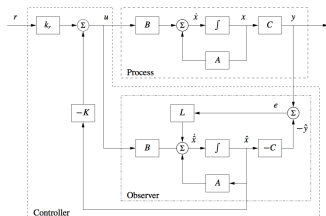


Figure 7.7: Block diagram of an observer-based control system. The observer uses the measured output y and the input u to construct an estimate of the state. This estimate is used by a state feedback controller to generate the corrective input. The controller consists of the observer and the state feedback; the observer is identical to that in Figure 7.5.

- Système plus contrôleur :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= -K\hat{x}(t) + k_r r(t) \end{cases}$$

- Observateur/Contrôleur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \\ u(t) &= -K\hat{x}(t) + k_r r(t) \end{cases}$$

Structure Observateur-Contrôleur de la commande

- ▶ En éliminant $u(t)$, $y(t)$ et $\hat{y}(t)$ dans les deux l'équations on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - B(K\hat{x}(t) + k_r r(t)) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) - B(K\hat{x}(t) + k_r r(t)) + L(Cx(t) - C\hat{x}(t))\end{aligned}\quad (107)$$

- ▶ qu'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u_c \quad (108)$$

Structure Observateur-Contrôleur de la commande

- Le polynôme caractéristique du **Système Observateur Contrôleur** note P_{SOC} (108) est donné par :

$$\begin{aligned}
 P_{SOC} &= \det(pl_{2n} - \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}) = \\
 &= \det\left(\begin{bmatrix} pl - A & +BK \\ -LC & pl - A + BK + LC \end{bmatrix} \right) \\
 P_{SOC} &= \det\left(\begin{bmatrix} pl - A + BK & +BK \\ pl - A + BK & pl - A + BK + LC \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \det\left(\begin{bmatrix} pl - A + BK & +BK \\ 0 & pl - A + LC \end{bmatrix} \right) \\
 P_{SOC} &= \underbrace{\det(pl - A + BK)}_{\text{système/contrôleur}} \underbrace{\det(pl - A + LC)}_{\text{observateur asymptotique}}
 \end{aligned}
 \tag{109}$$

Structure Observateur-Contrôleur de la commande

- ▶ Donc le polynôme caractéristique du système observateur contrôleur est donné par la multiplication du polynôme caractéristique du système plus contrôleur et du polynôme caractéristique de l'observateur asymptotique.
- ▶ **Remarque** : La dynamique du système observateur-contrôleur est composée de la dynamique du système plus contrôleur et celle de l'observateur asymptotique.
- ▶ **Remarque** : Sous l'hypothèse d'atteignabilité et d'observabilité la dynamique du système observateur-contrôleur est complètement définie par les objectifs de synthèse.
- ▶ Le système (108) peut être écrit de la manière suivante (110) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_c \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{110}$$

où $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est l'erreur d'observation.

Structure Observateur-Contrôleur de la commande

- ▶ L'équation matricielle (110) représente la décomposition selon la commandabilité du système observateur-contrôleur dont les composantes du vecteur d'état sont l'état du système et l'erreur d'observation.
- ▶ Nous pouvons facilement voir que l'erreur d'observation n'est pas commandable par l'entrée principale du système. Donc la stabilisabilité du système observateur-contrôleur sous-entend l'observabilité du système d'origine.

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ Considérons la famille de systèmes linéaires (111) commandable et observable définie par la relation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{111}$$

où $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^p$.

- ▶ Nous allons supposer que l'état se décompose en deux parties x_1 et x_2 tels que $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$, et que x_2 soit biaisé. Soient $b_2 \in R^m$, le biais portant sur la commande et $b_1 \in R^b$, le biais portant sur l'état. Le comportement du système (111) est alors caractérisé par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A_1, A_2]x(t) + A_2 b_2 + B(u(t) + b_1) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{112}$$

où $A = [A_1, A_2]$.

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ Si on considère que le point d'équilibre correspond à une commande nulle, alors on peut écrire :

$$0 = Ax_e + A_2 b_2 + B b_1$$

où $x_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

- ▶ Si la matrice A est inversible, alors l'état d'équilibre x_e du système est donné par :

$$x_e = -A^{-1}A_2 b_2 - A^{-1}B b_1 \quad (113)$$

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- **Lemme** : Si $A = [A_1, A_2]$ est une matrice inversible de format $(n \times n)$ et A_2 une matrice de rang maximum de format $(n \times b)$, alors $A^{-1}A_2 = [0, I_b]$ où I_b désigne la matrice identité de format $(b \times b)$. Appliquant cette lemme au résultat (113) on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{1_{ei}} = -(A^{-1}B)_i b_1 \quad i = 1, \dots, n - b \\ x(t) &= x_{2_{ei}} = -b_{2i} - (A^{-1}B)_i b_1 \quad i = n - b + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (114)$$

- **Remarque 1** : x_e peut être considéré comme état d'équilibre du système linéaire augmenté suivant correspondant à une entrée nulle :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_1, A_2]x(t) + A_2 b_2 + B(u(t) + b_1) \\ \dot{b}_1 &= 0 \\ \dot{b}_2 &= 0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (115)$$

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ La forme matricielle du système augmenté est :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B & A_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [C \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (116)$$

- ▶ Formulation du problème de rejet des biais constants sur l'état et sur la commande : **Rejeter de manière asymptotiquement stable les biais constants sur la commande et sur l'état** consiste à s'assurer que $x_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = [0, -b_2]^T$, autrement dit que l'état soit asymptotiquement stable quelle que soient les valeurs du biais sur l'état $x(t)$ et sur la commande $u(t)$.
- ▶ On peut se poser la question si le rejet de biais peut se faire par retour d'état.

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ **Hypothèse 1** : L'état est mesurable et atteignable.
- ▶ Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A_1, A_2]x(t) + A_2 b_2 + B(u(t) + b_1) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= -Kx(t)\end{aligned}\tag{117}$$

d'où :

$$x_e = -(A - BK)^{-1}A_2 b_2 - (A - BK)^{-1}Bb_1\tag{118}$$

Sous l'hypothèse précédente $(A - BK)$ est inversible. Se basant sur le *Lemme* précédente un "simple" placement de pôles n'assure pas le rejet de biais. **En conclusion le retour d'état, sans prendre des précautions particulières, ne permet pas de rejeter les biais constants sur l'état et la commande.**

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ Supposons maintenant que les biais sont connus. Alors en appliquant la commande et sachant que $K = [K^1, K^2]$:

$$u(t) = -b_1 - K^2 b_2 - Kx(t)$$

- ▶ De (117) on obtient le système en boucle fermée suivant (119) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_1, A_2]x(t) + A_2 b_2 + B(u(t) + b_1) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= -b_1 - K^2 b_2 - Kx(t) \end{aligned} \quad (119)$$

- ▶ En appliquant la commande dans l'équation d'état on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + A_2 b_2 - BK^2 b_2 - Bb_1 + Bb_1 \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + (A_2 - BK^2)b_2, \quad K = [K^1, K^2] \end{aligned} \quad (120)$$

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ Sachant que $(A - BK) = [A_1 - BK^1, A_2 - BK^2]$ et en appliquant le *Lemme* précédente, l'état d'équilibre du système en boucle fermée est : x

$$x_{e1} = 0, x_{e2} = -b_2$$

- ▶ **Remarque 2** : La connaissance des valeurs de biais et des gains de retour d'état est suffisante pour les rejeter les biais constantes de manière asymptotiquement stable. Ceci implique que la connaissance ou l'estimation des biais permet de résoudre ce problème (leur rejet d'une manière asymptotiquement stable).
- ▶ **Hypothèse 2** : l'état est non-mesurable mais observable :
- ▶ L'observateur asymptotique donne un état observé qui converge vers l'état du système mais une commande par retour d'état ne résout pas le problème de rejet de biais constants **ce qui implique la nécessité d'observer les biais.**

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- Sous l'hypothèse d'observabilité d'état et des biais l'observateur asymptotique du système augmenté (115) est donné par (121) :

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}(t) &= [A_1, A_2]\hat{x}(t) + A_2\hat{b}_2 + B(u(t) + \hat{b}_1) && +K_{o1}(y - \hat{y}) \\
 \dot{\hat{b}}_1 &= 0 && +K_{o2}(y - \hat{y}) \\
 \dot{\hat{b}}_2 &= 0 && +K_{o3}(y - \hat{y}) \\
 \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)
 \end{aligned}
 \tag{121}$$

- Les gains K_{o1} , K_{o2} , K_{o3} sont choisis de manière à placer les pôles de l'observateur, c.a.d de façon à stabiliser la dynamique de l'erreur d'observation à l'origine (erreur d'observation à zéro) .

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ Si on note le vecteur d'erreur d'observation par :

$$e = [e_x, e_{b_1}, e_{b_2}]^T = [x - \hat{x}, \hat{b}_1, \hat{b}_2]$$

- ▶ alors il évolue suivant la dynamique définie par l'équation différentielle matricielle (122).

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} A - K_{o1}C & B & A_2 \\ -K_{o2}C & 0 & 0 \\ -K_{o3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{b_1} \\ e_{b_2} \end{bmatrix} \quad (122)$$

- ▶ Considérons la proposition suivante :

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- **Proposition** : Soit la famille de systèmes linéaires biaisés :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A_1, A_2]x(t) + A_2 b_2(t) + B(u(t) + b_1) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse d'observabilité du système augmenté (115) la loi de commande par retour d'état

$$u(t) = -\hat{b}_1 - K\hat{x} - K^2\hat{b}_2$$

avec $K = [K^1, K^2]$ choisi de manière à stabiliser la dynamique du système linéaire sans biais :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx\end{aligned}$$

est telle que :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1 &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2 &= -b_2\end{aligned}$$

de plus, le principe de séparation s'applique, puisqu'il est possible de

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- **Preuve** : Considérons le système observateur-contrôleur suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= [A_1, A_2]x(t) + A_2 b_2(t) + B(u(t) + b_1) \\
 \dot{\hat{x}}(t) &= [A_1, A_2]\hat{x}(t) + A_2 \hat{b}_2(t) + B(u(t) + \hat{b}_1) + K_{o1}(y - \hat{y}) \\
 \dot{\hat{b}}_1 &= 0 + K_{o2}(y - \hat{y}) \\
 \dot{\hat{b}}_2 &= 0 + K_{o3}(y - \hat{y}) \\
 \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \\
 y(t) &= Cx(t) \\
 u(t) &= -\hat{b}_1 - K\hat{x} - K^2\hat{b}_2
 \end{aligned} \tag{123}$$

- Après changement de variables et quelques manipulations mathématiques on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_{b_1} \\ \dot{e}_{b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK & B & BK^2 \\ 0 & A - K_{o1} & B & A_2 \\ 0 & -K_{o2} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{o3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \\ e_{b_1} \\ e_{b_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 - BK^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} b \tag{124}$$

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ De cette expression matricielle nous pouvons constater la structure décomposée en contrôleur et observateur qui nous permet de faire la synthèse séparément.

Remarque : L'état d'équilibre $x_e = [0, -b_2]^T$ est ralié avec la dynamique stable $(A - BK)$.

- ▶ **Remarque** . De l'équation différentielle matricielle (124) il est évident que la dynamique de l'erreur d'observation est indépendante de la dynamique de stabilisation de l'état et elle est donnée par (122).
- ▶ **Remarque** . Les équations différentielles (123) représentent la dynamique du système complet formé du système en boucle ouvert plus l'observateur et le contrôleur. Les entrées externes sont les mesures et les biais portant sur la commande et sur l'état. Le régulateur du système est le sous système de (123) formé seulement de l'observateur et du contrôleur dont l'expression mathématique est :

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}(t) &= [A_1, A_2]\hat{x}(t) + A_2\hat{b}_2(t) + B(u(t) + \hat{b}_1) + K_{o1}(y - C\hat{x}) \\
 \dot{\hat{b}}_1 &= 0 + K_{o2}(y - C\hat{x}) \\
 \dot{\hat{b}}_2 &= 0 + K_{o3}(y - C\hat{x}) \\
 u(t) &= -\hat{b}_1 - K\hat{x} - K^2\hat{b}_2
 \end{aligned} \tag{125}$$

qu'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{b}}_1 \\ \dot{\hat{b}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK - K_{o1}C & -B & (A - BK^2) \\ K_{o2}C & 0 & 0 \\ K_{o3}C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{o1} \\ K_{o2} \\ K_{o3} \end{bmatrix} y(t) \\
 u(t) &= - \begin{bmatrix} K & I_{b_1 \times b_1} & K^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{126}$$

Commande avec rejet asymptotique de biais constantes

- ▶ Afin d'implémenter ce régulateur sur un ordinateur il faut le discrétiser avec la période d'échantillonnage appropriée. Ainsi on obtient le régulateur discret. Une autre manière équivalente d'obtenir le régulateur discret consiste à le synthétiser se basant sur le modèle d'état linéaire discret du système biaisé en boucle ouverte et sur l'observateur discret obtenu en se basant sur le modèle du système augmenté (116) . Cette approche va être adoptée dans ce qui suit.
- ▶ **Remarque** : De (125) l'estimation des biais est réalisée par l'intégration de l'erreur d'observation de sortie. Donc la commande appliquée au système à deux composantes intégrales.